

Введение в дискретную математику и топологию. Осень 2025г

Листок 5. Мощности.

Листок 5 принимается до конца третьей учебной недели 2-го модуля.

Задачи можно сдавать только преподавателю своей группы или лектору. О сдаче задач студент должен договориться заранее. Перед сдачей листка студент должен объявить список задач, которые он собирается рассказать, и собранные в одном месте записи (можно краткие) этих решений. Принимающий может попросить рассказать решение некоторых из этих задач (не обязательно всех) на свой выбор. При обнаружении хотя бы одного неверного решения прием задач прекращается и может быть возобновлен только в другой день.

Знаком $\diamond$ отмечены те задачи, в которых необходимо использовать аксиому выбора или любое равносильное ей утверждение (чаще всего удобнее использовать лемму Цорна).

- (1) Пусть на множестве X задано отношения частичного порядка $\prec$. Будем называть отношения частичного порядка $\preceq$ на X *продолжением* $\prec$, если из $a \prec b$ ($a, b \in X$) следует, что $a \preceq b$.
 - а) Докажите, если X счетно, то любое отношения частичного порядка $\prec$ можно продолжить до отношения линейного порядка.
 - б) $\diamond$ Докажите, любое отношения частичного порядка на любом множестве можно продолжить до отношения линейного порядка.
- (2) Докажите, что счетное линейно упорядоченное множество, в котором ни у одного элемента нет ни непосредственного предшественника, ни непосредственного последователя, и к тому же не имеющее ни минимального ни максимального элемента, единственно с точностью до изоморфизма (и потому изоморфно $\mathbb{Q}$). Выведите отсюда и из результата задачи 1а), что любое счетное частично упорядоченное множество изоморфно некоторому подмножеству в $\mathbb{Q}$ (с отношением порядка, унаследованным из стандартного порядка на $\mathbb{Q}$).
- (3) Докажите, что если в счетном ЧУМе X каждая цепь $Z \subset X$ ограничена (т.е. $\forall$ цепи $Z \subset X \exists$ такое $a \in X$, что $\forall z \in Z z \prec a$), то в ЧУМе X есть максимальный элемент.
- (4) Введем на множестве 2^X (X — бесконечное множество) отношение эквивалентности следующим образом: $A \sim B$, если их симметрическая разность $A \Delta B$ — конечное множество. Докажите, что это, действительно, отношение эквивалентности. Найдите мощность фактор-множества $2^X / \sim$ в случае
 - а) $X = \mathbb{N}$; б) $X = \mathbb{R}$; в) $\diamond$ X — произвольное бесконечное множество.
- (5) Пусть $f : M \rightarrow N$ и $g : N \rightarrow M$ — два инъективных отображения. Покажите, что множества M и N можно разбить на непересекающиеся подмножества $M = M' \sqcup M''$, $N = N' \sqcup N''$, так что f осуществляет биекцию между M' и N' , а g — биекцию между N'' и M'' .

- (6) Подмножество $S \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ состоит из попарно коммутирующих отображений, т.е. $\forall f, g \in S$ $f \circ g = g \circ f$.
 а) Может ли S быть континуально?
 б) А может ли S быть континуально, если оно состоит только из биекций?
- (7) Какова мощность множества всех отношений эквивалентности на $\mathbb{N}$? Назовем два отношения эквивалентности $\sim_1$ и $\sim_2$ на $\mathbb{N}$ изоморфными, если существует такая биекция $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, что $x \sim_1 y$ равносильно $f(x) \sim_2 f(y)$. Какова мощность множества классов изоморфных отношений эквивалентности на $\mathbb{N}$?
- (8) Какова мощность множества всех отношений линейного порядка на $\mathbb{N}$? Назовем два отношения линейного порядка $\prec_1$ и $\prec_2$ на $\mathbb{N}$ изоморфными, если существует такая биекция $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, что $x \prec_1 y$ равносильно $f(x) \prec_2 f(y)$. Какова мощность множества классов изоморфных отношений линейного порядка на $\mathbb{N}$?
- (9) $\diamond$ а) Докажите, что на любом бесконечном множестве X существует инволюция $f : X \rightarrow X$, действующая без неподвижных точек.
 б) Докажите, что на любом бесконечном множестве X существует такая биекция $f : X \rightarrow X$, что f^n не имеет неподвижных точек ни при каком $n \in \mathbb{N}$.
- (10) $\diamond$ Для любого ненулевого линейного подпространства U линейного пространства V (над некоторым полем $\mathbb{k}$) в V существует такое линейное подпространство W , что¹ $V = U \oplus W$.

¹Напомним, что линейное пространство V называется *прямой суммой* своих подпространств U и W , что записывается как $V = U \oplus W$, если любой вектор $v \in V$ единственным образом представляется в виде $v = u + w$, где $u \in U$ и $w \in W$.