

Семинар 8

Линейные отображения 2

Замена базиса. Лвойственный оператор. Ядра линейных функционалов. Свойства ортогоналов

1. Пусть $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ – матрица линейного оператора A в стандартном базисе пространства вектор-столбцов $\mathbb{R}^3$. Записать матрицу:
- а) оператора A в базисе $E = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$;
- б) двойственного оператора A^* в двойственном базисе $E^\vee$.
2. Пусть $\{l_1, l_2, \dots, l_m\}$ – семейство линейных функционалов на n -мерном векторном пространстве V , причем $m < n$. Доказать, что в V существует такой ненулевой вектор v , что $l_i(v) = 0, i = 1, \dots, m$. Что означает этот результат в приложении к решениям систем линейных уравнений?
3. Докажите, что число k -мерных подпространств в n -мерном векторном пространстве над конечным полем равно числу $(n - k)$ -мерных подпространств.
4. Доказать, что
- а) $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$;
- б) $(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$.

Проекторы

5. По каждому разложению векторного пространства $V = V_1 \oplus V_2$ в прямую сумму двух его подпространств V_1, V_2 строятся (как?) два проектора P_1, P_2 . Проверить, что эти операторы обладают следующими свойствами: $P_i^2 = P_i, i = 1, 2, P_1 + P_2 = id$.
6. Обратно, если в векторном пространстве V есть два оператора, обладающие свойствами, перечисленными в задаче 5, то они являются проекторами, связанными с некоторым (единственным) разложением пространства в прямую сумму двух подпространств. Доказать!
7. Пусть P_1, P_2 – проекторы из задачи 5. Тогда двойственные операторы P_1^*, P_2^* удовлетворяют условиям задачи 5 (почему?). С каким разложением в прямую сумму двойственного пространства $V^\vee$ они связаны?

Просто так

8. Оператор A таков, что $A^3 = 2id$. Доказать, что оператор $A^2 + 2A - 2id$ обратим.
- 9*. Оператор называется нильпотентным, если некоторая его натуральная степень равна нулевому оператору. Доказать, что существует базис, в котором такой оператор записывается треугольной матрицей с нулями на главной диагонали.