

Во всех задачах основное поле считается алгебраически замкнутым полем характеристики 0.

Задача 1. Пусть S и l – точка и прямая в плоскости $\mathbb{P}^2$, причем $S \notin l$. Пусть a, b, c, d – четыре различные прямые в $\mathbb{P}^2$ через точку S , пересекающие прямую l в точках A, B, C, D соответственно. В двойственной плоскости $\mathbb{P}^2$ прямыми a, b, c, d соответствуют точки $\check{a}, \check{b}, \check{c}, \check{d}$ на прямой $\check{S}$. Докажите равенство двойных отношений $(\check{a}\check{b}\check{c}\check{d}) = (ABCD)$. Двойное отношение $(ABCD)$ называется *двойным отношением* $(abcd)$ прямых a, b, c, d пучка через точку S . Как видим, оно не зависит от выбора прямой l в $\mathbb{P}^2$.

Задача 2. Пусть A и B – две различные точки плоскости $\mathbb{P}^2$, и коника по Штейнеру X получена из проективного отображения $f: \check{A} \rightarrow \check{B}$, где $\check{A}$ и $\check{B}$ – пучки прямых, проходящих, соответственно, через точки A и B . Покажите, что если $f(AB) \neq AB$ (в этом случае коника C называется *невыврожденной коникой по Штейнеру*), то любая прямая $l \subset \mathbb{P}^2$ пересекает X в одной или двух точках. В частности, коника X не содержит прямой.

Задача 3. Назовем *касательной прямой* в точке $x \in X$ к невырожденной конике X по Штейнеру такую прямую l в плоскости, которая имеет с X единственную общую точку x . В условиях задачи 1 докажите, что если невырожденная коника по Штейнеру X получается посредством проективного отображения $f: \check{A} \rightarrow \check{B}$, то прямые $l = f(AB)$ и $m = f^{-1}(BA)$ – касательные к конике X в точках A и B соответственно.

Задача 4. Пусть C – невырожденная коника по Штейнеру, и O – произвольная точка вне C . Проведем три произвольные прямые l, m, n через точку O , пересекающие конику C в точках X и X_1, Y и Y_1, Z и Z_1 соответственно, как показано на рисунке ниже. Тогда по теореме Дезарга точки

$$S = (Y_1Z_1) \cap (YZ), \quad S' = (XZ_1) \cap (X_1Z), \quad S'' = (XY_1) \cap (X_1Y),$$

лежат на одной прямой, которую мы обозначим через $\mathbf{p}_O$. Докажите, что прямая $\mathbf{p}_O$ не зависит от выбора вписанных в конику C перспективных треугольников XY_1Z_1 и X_1YZ , для которых она является осью Дезарга. Она называется *полярной точки O относительно коники C* . Полярной точки O на невырожденной конике Штейнера C по определению называется касательная прямая к конике C в точке O .

Задача 5. В условиях предыдущей задачи докажите, что произвольная прямая l через точку $O \notin C$, пересекающая конику C в двух различных точках A и B , пересекает полярную $\mathbf{p}_O$ в точке P такой, что пара точек OP гармонически делит пару точек AB .