Семинар 10

Линейные операторы 3

Характеристический многочлен. Инвариантные подпространства. Теорема Гамильтона-Кэли

1. Следом $\mathrm{tr}A$ линейного оператора А называется след его матрицы в любом базисе. Проверить корректность этого определения.

2. Пусть $\chi(t) = t^n - a_1t^{n-1} + \ldots (-1)^n \det A$ – характеристический многочлен оператора A. Доказать,что $a_1 = \mathrm{tr}A$.

3. Характеристический многочлен оператора A в пространстве V делится на характеристический многочлен ограничения оператора A на любое A-инвариантное подпространство. Доказать.
(точнее: характеристический многочлен оператора A раскладывается в произведение характеристического многочлена ограничения оператора A на A-инвариантное подпространство W и характеристического многочлена фактор-оператора A на фактор-пространстве V/W).

4. Найти число инвариантных подпространств оператора дифференцирования в пространстве многочленов степени $\leq n$.

5. Доказать, что операторы, сохраняющие подпространство $W < V$, образуют подалгебру алгебры $\mathrm{Hom}(V, V)$. Найти размерность этой подалгебры.

6. Доказать, что для любого многочлена $P(X) \in F[X]$ подпространства $\mathrm{Ker}P(A)$ и $\mathrm{Im}P(A)$ A-инвариантны.

7. Если операторы A и B коммутируют, то подпространства $\mathrm{Ker}A$, $\mathrm{Im}A$ и все собственные подпространства оператора A инвариантны относительно оператора B. Доказать.

8. Проверить теорему Гамильтона-Кэли для матриц второго порядка.

9. Пусть A – линейный оператор, а w-вектор из V. Через $\langle w, A\rangle$ обозначим линейную оболочку векторов $\langle w, Aw, A^2w, \ldots\rangle$. Доказать, что подпространство $\langle w, A\rangle$ инвариантно относительно оператора A. Привести пример оператора и его инвариантного подпространства, отличного от подпространства вида $\langle w, A\rangle$.

10*. Пусть многочлен $P(X) \in F[X]$ аннулирует оператор A. Если $P(X) = P_1(X)P_2(X)$, то $V = \mathrm{Ker}P_1(A) + \mathrm{Ker}P_2(A)$. Доказать.