

Семинар 6.

Задача 1. Дана проективная плоскость $\mathbb{P}^2$ и двойственная ей проективная плоскость $\check{\mathbb{P}}^2$. Пусть A, B и l – две различные точки и прямая в $\mathbb{P}^2$, а $\check{A}, \check{B}$ и $\check{l}$ – двойственные им две прямые и точка в $\check{\mathbb{P}}^2$.

- 1) Докажите свойство инциденции: если $A \in l$, то $\check{A} \supset \check{l}$, и обратно.
- 2) Докажите, что если $l = AB$, то $\check{l} = \check{A} \cap \check{B}$, и обратно.
- 3) Пользуясь свойствами 1) и 2), сформулируйте в $\check{\mathbb{P}}^2$ теорему, двойственную к теореме Дезарга и теорему, двойственную обратной к ней. Какие теоремы вы получили в двойственной плоскости?

Задача 2. Пусть коника по Штейнеру $\mathbf{D}$ получена из двух пучков прямых $\check{A}$ и $\check{B}$, между которыми как прямыми в $\check{\mathbb{P}}^2$ задано проективное отображение $f : \check{A} \rightarrow \check{B}$. Пусть это отображение f является перспективным отображением с центром $S \in \check{\mathbb{P}}^2$. Что собой в этом случае представляет коника $\mathbf{D}$?

Задача 3. Пусть коника $\mathbf{D}$ по Штейнеру построена по проективному соответствию $f : \check{A} \xrightarrow{\sim} \check{B}$ между пучками прямых с центрами в точках A и B на конике $\mathbf{D}$ такому, что $f(AB) \neq AB$. Добавим к A и B еще 4 точки C, A_1, B_1, C_1 такие, что все 6 точек A, B, C, A_1, B_1, C_1 различны. Докажите теорему Паскаля, утверждающую, что точки $M = AB_1 \cap BA_1$, $N = AC_1 \cap CA_1$ и $P = BC_1 \cap CB_1$ коллинеарны.

(Указание: Воспользоваться идеей доказательства теоремы Паппа.)

Задача 4. Докажите, что если A_1 и B_1 – две различные фиксированные точки на конике $\mathbf{D}$, построенной по Штейнеру посредством проективного соответствия между двумя пучками прямых с центрами A и B на $\mathbf{D}$, отличными от A_1 и B_1 , то отображение $f : \check{A}_1 \rightarrow \check{B}_1 : A_1X \mapsto B_1X, X \in \mathbf{D}$, является проективным. (Тем самым, коника $\mathbf{D}$ получается по Штейнеру из двух проективно соответственных пучков прямых с центрами в любых двух различных точках на $\mathbf{D}$. Как следствие, теорема Паскаля верна для любых 6 различных точек A, B, C, A_1, B_1, C_1 на $\mathbf{D}$.)

Задача 5. Пользуясь произволом в выборе проективных координат $(x_0 : x_1 : x_2)$ на плоскости $\mathbb{P}^2$, а также в выборе проективного соответствия между пучками прямых, посредством которых построена коника по Штейнеру $\mathcal{C}$, найдите уравнение коники $\mathcal{C}$.