

Задачи к курсу “Введение в алгебраическую топологию”

С. К. Ландо

11 ноября 2025 г. Лекции 6–7

1. Пусть $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ — тригонометрический многочлен, т.е. линейная комбинация конечного числа функций вида $\sin kx, \cos mx$, где x — стандартная координата на окружности, k, m — целые неотрицательные числа. Докажите, что цепочка векторных пространств и линейных отображений

$$0 \longrightarrow \{p(x)e^{f(x)}\} \longrightarrow \{p(x)e^{f(x)}dx\} \longrightarrow 0,$$

где $p(x)$ — тригонометрические многочлены $p : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$, а среднее отображение это взятие дифференциала, является цепным комплексом.

2. Найдите гомологии цепного комплекса

$$0 \longrightarrow \{p(x)e^{f(x)}\} \longrightarrow \{p(x)e^{f(x)}dx\} \longrightarrow 0,$$

где $f, p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — многочлены, в случаях а) $f(x) = x^3 - x$; б) $f(x) = x^4$.

3. Постройте симплициальное разбиение произведения $\Delta^k \times \Delta^m$ k -мерного и m -мерного симплекса, вершинами которого являются произведения 0-мерных симплексов в Δ^k и Δ^m . Сколько симплексов размерности $k + m$ оно содержит?
4. Вычислите гомологии цепного комплекса абелевых групп

$$0 \longrightarrow C_1 = \mathbb{Z}_p \longrightarrow C_0 = \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

где p — положительное целое число, $p \geq 2$, и средний гомоморфизм представляет собой умножение на q по модулю p , в случаях, когда а) p и q взаимно просты; б) $q = p$; в) p и q не взаимно просты, но $q < p$.

5. Докажите, что у неориентируемого псевдомногообразия имеется двулистное накрытие ориентируемым псевдомногообразием.
6. Докажите, что степень конечнократного накрытия $f : X \rightarrow Y$ ориентируемой двумерной поверхности Y совпадает со степенью d_f , определенной отображением фундаментального класса $f_* : [X] \mapsto d_f \cdot [Y]$.

7. Пусть $f : X \rightarrow \mathbb{C}P^1$ — рациональная функция на гладкой компактной римановой поверхности X , рассматриваемая как непрерывное отображение в двумерную сферу $S^2 \cong \mathbb{C}P^1$. Введем на X и S^2 ориентацию, индуцированную комплексной структурой. Докажите, что степень отображения f совпадает с количеством прообразов y общей точки сферы.
8. Найдите коммутатор и коммутант фундаментальной группы проективной плоскости и бутылки Клейна.
9. Найдите коммутатор и коммутант фундаментальной группы дополнения к торическому узлу $T(p, q)$ в S^3 , p и q взаимно просты.
10. Докажите, что первые гомологии неориентированного псевдомногообразия с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ изоморфны подгруппе индекса 2 в группе первых гомологий с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ двулистного ориентирующего накрытия этого псевдомногообразия.
11. Вычислите гомологии неориентируемой поверхности рода g с коэффициентами в $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2$.
12. Вычислите гомологии вещественного проективного пространства $\mathbb{R}P^3$ с коэффициентами в $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2$.