

Введение в дискретную математику и топологию. Осень 2025г

Программа коллоквиума по первой части курса.

Для сдачи коллоквиума на положительную оценку необходимо уметь сформулировать определения всех понятий, перечисленных в первом разделе и приводить соответствующие примеры.

Билеты будут состоять из трех вопросов, взятых из второго раздела этого списка, а также из всех списков задач к семинарам, к которым добавлены следующие задачи из листков: 1.5, 2.2, 4.3, 4.6, 5.10, ...

* Пункты, отмеченные звездочкой, будут обсуждаться на лекциях 13 и 20 ноября.

I. Определения.

Множество, подмножество, элемент множества, прямое (декартово) произведение множеств, функция (отображение), композиция отображений, инъективное, сюръективное, биективное отображение, тождественное отображение, обратное отображение, индикаторная (характеристическая) функция подмножества, бинарная операция на множестве, булева функция, булева алгебра, логическая интерпретация бинарных операций на множестве $\{0, 1\}$, формула алгебры высказываний, тавтология, совершенная дизъюнктивная нормальная форма, отношение, свойства отношений (симметричность, антисимметричность, рефлексивность, транзитивность), отношение эквивалентности, класс эквивалентности, отношение частичного порядка, отношение линейного порядка, вполне упорядоченное множество, максимальный (минимальный) элемент ЧУМа, цепь и антицепь в ЧУМе, изоморфизм ЧУМов, покоординатное и лексикографическое упорядочение прямого произведения ЧУМов, изображение конечных ЧУМов диаграммой Хассе, равномощные множества, счетное множество, множество мощности континуум.

II. Утверждения.

- (1) Обратимость отображения равносильна его биективности. Необходимые и достаточные условия существования левого и правого обратного отображения.
- (2) Задание отношения эквивалентности равносильно заданию разбиения множества в объединение непересекающихся подмножеств.
- (3) Канонические биекции:
 - а) 2^X и $\{0, 1\}^X$;
 - б) $(X^Y)^Z$ и $X^{Y \times Z}$;
 - в) X^n и $X^{\{1, 2, \dots, n\}}$;
 - г) $Y^{A \sqcup B}$ и $Y^A \times Y^B$ ($A \cap B = \emptyset$);
 - д) $(A \times B)^X$ и $A^X \times B^X$.
- (4) Построение кольца вычетов $\mathbb{Z}/n$, определение операций сложения и умножения и доказательство того, что получилось коммутативное ассоциативное кольцо с единицей.
- (5) Построение поля $\mathbb{Q}$, доказательство того, что это поле.
- (6) Выражение булевых функций с помощью совершенной ДНФ.
- (7) Изоморфизм булевых алгебр 2^X и $\{0, 1\}^X$.

- (8) Любой ЧУМ X изоморфен подмножеству множества 2^X , упорядоченному по отношению включения.
- (9) ЧУМ $\{0, 1\}^n$ с лексикографическим отношением порядка изоморфен отрезку натурального ряда $[0, 2^n - 1] \subset \mathbb{Z}$, причем изоморфизм представляет собой запись натуральных чисел в позиционной двоичной системе счисления.
- (10) Определение и основные свойства чисел $\binom{n}{k}$.
- (11) Бином Ньютона.
- (12) Подсчет числа биективных, инъективных и сюръективных отображений конечных множеств.
- (13) Формула включений-исключений.
- (14) Теорема Кантора-Бернштейна.
- (15) Если множество X бесконечно, а Y — счетно, то $X \cup Y$ равномощно X .
- (16) Счетность $\mathbb{Q}$.
- (17) Теорема Кантора: множество всех последовательностей из нулей и единиц несчетно.
- (18) Теорема Кантора: мощность множества 2^X больше, чем мощность X .
- (19) Теорема Кантора: мощность множества $\{0, 1\}^X$ больше, чем мощность X .
- (20) Объединение счетного набора счетных множеств счетно.
- (21) Если множество X континуально, то $X \times X$ равномощно X .
- (22) * Равносильность трех формулировок аксиомы выбора.
- (23) * Из леммы Цорна следует, что любые два множества сравнимы по мощности.
- (24) * Из леммы Цорна следует, что любая сюръекция обладает правым обратным.
- (25) * Вполне упорядоченное множество не имеет автоморфизмов и не изоморфно никакому своему начальному отрезку.
- (26) * Любое подмножество $Y \subset X$ вполне упорядоченного множества X само вполне упорядочено и изоморфно некоторому начальному отрезку множества X .
- (27) * Из любых двух вполне упорядоченных множеств одно изоморфно начальному отрезку другого.
- (28) * Из леммы Цорна следует теорема Цермело.