

Введение в дискретную математику и топологию. Осень 2025г

Задачи к семинарам. Список 5.

Мощности.

Не все задачи из этого списка будут обязательно разбираться на семинаре, некоторые задачи могут быть оставлены для самостоятельного решения. Звездочкой отмечены задачи, которые так или иначе затрагиваются на лекциях.

- (1) * Покажите, что
 - а) любое подмножество счетного множества конечно или счетно;
 - б) всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество;
 - в) объединение конечного или счетного числа счетных множеств счетно;
 - г) декартово произведение конечного числа счетных множеств счетно.
- (2) Задайте явной формулой биекцию между $\mathbb{N}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ и $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
- (3) * Покажите, что множество последовательностей из нулей и единиц равномощно $\mathbb{R}$.
- (4) * Покажите, что отрезок равномощен квадрату.
- (5) Покажите, что если множество мощности континуум является объединением двух своих подмножеств, то хотя бы одно из них также имеет мощность континуум.
- (6) Постройте явно¹ биекции между следующими наборами множеств. Где возможно, задайте биекцию формулой.
 - а) действительной прямой $\mathbb{R}$, замкнутым лучом $[0; +\infty)$, открытым лучом $(0; +\infty)$, отрезком $[0; 1]$, интервалом $(0; 1)$, полуинтервалом $(0; 1]$; множеством $[0; 1] \cup [2; 3]$; множеством $\bigcup_{k=0}^{\infty} [2k; 2k+1]$;
 - б) плоскостью $\mathbb{R}^2$, сферой и поверхностью куба в трехмерном пространстве;
 - в) плоскостью $\mathbb{R}^2$, открытым диском $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ и замкнутым диском $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.
- (7) Какова мощность $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{N}^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?
- (8) Какова мощность множества всех
 - а) монотонно неубывающих² функций $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$?
 - б) строго монотонно возрастающих функций $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$?
 - в) монотонно невозрастающих функций $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$?
 - г) биекций $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$?
 - д) прямых на плоскости $\mathbb{R}^2$?
 - е) вещественных последовательностей $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$, $a_i \in \mathbb{R}$?
 - ж) вещественных последовательностей $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$, имеющих пределом 0, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$?

¹Будем здесь считать, что отображение $f : X \rightarrow Y$ задано явно, если указан алгоритм вычисления $f(x)$ для каждого $x \in X$.

²Т.е. $f(x) \leq f(x')$ при $x \leq x'$.

- з) монотонно неубывающих функций $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$?
 - и) биекций $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$?
 - к) всех непрерывных функций $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$?
 - л) многочленов с действительными коэффициентами
 $\mathbb{R}[t] = \{\sum_{k=0}^n a_k t^k \mid a_k \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$?
 - м) формальных степенных рядов с действительными коэффициентами
 $\mathbb{R}[t] = \{\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \mid a_k \in \mathbb{R}\}$?
 - н) действительных чисел, являющихся корнем какого-нибудь многочлена с целыми коэффициентами?
- (9) * а) Установите биекцию между множеством $\mathcal{M} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{0, 1\}^k$ конечных последовательностей из нулей и единиц и множеством $\mathcal{D}$ двоично-рациональных чисел, лежащих в полуинтервале $[0; 1)$.
- б) Определите³ лексикографический порядок на множестве $\mathcal{M}$ таким образом, чтобы биекция из предыдущего пункта оказалась изоморфизмом линейно упорядоченных множеств. (Отношение порядка на $\mathcal{D}$ наследуется из стандартного порядка на $\mathbb{Q}$.)
- в) Установите биекцию между множеством таких бесконечных последовательностей $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ из нулей и единиц ($a_i \in \{0, 1\}$), которые принимают каждое значение бесконечное число раз (т.е. множества $A_0 = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n = 0\}$ и $A_1 = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n = 1\}$ бесконечны) и множеством $(0, 1) \setminus \mathcal{D}$. Используйте эту биекцию для доказательства континуальности отрезка $[0, 1]$.
- (10) * С помощью леммы Цорна докажите следующие утверждения.
- а) Любая сюръекция обладает правым обратным.
 - б) Для любых двух множеств X и Y существует либо инъективное отображение из X в Y , либо инъективное отображение из Y в X .
 - в) Для любых двух непропорциональных векторов в любом линейном пространстве существует линейная функция, принимающая нулевое значение на одном из них и ненулевое на другом.
 - г) В любом линейном пространстве существует базис Гамеля⁴.

³В лекциях описывался только лексикографический порядок на $\{0, 1\}^k$.

⁴Базисом Гамеля линейного пространства V называется такое множество векторов $B \subset V$, что каждый вектор $v \in V$ можно единственным образом представить в виде линейной комбинации векторов из B .