

ПРИКЛАДНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА – 2025
Листок 4

1. а) Какова должна быть плотность зарядов простого слоя $\rho(z) > 0$ на (гладком) незамкнутом контуре на плоскости, чтобы потенциал на контуре был постоянным?

б) Тот же вопрос для потенциала двойного слоя.

2. Приведите пример области на плоскости, у которой гармонические моменты внешности

$$t_k = -\frac{1}{\pi k} \int_{\mathbb{C} \setminus D} z^{-k} d^2 z$$

все равны 0 при $k \geq 1$, $k \neq 3$, а момент t_3 отличен от 0.

3. Докажите формулу для функции Бесселя с полуцелым индексом:

$$J_{-m-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{m+\frac{1}{2}} \left(x^{-1} \partial_x \right)^m \frac{\cos x}{x}, \quad m \geq 0.$$

4. Вычислите интеграл

$$\int_0^\infty e^{-ax} J_1(x) dx, \quad a > 0.$$

5. Найдите главный член асимптотики второго линейно-независимого решения дифференциального уравнения для полиномов Лежандра вблизи точек $x = \pm 1$.