

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ-I

Конспект лекций

I семестр

1 модуль

Лекция 1

Элементы теории множеств

На первых порах мы будем использовать следующие множества: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \emptyset$. Они знакомы вам со школьных времён. Также считаются известными операции включения элемента во множество $a \in A$ и множества во множество $A \subset B$, пересечения и объединения множеств $A \cap B, A \cup B$, разности множеств $A \setminus B$ и декартова произведения множеств $A \times B$.

В школе вы также изучали отображения множеств $f: A \rightarrow B$. Напомним, что можно выделить несколько видов отображений множеств: *инъективное, сюръективное и биективное*. Отображение $f: A \rightarrow B$ называется инъективными или отображением “в”, если $f(x)$ не совпадает с $f(y)$ для всяких несовпадающих $x, y \in A$. Отображение $f: A \rightarrow B$ называется сюръективным или отображением “на”, если для всякого $b \in B$ существует $a \in A$ такой, что $f(a) = b$. Отображение называется биективным, или взаимно-однозначным, если оно одновременно инъективно и сюръективно. Конечно же, есть отображения, которые не являются ни инъективными, ни сюръективными.

В матанализе активно используется язык кванторов. Нам понадобятся кванторы *всеобщности* $\forall$ и *существования* $\exists$. Их пока следует понимать как символическое обозначение слов “для всякого, для любого” в случае квантора $\forall$ и “существует” в случае квантора $\exists$. Например определение сюръективного отображения переписывается следующим образом:

$$\forall b \in B \exists a \in A: f(a) = b.$$

Двоеточие читается как “такой что”.

Напомним также, что *мощностью конечного множества* называется число элементов в нём. При этом мощность множества $\emptyset$ равна 0. Для бесконечных множеств понятие мощности не определяется, но определяется понятие *равномощных множеств*: *два множества называются равномощными, если между ними существует биекция*.

Нам понадобятся две следующие теоремы, которые будут доказаны в курсе “**Введение в дискретную математику и топологию**”.

Теорема. *Для любых двух множеств A и B верно следующее: они либо равномощны, либо нет. Причём в последнем случае верно, что либо A равномощно подмножеству B , либо B равномощно подмножеству A .*

Теорема Кантора-Бернштейна. *Если A равномощно подмножеству B , а B равномощно подмножеству A , то A и B равномощны.*

Счётным мы будем называть всякое множество, равномощное $\mathbb{N}$. Например, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ счётны. Докажем следующую теорему

Теорема. *Множество бесконечных последовательностей из 0 и 1 несчётно.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда последовательности из 0 и 1 можно занумеровать следующим образом: в первой строке выпишем первую последовательность, во второй строке – вторую и т.д. Предъявим последовательность из 0 и 1, которую нельзя вписать ни в какую строку. Её первый элемент отличен от первого элемента первой строки, второй

элемент отличен от второго элемента второй строки и т.д. Такая последовательность не может стоять в n -ой строке, т.к. она отличается от этой строки n -м элементом. $\square$

Помимо счётных множеств нам будут очень часто встречаться *континуальные множества*: множество называется континуальным, если оно равномощно множеству последовательностей из 0 и 1. Примеры континуальных множеств: $\mathbb{R}$, $[0, 1]$, $(-2.5, 7)$.

Пример. Покажем, что всякое бесконечное множество (т.е. оно содержит бесконечно много элементов) A равномощно его объединению со счётным (или конечным) множеством B . Действительно, найдём в A счётную часть S (почему она есть?). Рассмотрим разбиение $A = (A \setminus S) \cup S$. Тогда биекцию с $A \cup B$ построим таким образом: на $A \setminus S$ — это тождественное отображение, а на S есть биекция с $S \cup B$.

Упражнение. Покажите, что произведение континуальных множеств континуально, а счётных счётно.

Теория вещественных чисел

Есть различные подходы к определению вещественного числа. Мы будем следовать аксиоматическому подходу, а именно предъявим такой набор аксиом, что множество, удовлетворяющее этому набору, будет называется множеством вещественных чисел $\mathbb{R}$. Корректность этого определения (т.е. что такое множество действительно существует и оно в некотором смысле единственно) будет доказана в начале второго модуля.

Чтобы предъявить вышеупомянутый набор аксиом нам понадобится дать несколько определений. Мы начнём с определения *группы*.

Определение. Множество G с бинарной операцией $*$: $G \times G \rightarrow G$ называется коммутативной (или абелевой) группой, если выполнены следующие условия:

- (i) Существует нейтральный элемент $e \in G$ такой, что $\forall x \in G$ справедливо $x * e = e * x = x$.
- (ii) Существует обратный элемент: $\forall x \in G \exists y \in G$ такой, что $x * y = y * x = e$.
- (iii) Операция $*$ ассоциативна: всегда $(a * b) * c = a * (b * c)$.
- (iv) Операция $*$ коммутативна: всегда $a * b = b * a$.

При этом вместо $*$ часто используют либо знак $+$ сложения, либо знак $\times$ (он же $\cdot$) умножения. В случае использования $+$, группу называют *аддитивной группой* или *группой по сложению*. Если используется $\times$, то группу называют *мультипликативной* или *группой по умножению*. В мультипликативной группе очень часто знак операции не пишут вообще. В аддитивной группе нейтральный элемент называется 0, обратный элемент к a обозначается $-a$. В мультипликативной группе нейтральный элемент называется 1, обратный элемент к a обозначается a^{-1} . Конечно же, есть и некоммутативные группы (они нам пока не понадобятся). Подробнее группы будут изучаться в курсе алгебры.

Аксиомы операций. На множестве вещественных чисел заданы 2 коммутативные бинарные операции, сложения и умножения. Вот аксиомы, которым они удовлетворяют:

- (i) $(\mathbb{R}, +)$ — аддитивная коммутативная группа.
- (ii) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ — мультипликативная коммутативная группа.
- (iii) Умножение дистрибутивно относительно сложения: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ верно, что

$$(x + y)z = xz + yz.$$

Если выполнены такие аксиомы, то множество называется *полем* (т.е. заданы две коммутативных операции, связанные между собой законом дистрибутивности). Таким образом, *первая аксиома вещественных чисел говорит, что на $\mathbb{R}$ заданы 2 операции, относительно которых $\mathbb{R}$ является полем*. Примеры полей: $\mathbb{R}, \mathbb{Q}$. На $\mathbb{Z}$ же со стандартными операциями $+$ и $\times$ нет структуры поля. Как и множества, поля бывают конечными и бесконечными. Например, поле $\mathbb{F}_2$ состоит из двух элементов 0 и 1.

Аксиомы порядка. Начнём с определений.

Определение. Говорят, что на множестве A определено отношение $\mathcal{R}$, если в множестве пар (a, b) , $a \in A$, $b \in A$ выбрано некоторое подмножество. Если пара (a, b) принадлежит подмножеству, то будем говорить, что $a\mathcal{R}b$.

Определение. Отношение $\leq$ называется отношением порядка, если выполнены следующие свойства:

- (i) $a \leq a$;
- (ii) $(a \leq b) \wedge (b \leq a) \Rightarrow a = b$ (символ “ $\wedge$ ” читается как “и”);
- (iii) $(a \leq b) \wedge (b \leq c) \Rightarrow a \leq c$.

Если дополнительно выполнено свойство $\forall a, b \in A$ либо $a \leq b$, либо $b \leq a$ (то есть все элементы множества A *сравнимы*), то множество называется *линейно упорядоченным*. В противном случае (т.е. не все элементы сравнимы) — *частично упорядоченным*. Наряду со знаком $\leq$ мы будем использовать знак $\geq$, который определим так $x \leq y \Leftrightarrow y \geq x$. Пример отношения на множестве натуральных чисел (помимо очевидного): m делится на n . Проверка аксиом отношения порядка очевидна (но всё равно проверьте!).

Структуры одного лишь множества (или поля) с отношением порядка нам будет недостаточно. Поэтому дадим следующее определение.

Определение. Поле F называется *упорядоченным полем*, если на этом поле задано отношение порядка, F линейно упорядочено, причём

$$a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c \quad \forall c \in F \quad \text{и} \quad (0 \leq a) \wedge (0 \leq b) \Rightarrow 0 \leq ab.$$

Примеры упорядоченных полей:

- 1) $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$;
- 2) *множество рациональных функций над полем $\mathbb{R}$* , т.е. функций вида $R = P/Q$, где P, Q — многочлены, причём Q не тождественно 0 (при этом полагается, что $R > 0$, если коэффициенты при старших степенях в P и Q имеют один и тот же знак, а отношение порядка таково: $R_1 \geq R_2 \Leftrightarrow R_1 - R_2 \geq 0$);
- 3) множество $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ чисел вида $a + b\sqrt{3}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$;
- 4) множество вещественных алгебраических чисел (т.е. корней многочленов с целыми коэффициентами).

Аксиома непрерывности (полноты). Пусть $A, B \subset \mathbb{R}$, $A, B \neq \emptyset$, причём $\forall a \in A, b \in B$ справедливо $a \leq b$. Тогда существует такое $c \in \mathbb{R}$, что $\forall a \in A$ справедливо $a \leq c$, и $\forall b \in B$ справедливо $c \leq b$.

Несмотря на кажущуюся очевидность аксиомы непрерывности, она позволяет отделить поле $\mathbb{R}$ от всех остальных упорядоченных полей.

Итак, мы готовы сформулировать определение вещественных чисел.

Определение. Полем вещественных чисел называется упорядоченное поле с аксиомой непрерывности.

Для всех приведённых выше упорядоченных полей за исключением $\mathbb{R}$ аксиома непрерывности не выполняется. Действительно,

1) для $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$: между множествами $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < \sqrt{2}\}$ и $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > \sqrt{2}\}$ нельзя “вставить рациональное число” (предварительно нужно показать, что число $\sqrt{2}$ не является рациональным). Аналогичным образом для $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ между множествами $A = \{x \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \mid x < \sqrt{2}\}$ и $B = \{x \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \mid x > \sqrt{2}\}$ нельзя “вставить число” из $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ (почему?).

2) для поля рациональных функций над $\mathbb{R}$: рассмотрим множество чисел и множество многочленов вида $ax + b$, $a > 0$. Любой такой многочлен больше любого числа, однако нет рациональной функции, которая больше всех чисел и меньше всех таких многочленов (почему?).

Модели множества вещественных чисел. Под моделью мы будем понимать какое-то упорядоченное поле, на котором действует аксиома непрерывности. Рассмотрим некоторые из них.

- (i) Множество десятичных чисел. Это конструкция изучалась в школе.
- (ii) Множество чисел по заданному основанию (двоичные, троичные и т.д.). Также изучалась в школе.
- (iii) Числовая прямая. Также изучалась в школе.
- (iv) Дедекиндовы сечения. Ограничимся лишь определением: *сечением Дедекинда* называется разбиение множества $\mathbb{Q}$ на два подмножества A и A' таким образом, чтобы всякое число из A было бы меньше всякого числа из A' . На множестве таких сечений можно ввести структуру упорядоченного множества и проверить аксиому непрерывности (см. [2]).
- (v) Множество классов эквивалентности фундаментальных последовательностей рациональных чисел. Здесь две фундаментальные последовательности называются эквивалентными, если их “объединение” — снова фундаментальная последовательность. Об этом речь пойдёт позже.

Упражнение. Проверьте аксиомы упорядоченного поля, а также аксиому непрерывности для моделей десятичных, двоичных чисел, а также для модели числовой прямой (как определить умножение?).

Лекция 2

Ограниченные множества

Определение. Множеством $A \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным сверху, если существует такое число $C \in \mathbb{R}$, что для всякого $a \in A$ верно, что $a \leq C$. Число C при этом называется верхней границей или гранью.

На языке кванторов это определение запишется следующим образом: $A \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным сверху $\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} \forall a \in A : a \leq C$. Отрицание этого определения даёт определение неограниченного сверху множества.

Определение. Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется неограниченным сверху $\Leftrightarrow \forall C \in \mathbb{R} \exists a \in A : a > C$.

Аналогичным образом определяются ограниченные снизу (существует нижняя граница $C \in \mathbb{R}$) и неограниченные снизу множества (нижней границы не существует).

Определение. Множеством $A \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным, если оно ограничено и сверху и снизу. Можно также сказать, что $A \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным $\Leftrightarrow \exists C > 0 \in \mathbb{R} \forall a \in A : |a| \leq C$.

Определение. Число $M \in A$ называется максимальным или наибольшим элементом множества A , если оно является верхней границей множества A , то есть для любого $x \in A$ справедливо $x \leq M$. Число $m \in A$ называется минимальным или наименьшим элементом множества A , если оно является нижней границей множества A , то есть для любого $x \in A$ справедливо $x \geq m$.

Обозначения. $M = \max A = \max\{x \mid x \in A\} = \max_{x \in A} x$; $m = \min A = \min\{x \mid x \in A\} = \min_{x \in A} x$.

Упражнение. Из аксиомы порядка выведите единственность наибольшего и наименьшего элементов ограниченного множества (при условии, что они есть).

Примеры: наибольшим элементов множества *неположительных вещественных чисел* является 0, наименьшего элемента нет (множество не ограничено снизу); множество же *отрицательных чисел* не имеет ни наибольшего, ни наименьшего элементов (наибольшим элементом должен был бы быть 0, но он не является отрицательным числом), наименьшего элемента нет, т.к. множество не ограничено снизу.

Предыдущий пример показывает, что ограниченные множества не очень удобно описывать при помощи их наибольших и наименьших элементов (т.к. их может не быть). Однако, если множество ограничено, то всегда есть границы. Дадим следующие определения.

Определение. Число $M \in \mathbb{R}$ называется *супремумом* или *точной верхней гранью* множества $A \Leftrightarrow (\forall x \in A : x \leq M) \wedge (\forall y < M : \exists x \in A : x > y)$. Число $m \in \mathbb{R}$ называется *инфимумом* или *точной нижней гранью* множества $A \Leftrightarrow (\forall x \in A : x \geq m) \wedge (\forall y > m : \exists x \in A : x < y)$.

Обозначения. Они аналогичны обозначениям для $\max$ и $\min$: $M = \sup A$; $m = \inf A$.

Следующая теорема демонстрирует удобство этого определения.

Теорема. В $\mathbb{R}$ у любого непустого ограниченного сверху множества есть супремум, а у любого непустого ограниченного снизу множества есть инфимум.

Доказательство. Доказательство проведём для случая ограниченного сверху множества. Для ограниченного снизу множества доказательство аналогично.

Пусть A^+ — множество верхних границ множества A . Оба множества A и A^+ не пустые и при этом выполнено условие аксиомы непрерывности: все элементы множества A не больше всех элементов множества A^+ . Значит, в силу аксиомы непрерывности существует число M такое, что $\forall x \in A, y \in A^+ : x \leq M \leq y$. По построению, $M = \sup A$, т.к. $\forall x \in A : x \leq M$ и это, действительно, наименьшая верхняя граница, т.к. $\forall y \in A^+ : y \geq M$ $\square$.

На самом деле верна следующая

Теорема. *Теорема о существовании верхней грани эквивалентна аксиоме непрерывности. Иными словами, упорядоченное поле, у которого каждое непустое ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю грань есть $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Осталось показать, что для всякого упорядоченного поля, у которого любое непустое ограниченное сверху подмножество имеет супремум, выполняется аксиома полноты. Пусть F — такое поле. Пусть множества A и B не пусты и $\forall a \in A, b \in B$ выполнено $a \leq b$. Тогда A ограничено сверху, а B принадлежит множеству верхних граней A . Тогда по предположению теоремы, A имеет супремум c . По определению супремума c не больше любого элемента из B . Таким образом, $a \leq c \leq b$. В силу произвольности выбора A и B , аксиома полноты выполнена, значит, это поле $\mathbb{R}$. $\square$

Лекция 3

Другие следствия из аксиом вещественных чисел

Сформулируем и докажем некоторые следствия из аксиом вещественных чисел.

- (i) Следующие элементы единственны: 0, 1, противоположный и обратный к данному элементу.

▷ Доказательство проведем лишь для 0 и противоположного элемента. Доказательство для 1 и обратного элемента аналогично. От противного. Пусть есть два нулевых элемента 0_1 и 0_2 и для данного $x \in \mathbb{R}$ пусть есть два противоположных элемента $(-x)_1$ и $(-x)_2$. Тогда

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2.$$

$$(-x)_1 = (-x)_1 + 0 = (-x)_1 + (x + (-x)_2) = ((-x)_1 + x) + (-x)_2 = 0 + (-x)_2 = (-x)_2. \triangleleft$$

- (ii) К обеим частям равенства можно добавлять число, сохраняя равенство. Обе части равенства можно умножать на число, сохраняя равенство.
 (iii) Уравнение $a + x = b$ имеет решение $x = b - a$, причём единственное. Уравнение $a \cdot x = b$ имеет при $a \neq 0$ решение $x = b \cdot a^{-1}$, причём единственное.

$$\triangleright a + x = b \Leftrightarrow a + x + (-a) = b + (-a) \Leftrightarrow a + (-a) + x = b - a \Leftrightarrow x = b - a. \triangleleft$$

- (iv) Для любого $x \in \mathbb{R}$ справедливо $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$. Если $x \cdot y = 0$, то либо $x = 0$, либо $y = 0$.

$$\triangleright x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0 \Rightarrow x \cdot 0 + (-(x \cdot 0)) = x \cdot 0 + x \cdot 0 + (-(x \cdot 0)) \Rightarrow x \cdot 0 = 0$$

Если $x \cdot y = 0$ и $y \neq 0$, то $x = 0 \cdot y^{-1} = 0. \triangleleft$

- (v) Справедливы равенства $-x = (-1) \cdot x$; $(-1) \cdot (-1) = 1$; $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.

▷ Докажем лишь первое равенство

$$x + (-1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 0 \cdot x = 0. \triangleleft$$

- (vi) $\forall x, y \in \mathbb{R} : (x < y) \vee (x = y) \vee (x > y)$; $(x < y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow x < z$; $(x \leq y) \wedge (y < z) \Rightarrow x < z$.
 (vii) $x < y \Rightarrow x + z < y + z$; $x > 0 \Rightarrow -x < 0$; $(a \geq b) \wedge (c \geq d) \Rightarrow a + c \geq b + d$; $(a \geq b) \wedge (c > d) \Rightarrow a + c > b + d$; $(a > b) \wedge (c > d) \Rightarrow a + c > b + d$;
 (viii) $(x > 0) \wedge (y > 0) \Rightarrow xy > 0$; $(x > 0) \wedge (y < 0) \Rightarrow xy < 0$; $(x > y) \wedge (z > 0) \Rightarrow xz > yz$; $(x > y) \wedge (z < 0) \Rightarrow xz < yz$;
 (ix) $1 > 0$; $x > 0 \Rightarrow x^{-1} > 0$; $x < 0 \Rightarrow x^{-1} < 0$; $(x > 0) \wedge (y > x) \Rightarrow x^{-1} > y^{-1}$.

▷ Если $1 < 0$, то $1 \cdot 1 > 0$ и $1 > 0$. Если $1 = 0$, то $x \cdot 1 = x$ и $x \cdot 0 = 0$, отсюда $x = 0$.

Значит, $1 > 0$. Из $x > 0$ и $x^{-1} < 0$ следует $x \cdot x^{-1} < 0$, что противоречит $1 > 0$. $\triangleleft$

Аксиома Архимеда

Несмотря на своё название, аксиома Архимеда в современном изложении является теоремой, выводимой из аксиом вещественных чисел.

Теорема (аксиома Архимеда). Для любых положительных вещественных чисел a и b верно, что среди чисел

$$a, 2a(= a + a), 3a(= a + a + a), \dots, na, \dots$$

найдутся числа, большие b .

Доказательство. Рассмотрим множество A чисел вида na . Предположим, что среди них нет ни одного числа, большего b . Тогда множество A ограничено сверху b . По теореме о существовании точно верхней грани, существует $c = \sup A$. Рассмотрим $d = c - a$. Из аксиом

упорядоченного поля следует, что $d < c$ т.к. $a > 0$ (объясните подробно!). По определению супремума $c \geq a + \dots + a$ для любого количества слагаемых. Но тогда $d = c - a \geq a + \dots + a$ для любого количества слагаемых. Мы нашли число $d < c$ такое, что оно является верхней гранью A . Это противоречит тому, что c — точная верхняя грань $\square$

Определение. Упорядоченное поле, удовлетворяющее аксиоме Архимеда, называется архимедовым.

Примеры: архимедовы поля: $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}(\sqrt{3})$; неархимедово поле: множество рациональных функций над $\mathbb{R}$.

Упражнение. Убедитесь в том, что утверждения из предыдущих примеров верны (случай $\mathbb{R}$ уже разобран).

Натуральные числа

Нам понадобится более строгое определение натуральных чисел, чем то, которым вы пользовались в школе. Вообще говоря, натуральные числа определяются с помощью аксиом Пеано, о которых пойдёт речь в курсе по дискретной математике и топологии. Мы не будем вовсе касаться аксиоматики Пеано натуральных чисел. Корректность определения, которое следует ниже (т.е. то, что определённые нами натуральные числа действительно удовлетворяют аксиомам Пеано), будет доказана в курсе “Введение в дискретную математику и топологию”.

Начнём с определения индуктивных множеств.

Определение. Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется индуктивным, если $\forall a \in A: a + 1 \in A$.

Лемма. Пересечение любого числа индуктивных множеств или пусто или само является индуктивным множеством.

Доказательство. Пусть $A = \bigcap A_\alpha$, где α пробегает некоторое множество $\mathcal{A}$. Тогда

$$a \in A \Rightarrow \forall \alpha \in \mathcal{A}: a \in A_\alpha \Rightarrow \forall \alpha: (a + 1) \in A_\alpha \Rightarrow (a + 1) \in A. \square$$

Определение. Множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ — это пересечение всех индуктивных подмножеств $\mathbb{R}$, содержащих 1.

Замечание. По построению, $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$.

Отметим, что определение немедленно влечёт, что $\min \mathbb{N} = 1$ (почему?). Натуральные числа обладают например таким свойством: сумма и произведение двух натуральных чисел — натуральное число, между двумя натуральными числами n и $n + 1$ нет натуральных чисел (см. Глава 1, §2b в [1]). Подробно эти свойства будут обсуждаться в курсе “Введение в дискретную математику и топологию”. Здесь же мы отметим, что доказательство этих свойств опирается на следующее следствие:

Следствие из определения (принцип математической индукции). Если $E \subseteq \mathbb{N}, 1 \in E$ и E — индуктивное множество, то $E = \mathbb{N}$.

Напомним, что множество называется линейно упорядоченным, если любые два его элемента сравнимы.

Определение. Назовём линейно упорядоченное множество вполне упорядоченным, если в каждом его непустом подмножестве есть наименьший элемент.

Теорема. Множество $\mathbb{N}$ вполне упорядочено.

Доказательство. Пусть $A \subset \mathbb{N}$. Если $1 \in A$, то $\min A = 1$. Если $1 \notin A$, то $1 \in \mathbb{N} \setminus A$. Рассмотрим множество $B = \mathbb{N} \setminus A$. Покажем, что в B найдётся такой элемент n , что $1, 2, \dots, n \in$

$B, n + 1 \in A$. В самом деле, если такого n не существует, то множество B индуктивно и, следовательно, совпадает с $\mathbb{N}$. Но тогда $A = \mathbb{N} \setminus B = \emptyset$. Противоречие. Тогда n существует и значит $\min A = n + 1$. $\square$

Замечание. Множество $\mathbb{Q}$ не является вполне упорядоченным.

Теорема. *В любом непустом ограниченном сверху подмножестве $\mathbb{N}$ есть наибольший элемент.*

Доказательство. Пусть $E \subset \mathbb{N}$ — такое подмножество. Рассмотрим E как подмножество $\mathbb{R}$. По теореме о верхней грани существует $c = \sup E$. По определению точной верхней грани, в E найдётся число n такое, что $c - 1 < n \leq c$. Тогда $n = \max E$. В самом деле: прибавляя 1 к обеим частям неравенства, получаем $n \leq c < n + 1$ (воспользовались следствиями из аксиом упорядоченного поля). Значит, $n + 1 \notin E$. Как мы отмечали выше, между двумя последующими натуральными числами нет натуральных чисел. Тогда n — наибольшее число из E . $\square$

Следствие. *Множество натуральных чисел не ограничено сверху.*

Доказательство. Иначе существовало бы наибольшее натуральное число n . Но $n < n + 1$. $\square$.

Корректно определив $\mathbb{N}$, мы теперь сможем определить $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$. В первом случае это натуральные числа, 0, и противоположные к натуральным, во втором случае добавим к $\mathbb{Z}$ ещё все обратные числа (кроме нуля) к числам из $\mathbb{Z}$ и добавим все произведения обратных на натуральные.

Следствие. *В любом непустом ограниченном снизу (сверху) подмножестве $\mathbb{Z}$ есть наименьший (наибольший) элемент.*

Доказательство. Аналогично теореме о наибольшем элементе непустого ограниченного сверху подмножества $\mathbb{N}$. $\square$.

Лекция 4

Аксиома Архимеда уточнённая (принцип Архимеда). Для любого $h > 0$ и для любого $a \in \mathbb{R}$ найдется такое $n \in \mathbb{Z}$, что справедливы неравенства $(n-1)h \leq a < nh$.

Доказательство. Рассмотрим множество $E = \{n \in \mathbb{Z} : a/h < n\}$. Оно ограничено снизу. Оно не пусто. В самом деле, если $a > 0$, то не пусто по аксиоме Архимеда. Если $a < 0$, то оно не пусто так как содержит ноль. Если $a = 0$, то $E = \mathbb{N}$. Пусть $m = \min E$ (такой элемент обязательно есть по следствию об ограниченном снизу подмножестве $\mathbb{Z}$). Тогда $m-1 \leq a/h < m$. $\square$

Вот несколько следствий из принципа Архимеда.

Следствие 1. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $n^{-1} < \varepsilon$, т.е. $n^{-1} \in (0, \varepsilon)$.

Доказательство. Применим принцип Архимеда к $a = 1, h = \varepsilon$. Тогда найдется n такое, что $1 < \varepsilon n$, отсюда $0 < 1/n < \varepsilon$. $\square$

Следствие 2. Между двумя любыми вещественными числами есть рациональное число, т.е. для любых $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ существует такое $r \in \mathbb{Q}$, что $a < r < b$.

Доказательство. Пусть $a, b \in \mathbb{R}, b > a$. Выберем m так, чтобы $0 < h := m^{-1} < \varepsilon := b - a$. Найдется такое $n \in \mathbb{Z}$ (почему?), что

$$\frac{n-1}{m} \leq a < \frac{n}{m}.$$

Теперь $\frac{n}{m} < b$, иначе получилось бы, что $\frac{n-1}{m} \leq a < b \leq \frac{n}{m}$, а это противоречит $0 < 1/m < b - a$. Таким образом, $r = n/m$ — искомое рациональное число. $\square$

Следствие 3. Для любого $x \in \mathbb{R}$ существует $k \in \mathbb{Z}$ такое, что $k \leq x < k+1$.

Непосредственно следует из принципа Архимеда. Число k называется целой частью, число $x - k$ называется дробной частью.

Последовательности

Определение. Последовательность — функция натурального аргумента, т.е. $f: \mathbb{N} \rightarrow X$, где X — некоторое множество.

Обозначение. Когда говорят о последовательностях, то аргумент обычно пишут не в скобках, а в виде индекса: x_n . Часто саму последовательность обозначают таким образом $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Рассмотрим два вида последовательностей: последовательности вещественных чисел и последовательности множеств.

(i) Последовательности вещественных чисел: $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

(ii) Последовательности множеств: $A: \mathbb{N} \rightarrow 2^X$ (здесь 2^X — обозначение множества всех подмножеств множества X). Будем также говорить, что A_n — последовательность вложенных множеств, если $\forall k \in \mathbb{N}: A_k \supset A_{k+1}$.

Определение. Будем говорить, что последовательность вещественных чисел x_n , стремится или сходится к нулю, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n > N: |x_n| < \varepsilon.$$

Обозначение. $x_n \rightarrow 0$

Примеры. $x_n = 0$, $x_n = 1/n$, $x_n = q^n$, где $|q| < 1$.

Теорема о вложенных отрезках. В $\mathbb{R}$ любая последовательность вложенных отрезков $\Delta_n = [a_n, b_n]$ имеет непустое пересечение. Если их длины $b_n - a_n$ стремятся к нулю, то это пересечение $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ состоит из единственной точки.

Доказательство. Рассмотрим два множества: множество A , состоящее из точек a_n (левых концов отрезков) и множество B , состоящее из точек b_n (правых концов отрезков). Заметим, что какое-то из этих множеств вполне может оказаться конечным. Множества A и B удовлетворяют условиям аксиомы непрерывности (они не пустые и каждое a_m не превосходит каждого b_n), поэтому существует число c : $a_m \leq c \leq b_n$ при всех $m, n \in \mathbb{N}$. Отсюда следует искомое включение $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n$. Единственность точки c следует из $b_n - a_n \rightarrow 0$. Если бы было две такие различные точки $c_1 < c_2$, то из неравенств $a_n \leq c_1 < c_2 \leq b_n$ следовало бы неравенство $b_n - a_n > c_2 - c_1 > 0$, которое противоречит $b_n - a_n \rightarrow 0$. $\square$

Замечание. Последовательность вложенных интервалов не обязательно имеет общую точку. Например, пересечение вложенных интервалов

$$(0, 1) \supset (0, 1/2) \supset (0, 1/3) \supset \dots \supset (0, 1/n) \supset \dots$$

является пустым множеством.

Открытые и замкнутые множества

Определение. Окрестностью точки называется любой интервал, содержащий эту точку. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда ε -окрестность точки x_0 — это интервал $U_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

Заметим, что пересечение двух окрестностей точки x также является окрестностью этой точки.

Определение. Множество U называется открытым, если для любой точки $x \in U$ существует окрестность точки x целиком лежащая в U . Точка $x \in U$ называется внутренней точкой множества U , если найдётся окрестность U' точки x , целиком лежащая в U . Таким образом, множество U открытое, если все его точки являются внутренними.

Определение. Пусть дано множество $A \subset \mathbb{R}$. Точка $x \in \mathbb{R}$ называется предельной точкой A , если в любой окрестности точки x найдется $y \in A$: $y \neq x$. Множество называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки.

Эквивалентно можно сказать, что точка $x \in \mathbb{R}$ называется предельной точкой множества A , если в любой окрестности точки x найдется бесконечное множество точек из A . Действительно, пусть в любой окрестности точки x найдется $y \in A$: $y \neq x$. Возьмём какую-то окрестность U' точки x , зафиксируем $y' \in A \cap U'$, $y' \neq x$, потом возьмём окрестность $U'' \subset U'$ точки x , не содержащую точку y' (почему так можно сделать?), в U'' по предположению есть точка $y'' \in A \cap U''$, $y'' \neq x$. По такой схеме мы найдём бесконечное множество точек, принадлежащих $A \cap U'$.

Примеры: $\emptyset, \mathbb{R}$ одновременно и замкнутые, и открытые; $[a, b], [a, \infty), \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ — замкнутые множества, $(a, b), (-\infty, b)$ — открытые множества. Промежутки $[a, b)$ и $(a, b]$ не замкнуты и не открыты.

Теорема. Пусть A — открытое множество, B — замкнутое множество. Тогда

- 1) $A \setminus B$ — открытое множество.
- 2) $B \setminus A$ — замкнутое множество.

На самом деле верно следующее следствие, которое часто используется в определении открытого и замкнутого множества в курсе топологии.

Следствие. Пусть A — открытое множество, тогда $\mathbb{R} \setminus A$ — замкнутое. Пусть B — замкнутое множество, тогда $\mathbb{R} \setminus B$ — открытое.

Иными словами, замкнутое множество — это дополнение до открытого и наоборот.

Упражнение. Докажите это следствие.

Утверждение. Объединение любого набора открытых множеств — открытое множество. Пересечение конечного набора открытых множеств — открытое множество. Объединение конечного набора замкнутых множеств — замкнутое множество. Пересечение любого набора замкнутых множеств — замкнутое множество.

Упражнение. Докажите это утверждение.

Пример. $\bigcap_{n=1}^{\infty} (-n^{-1}, n^{-1}) = \{0\}$, т.е. пересечение счётного набора открытых множеств не обязательно открытое множество.

Лекция 5

Прошлую лекцию мы закончили утверждением про пересечение и объединение открытых множеств. На самом деле верно следующее.

Утверждение. *Каждое непустое открытое множество на $\mathbb{R}$ является объединением не более чем счётного набора непересекающихся открытых промежутков.*

Доказательство. Пусть U — открыто в $\mathbb{R}$. Для каждого $x \in U$ построим максимальный по включению открытый промежуток $I_x \subset U$, содержащий x . Положим

$$A := \{y \in \mathbb{R} : (y, x) \subset U\}, \quad B := \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \subset U\}.$$

Определим

$$a := \inf A \in [-\infty, x), \quad b := \sup B \in (x, +\infty].$$

Тогда множество

$$I_x := (a, b)$$

является открытым (возможно с бесконечными концами) и содержится в U . Действительно, для любого $t \in (a, b)$ интервал между x и t лежит в U по определению a, b , значит $t \in U$. По построению I_x — наибольший (по включению) открытый интервал, содержащий x и лежащий в U (почему?).

Покажем, что разные такие интервалы либо совпадают, либо не пересекаются. Пусть I_x и I_y такие интервалы и $I_x \cap I_y \neq \emptyset$. Тогда любая общая точка z принадлежит и I_x , и I_y . По максимальной I_x и I_y они оба совпадают с I_z , поэтому $I_x = I_y$. Значит, множества $\{I_x : x \in U\}$ разбивают U на попарно непересекающиеся компоненты, и

$$U = \bigcup_{x \in U} I_x,$$

причём объединение можно переписать по множеству различных (неповторяющихся) интервалов-компонент.

Осталось показать, что число различных компонент не более счётно. Используем Следствие 2 из прошлой лекции: в каждом непустом открытом интервале (a, b) содержится хотя бы одно рациональное число $q \in \mathbb{Q}$: $a < q < b$. Пусть $\mathcal{I}$ — множество всех различных компонент (открытых промежутков). Тогда определим отображение

$$\Phi : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{Q}, \quad \Phi((a, b)) = \text{фиксированное рациональное число } q \in (a, b).$$

Это отображение инъективно: разные попарно непересекающиеся интервалы не могут содержать одно и то же рациональное число. Следовательно, существует инъекция из $\mathcal{I}$ в счётное множество $\mathbb{Q}$, значит, $\mathcal{I}$ не более чем счётно. (Если $I \in \mathcal{I}$ имеет вид $(-\infty, b)$, $(a, +\infty)$ или $(-\infty, +\infty)$, то и в этих случаях внутри найдётся рациональное число.)

Таким образом, U является объединением не более чем счётного семейства попарно непересекающихся открытых интервалов. $\square$

На прошлой лекции мы также говорили о предельных точках. Можно задаться вопросом *у всякого ли подмножества $\mathbb{R}$ есть предельная точка?* Ответ на этот вопрос даёт следующая лемма

Лемма (о предельной точке). *Всякое ограниченное бесконечное подмножество $\mathbb{R}$ имеет по крайней мере одну предельную точку.*

Доказательство. Дано ограниченное бесконечное множество E . Пусть отрезок $[a_1, b_1]$, $b_1 > a_1$ содержит E . Разделим отрезок $[a_1, b_1]$ пополам точкой $(a_1 + b_1)/2$ на два отрезка: $L_1 = [a_1, (a_1 + b_1)/2]$ и $R_1 = [(a_1 + b_1)/2, b_1]$. По крайней мере одно из множеств $L_1 \cap E$ или $R_1 \cap E$

содержит бесконечное множество точек. Пусть например, это будет множество $R_1 \cap E$. Обозначим отрезок R_1 через $[a_2, b_2]$. Разделим его пополам на отрезки L_2 и R_2 , снова по крайней мере одно из множеств $L_2 \cap E$ или $R_2 \cap E$ содержит бесконечное множество точек, выберем его и т.д. Мы получим последовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, длины этих отрезков равны $(b_n - a_n) = (b_1 - a_1)2^{-n+1} \rightarrow 0$. Итак, пересечение всех этих отрезков состоит из единственной точки c . Это есть предельная точка множества E : любая окрестность точки c содержит все отрезки $[a_n, b_n]$ с достаточно большими номерами (почему?), на каждом таком отрезке есть бесконечное количество точек множества E . $\square$

Обозначим через A' множество предельных точек множества A . Заметим, что в общем случае не верны включения $A' \subset A$, $A \subset A'$ (почему?).

Дадим ещё пару определений.

Определение. Точки множества, не являющиеся предельными, называются *изолированными*. *Изолированная точка* A — точка, в некоторой окрестности которой кроме неё нет других точек из A .

Определение. *Замыкание множества A есть объединение A с множеством его предельных точек A' .*

Обозначение. Замыкание будем обозначать символом $\bar{A}$, т.е. $\bar{A} = A \cup A'$.

Рассмотрим основные свойства множества предельных точек и замыкания множества.

Утверждение 1. *Множество A' предельных точек множества A замкнуто.*

Доказательство. В самом деле, пусть A' — множество предельных точек множества A . Пусть x — предельная точка множества A' . Тогда в любой окрестности $U(x)$ точки x лежит точка $y \in A'$, предельная точка множества A . Возьмём окрестность $U(y)$ точки y , целиком лежащую в $U(x)$ и не содержащую x . По определению предельной точки там лежит точка $z \in A$. Эта точка лежит в $U(x)$ и не совпадает с x . Мы доказали, что в любой окрестности точки x (предельной для A') лежит точка $z \neq x$, $z \in A$. Значит, $x \in A'$. Итак, каждая предельная точка множества A' ему принадлежит, множество A' замкнуто. $\square$

Утверждение 2. *Множество $\bar{A}$ замкнуто.*

Доказательство. Предельная точка множества $A \cup B$ — либо предельная точка для A , либо для B , либо для обоих множеств (если не так, то она не предельная для A и для B , поэтому и для $A \cup B$). Поэтому предельная точка для $\bar{A} = A \cup A'$ — это либо предельная точка x для A , тогда $x \in A'$, либо $x \in (A')'$, тогда $x \in A'$ по утверждению 1. В обоих случаях она принадлежит $\bar{A}$. Значит, $\bar{A}$ замкнуто. $\square$

Лекция 6

Связные множества

Определение. Подмножество $A \subset \mathbb{R}$ называется связным, если не существует таких открытых непересекающихся множеств U и V в $\mathbb{R}$, что $A \cap U \neq \emptyset$ и $A \cap V \neq \emptyset$ и $A \subseteq U \cup V$.

Примеры. $\mathbb{R}$, $(-\pi, \pi)$ связные, множество $(0, 1) \cup (1, 2)$ не связно.

Всюду плотные и нигде не плотные множества

Определение. Подмножество A некоторого множества $X \subset \mathbb{R}$ называется всюду плотным в X , если всякая окрестность любой точки x из X содержит элемент из A . Подмножество A некоторого множества $X \subset \mathbb{R}$ называется нигде не плотным в X , если для любого интервала $U \subset \mathbb{R}$, имеющего непустое пересечение с X , найдётся интервал $V \subset U$, также имеющий непустое пересечение с X , такой, что $A \cap V = \emptyset$.

Примеры.

1. Множества рациональных и иррациональных чисел всюду плотны в $\mathbb{R}$.
2. Существует множество обладающее следующими свойствами: дополнение к нему всюду плотно, само оно нигде не плотно.
3. Бывают также замкнутые нигде не плотные множества и открытые всюду плотные множества. Не бывает открытых нигде не плотных множеств.
4. Дополнение к открытому всюду плотному множеству нигде не плотно.

Множество из примера 2 – это *Канторово множество*. Рассмотрим его подробнее.

Канторво множество

Важную роль в разнообразных конструкциях играют множества, которые называют канторовыми множествами. Опишем их общую конструкцию. Возьмём отрезок Δ_1 и выберем интервал U_1 , так, чтобы его концы не совпадали с концами отрезка Δ_1 . Множество $\Delta_1 \setminus U_1$ — это два отрезка, Δ_2 и Δ_3 . Затем на каждом из этих отрезков выберем по интервалу $U_2 \subset \Delta_2$ и $U_3 \subset \Delta_3$ так, чтобы их концы не совпадали с концами отрезков Δ_3 и Δ_1 . Множество $\Delta_1 \setminus (U_1 \cup U_2 \cup U_3)$ — объединение четырёх непересекающихся отрезков $\Delta_4, \dots, \Delta_7$. Снова на каждом из них выберем по интервалу U_k и так далее. Предположим ещё, что мы так будем выбирать интервалы, что длины оставшихся отрезков будут стремиться к нулю. В результате получится последовательность непересекающихся интервалов U_k , их объединение — открытое множество U . Множество $\Delta_1 \setminus U_1$ — замкнутое. Оно содержит концы всех отрезков, мы их ни на каком шаге не выбросим. Эти концы отрезков образуют счётное множество. Кроме того, $\Delta_1 \setminus U_1$ содержит ещё континуальное множество точек. Проведя эту процедуру бесконечное число раз (как описать строго?), мы получим некоторое множество. Это и есть *канторово множество*. Самым знаменитым канторовым множеством является случай, когда $\Delta_1 = [0, 1]$, а в качестве каждого интервала берётся «средняя треть». Часто именно это множество называется канторовым, на английском языке оно называется *Middle Third Cantor Set*.

Теорема Бэра о категориях

Начнем с определения.

Определение. Пусть дано множество A и дана система множеств U_α , причём $A \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$. Тогда говорят, что система этих множеств образует покрытие множества A . Более подробно $\forall x \in A \exists U_\alpha : x \in U_\alpha$.

Теорема Бэра о категориях. Отрезок не может быть покрыт объединением счётного числа нигде не плотных множеств.

Доказательство. Пусть $[0, 1] \subset \cup_{n=1}^{\infty} U_n$, где все множества U_n нигде не плотны в $\mathbb{R}$. Тогда выберем отрезок $\Delta_1 \subset [0, 1]$, на котором нет точек из U_1 , потом выберем отрезок $\Delta_2 \subset \Delta_1$, на котором нет точек из U_2 и так далее. Как это сделать? В определении нигде не плотного множества стоят интервалы, поэтому будем выбирать интервалы, в которых нет точек из U_n , брать их пересечения с $[0, 1]$, а потом в каждом из них выберем отрезок, чуть поменьше. Последовательность вложенных отрезков Δ_n имеет общую точку, эта точка не принадлежит ни одному из множеств U_n , следовательно предположение $[0, 1] \subset \cup_{n=1}^{\infty} U_n$ не верное. $\square$.

Определение. Множества, которые могут быть покрыты объединением счётного числа нигде не плотных множеств, называются множествами 1-й категории по Бэру, или тонкими множествами. Остальные множества — множества 2-й категории, или тучными.

Таким образом, мы доказали, что отрезок — множество второй категории по Бэру.

Компактные множества (компакты)

Нам понадобятся следующие определения.

Определение. Любое подмножество покрытия, если оно также является покрытием, называется подпокрытием. Покрытие называют открытым, если все множества U_α открыты. Покрытие называют конечным, если оно содержит конечное множество множеств U_α .

Докажем следующую фундаментальную лемму.

Лемма Гейне-Бореля. Любое открытое покрытие $\cup_\alpha U_\alpha$ отрезка Δ имеет конечное подпокрытие.

Доказательство. Пусть отрезок $\Delta_1 = [a_1, b_1]$, $b_1 > a_1$ покрыт бесконечной системой открытых множеств U_α . Пусть у этой системы не существует конечного подпокрытия, т.е. нельзя выбрать конечный набор $U_k, k = 1, 2, \dots, N$ открытых множеств, также покрывающее отрезок Δ_1 . Разделим отрезок $[a_1, b_1]$ пополам точкой $(a_1 + b_1)/2$ на два отрезка: $L_1 = [a_1, (a_1 + b_1)/2]$ и $R_1 = [(a_1 + b_1)/2, b_1]$. По крайней мере для одного из отрезков L_1 или R_1 не существует конечного подпокрытия из изначального покрытия. Пусть, например, это R_1 . Обозначим отрезок R_1 через $[a_2, b_2]$. Разделим его пополам на отрезки L_2 и R_2 , снова для одного из отрезков L_2 или R_2 не существует конечного подпокрытия из изначального покрытия. Выберем его и повторим эту процедуру. Мы получим последовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, длины этих отрезков равны $(b_n - a_n) = (b_1 - a_1)2^{-n+1} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Эти отрезки строились так, чтобы ни один из них не мог быть покрыт конечным набором множеств из изначального покрытия. По лемме о вложенных отрезках пересечение всех этих отрезков состоит из единственной точки s . Эта точка s принадлежит какому-то открытому множеству U из изначального покрытия. Вместе с точкой s открытое множество U содержит и некоторую окрестность точки s . Теперь, при достаточно больших n отрезки $[a_n, b_n]$ все покрыты одним единственным открытым множеством U из покрытия. Полученное противоречие доказывает лемму Гейне-Бореля. $\square$

Определение. Подмножество $A \subset \mathbb{R}$ называется компактным (или компактом), если из любого его открытого покрытия можно извлечь конечное подпокрытие.

Таким образом, мы доказали, что отрезок компактен. На самом деле, любой компакт на прямой — обязательно ограниченное замкнутое множество. Это будет доказано позднее.

Лекция 7

Предел последовательности

Определение. Число A называется пределом последовательности $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, если для любой окрестности точки A все элементы $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ с достаточно большими номерами n лежат в этой окрестности.

Обозначение. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$. Также часто пишут $x_n \rightarrow A$ при $n \rightarrow \infty$.

На языке кванторов: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : |x_n - A| < \varepsilon$.

Определение. Будем говорить, что последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к $+\infty$, если $\forall C \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : x_n > C$. Аналогично определяется сходимость к $-\infty$: $x_n \rightarrow -\infty$ при $n \rightarrow \infty \Leftrightarrow \forall C \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : x_n < C$.

Заметим, что натуральное число N зависит от числа ε и от самой последовательности.

Последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ может не сходиться ни к какому числу A . На языке кванторов это означает

$$\forall A \exists \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n > N : |x_n - A| > \varepsilon$$

Определение. Последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ называется сходящейся, если её предел равен какому-то числу. В остальных случаях последовательность называется расходящейся. Причём в случае расходящейся последовательности есть дихотомия: либо такого числа, к которому последовательность сходилась бы, не существует, либо предел последовательности равен $\pm\infty$.

Утверждение. Всякая сходящаяся последовательность ограничена.

Доказательство. Пусть $x_n \rightarrow A$ при $n \rightarrow \infty$. Выберем $\varepsilon = 1$, построим по этому ε число N по определению сходимости. Теперь все элементы последовательности с номерами больше N лежат в 1-окрестности точки A , конечное множество точек $\{x_1, \dots, x_N\}$ ограничено, значит, вся последовательность ограничена. $\square$

Утверждение. Если последовательность сходится, то её предел единственный.

Доказательство. В самом деле, пусть у последовательности $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ есть 2 разных предела, A и B . Без потери общности пусть, например, $A < B$. Положим $\varepsilon = (B - A)/3$ и рассмотрим ε -окрестности $U_\varepsilon(A)$ и $U_\varepsilon(B)$ точек A и B . По построению, эти окрестности не пересекаются. По определению предела вне окрестности $U_\varepsilon(A)$ лежит лишь конечное множество элементов последовательности. В частности в окрестности $U_\varepsilon(B)$ лежит конечное число элементов последовательности. Тогда B — не предел. $\square$

Теорема. Пусть заданы последовательности $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, причём $x_n \geq y_n$ при каждом $n \in \mathbb{N}$. Пусть обе последовательности сходятся: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$. Тогда $A \geq B$.

Доказательство. Пусть это не так. Тогда $B > A$. Положим $\varepsilon = (B - A)/3$ и рассмотрим ε -окрестности точек A и B . По построению, эти окрестности не пересекаются, причём все точки из окрестности $U_\varepsilon(B)$ строго больше (лежат правее) всех точек из окрестности $U_\varepsilon(A)$. Но $x_n \rightarrow A$, $y_n \rightarrow B$ при $n \rightarrow \infty$, поэтому при достаточно больших значениях n справедливы включения $x_n \in U_\varepsilon(A)$, $y_n \in U_\varepsilon(B)$ (опишите это в строгих математических терминах). Отсюда $x_n < y_n$ при достаточно больших n , что противоречит предположению теоремы. $\square$

Замечание 1. Для справедливости утверждения теоремы достаточно, чтобы неравенство $x_n \geq y_n$ было справедливо лишь для “достаточно больших значений” n .

Замечание 2. Если вместо $x_n \geq y_n$ справедливо строгое неравенство $x_n > y_n$, то отсюда также следует $A \geq B$ (из теоремы), но может не следовать $A > B$. Контрпример: $x_n = n^{-1}$, $y_n = -n^{-1}$. Здесь $x_n > y_n$, однако $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$.

Следующая теорема является одним из важнейших средств нахождения пределов.

Теорема о двух милиционерах. Пусть даны три последовательности, причём $x_n \leq y_n \leq z_n$ и пусть существуют пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A$. Тогда существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ и он также равен A .

Доказательство. Запишем определения $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : (|x_n - A| < \varepsilon) \wedge (|z_n - A| < \varepsilon).$$

Но тогда для этих ε и N имеем: $A - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < A + \varepsilon$. Это и означает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A$. $\square$

Арифметические операции с пределами

Пусть заданы последовательности x_n и y_n . Тогда определены также следующие последовательности

$$(\alpha x_n)_{n \in \mathbb{N}}, \text{ где } \alpha \in \mathbb{R}, \quad (x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad (x_n \cdot y_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad \left(\frac{x_n}{y_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Последняя последовательность определена, если $y_n \neq 0$.

Теорема. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$. Тогда

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha x_n = \alpha A, \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = A + B, \quad 3) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = AB,$$

и если $y_n, B \neq 0$, то 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{A}{B}$.

Следствие. Операция взятия предела линейна, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha A + \beta B$.

Доказательство. Докажем лишь 1) и 3) свойства.

1) По определению $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ имеем $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : |x_n - A| < \varepsilon$. Нужно показать, что $\forall \varepsilon_0 > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N} \forall n > N_0 : |\alpha x_n - \alpha A| < \varepsilon_0$. Если $\alpha = 0$, то утверждение очевидно. Пусть $\alpha \neq 0$. Выберем какое-то $\varepsilon_0 > 0$. Рассмотрим число $\varepsilon_0/|\alpha|$. Так как число ε было выбрано произвольно, возьмем в качестве него число $\varepsilon = \varepsilon_0/|\alpha|$ и построим по нему соответствующее число $N_0 = N(\varepsilon_0/|\alpha|)$. При всех $n > N_0$ будет справедливо неравенство $|x_n - A| < \varepsilon_0/|\alpha|$, эквивалентное $|\alpha x_n - \alpha A| < \varepsilon_0$.

3) Имеем $\forall \varepsilon > 0 \exists N_1 \in \mathbb{N} \forall n > N_1 : |x_n - A| < \varepsilon$ и $\forall \varepsilon > 0 \exists N_2 \in \mathbb{N} \forall n > N_2 : |y_n - B| < \varepsilon$. Т.к. обе последовательности сходятся, то они ограничены и значит найдется такое $C > 0$, что $|x_n|, |y_n| \leq C$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что также $|A|, |B| \leq C$. Выберем какое-то $\varepsilon_0 > 0$ и рассмотрим число $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{2C}$. Построим по нему соответствующие числа $N_1 \left(\frac{\varepsilon_0}{2C} \right)$ и $N_2 \left(\frac{\varepsilon_0}{2C} \right)$. Положим $N_0 = \max\{N_1, N_2\}$. Заметим, что при $n > N_0$ верно, что $|x_n - A| < \frac{\varepsilon_0}{2C}$ и

$|y_n - B| < \frac{\varepsilon_0}{2C}$. Тогда

$$\begin{aligned} |x_n y_n - AB| &= |x_n y_n - A y_n + A y_n - AB| \leq |x_n y_n - A y_n| + |A y_n - AB| = \\ &= |y_n| |x_n - A| + |A| |y_n - B| \leq C |x_n - A| + C |y_n - B| < \frac{C \varepsilon_0}{2C} + \frac{C \varepsilon_0}{2C} < \varepsilon_0. \end{aligned}$$

Таким образом, $|x_n y_n - AB| < \varepsilon_0$ при $n > N_0$. $\square$

Упражнение. Докажите свойства 2) и 4).

Лекция 8

Подпоследовательности

Определение. Последовательность строго возрастает, если $x_{n+1} > x_n$ при $n \in \mathbb{N}$.

Пусть у нас есть последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Предположим, задана строго возрастающая последовательность натуральных чисел $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Тогда можно рассмотреть композицию отображений $k \mapsto n_k$ и $n \mapsto x_n$, ставящую в соответствие каждому натуральному числу k элемент последовательности $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Такая последовательность называется *подпоследовательностью* последовательности $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Выбирая различные n_k : получаем различные подпоследовательности $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$.

Теорема. Если последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ сходится, то и каждая подпоследовательность $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ сходится, причём к тому же самому пределу.

Доказательство. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ сходится, значит, $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : |x_n - A| < \varepsilon$. В частности, для $n_k > N$ верно, что $|x_{n_k} - A| < \varepsilon$. Тогда берём $K = \min\{k : n_k > N\}$. Имеем $\forall \varepsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N} : \forall k > K : |x_{n_k} - A| < \varepsilon$. $\square$

Теорема. Если подпоследовательность $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ содержит все элементы последовательности $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ кроме конечного подмножества, то из сходимости подпоследовательности следует сходимость самой последовательности.

Доказательство. Пусть $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \setminus \{x_{i_1}, \dots, x_{i_l}\}$. Последовательность $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ сходится, значит, $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall k > N : |x_{n_k} - A| < \varepsilon$. Возьмём $\tilde{N} = \max\{n_N, i_1, \dots, i_l\}$. Тогда для $n > \tilde{N}$ последовательности $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ и $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ совпадают как множества (т.к. мы рассматриваем номера членов последовательностей большие любого из $i_1, \dots, i_l$). Более того последовательность $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ сходится. Значит, $\forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{N} \in \mathbb{N} : \forall n > \tilde{N} : |x_n - A| < \varepsilon$, т.е. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ сходится. $\square$

Теорема (лемма Больцано-Вейерштрасса). Всякая ограниченная последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ имеет сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Так как элементов последовательности бесконечное (счётное) множество, то либо множество значений, которые принимают элементы последовательности, бесконечно, либо какое-то из значений последовательность принимает бесконечное количество раз (возможно, таких значений много). В этом случае можно выбрать постоянную подпоследовательность, которая, очевидно, сходится. Если же множество значений, которые принимают элементы последовательности, бесконечно, то воспользуемся теоремой о том, что каждое ограниченное бесконечное множество имеет по крайней мере одну предельную точку A . Эта предельная точка и есть искомый предел подпоследовательности. Для указания конкретной подпоследовательности, сходящейся к этой предельной точке A , надо положить $\varepsilon_1 = 1$, выбрать ε_1 -окрестность $U_{\varepsilon_1}(A)$, в ней найти элемент x_{n_1} (там лежит бесконечно много элементов последовательности), потом надо положить $\varepsilon_2 = 1/2$, выбрать меньшую ε_1 -окрестность $U_{\varepsilon_1}(A)$, в ней найти элемент x_{n_2} , проследив, чтобы было $n_2 > n_1$, и так далее. Полученная подпоследовательность $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ сходится к A . $\square$

Фундаментальные последовательности

Определение. Последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ называется *фундаментальной последовательностью* или *последовательностью Коши* если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m > N : |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Перечислим основные свойства фундаментальных последовательностей

Лемма 1. *Всякая фундаментальная последовательность ограничена.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon = 1$, по определению фундаментальности найдется такое N , что при $n, m > N$ расстояние между элементами последовательности меньше 1. Таким образом, все x_n , $n > N + 1$ лежат в 1-окрестности числа x_{N+1} . Теперь конечное множество $\{x_1, \dots, x_N\}$ ограничено, поэтому и вся последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ограничена. $\square$

Лемма 2. *Если подпоследовательность фундаментальной последовательности сходится к числу A , то сама последовательность сходится к A .*

Доказательство. Зададимся $\varepsilon > 0$. По числу $\varepsilon/2$ построим N из условия фундаментальности: при $n, m > N$ справедливо соотношение $|x_m - x_n| < \varepsilon/2$. По условию сходимости подпоследовательности $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ к пределу A , существует такое k_0 , что при всех $k > k_0$ справедливо соотношение $|A - x_{n_k}| < \varepsilon/2$. Теперь пусть число $k_1 > k_0$ такое, что $n_{k_1} > N$. Тогда $|A - x_{n_{k_1}}| < \varepsilon/2$ и при всех $n > k_1$ справедливы неравенства $|x_{n_{k_1}} - x_n| < \varepsilon/2$, следовательно, справедливо неравенство

$$|A - x_n| \leq |A - x_{n_{k_1}}| + |x_{n_{k_1}} - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \square$$

Теорема (критерий Коши). *Всякая фундаментальная последовательность сходится, всякая сходящаяся последовательность фундаментальна.*

Доказательство. В одну сторону доказательство простое. Пусть последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к A . Тогда для любого $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого N все элементы последовательности лежат в $\varepsilon/2$ -окрестности точки A . Это значит, что начиная с этого N расстояние между элементами последовательности меньше ε . Фундаментальность сходящейся последовательности доказана.

Пусть $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — фундаментальная последовательность. Тогда по лемме 1 последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ограничена. Теперь, по теореме Больцано-Вейерштрасса из неё можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$. По лемме 2 вся последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к тому же пределу. $\square$

Монотонные последовательности и теорема Вейерштрасса.

Определение. *Последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ монотонно возрастает, если $x_{n+1} \geq x_n$ при $n \in \mathbb{N}$, последовательность строго возрастает, если $x_{n+1} > x_n$ при $n \in \mathbb{N}$. Про монотонно возрастающую последовательность говорят “неубывающая последовательность”. Аналогично, последовательность монотонно убывает, если $x_{n+1} \leq x_n$ при $n \in \mathbb{N}$, последовательность строго убывает, если $x_{n+1} < x_n$ при $n \in \mathbb{N}$. Про монотонно убывающую последовательность говорят “невозрастающая последовательность”. Последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ называется монотонной, если она монотонно возрастает или монотонно убывает. Последовательность называется строго монотонной, если она строго монотонно возрастает или строго монотонно убывает.*

Теорема Вейерштрасса. *Ограниченная монотонная последовательность сходится. Более точно, невозрастающая ограниченная снизу последовательность сходится, неубывающая ограниченная сверху последовательность сходится.*

Доказательство. Докажем только одно утверждение, что неубывающая ограниченная сверху последовательность сходится. Случай ограниченной снизу последовательности аналогичен. Пусть $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — наша последовательность и пусть $x_{n+1} \geq x_n$. Множество значений этой последовательности ограничено сверху, значит, определено число $A = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Покажем,

что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Среди чисел $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ есть числа, для которых $x_n > A - \varepsilon$ (иначе число A не было бы точной верхней гранью чисел x_n). Пусть $x_N > A - \varepsilon$, тогда при всех $n > N$, во-первых, $x_n > A - \varepsilon$, во-вторых, $x_n \leq A$ (иначе A не было бы верхней границей для множества значений x_n). Из $x_n > A - \varepsilon$ и $x_n \leq A$ следует $|x_n - A| < \varepsilon$. $\square$

Также нам будет полезно следующее утверждение

Следствие из доказательства. *Всякая ограниченная возрастающая последовательность сходится к своей точной верхней грани, а всякая ограниченная убывающая последовательность сходится к своей точной нижней грани.*

Доказательство. Пусть $x_n \leq x_{n+1}$ и A — точная верхняя грань последовательности $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Пусть $\varepsilon > 0$. Найдется такое число N , что $x_N > A - \varepsilon$ (иначе A — не точная верхняя грань). Тогда $x_n > A - \varepsilon$ при всех $n \geq N$. Кроме того, $x_n \leq A$ при всех n . $\square$

Лекция 9

Частичные пределы.

Мотивация: разные подпоследовательности одной и той же последовательности могут сходиться к разным пределам (если последовательность не сходится). Пределы подпоследовательностей называются *частичными пределами*. Частичный предел — это величина, в любой окрестности которой находится бесконечное количество элементов последовательности. Частичные пределы называют также *предельными точками последовательности*. **Не путать с предельными точками множеств, в частности с предельными точками множества значений последовательности!**

Определение. Нижним пределом последовательности $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ называется называется предел $\lim_{n \rightarrow \infty} (\inf_{m \geq n} x_m)$. Он обозначается как $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ или $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$. Верхним пределом последовательности $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ называется называется предел $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{m \geq n} x_m)$. Он обозначается как $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ или $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Замечание. Не сложно понять, что из определения супремума множества следует, что последовательность $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ с $s_n = \sup_{m \geq n} x_m$ является невозрастающей, т.е. $s_{n+1} \leq s_n$, а из определения инфимума множества следует, что последовательность $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}$ с $i_n = \inf_{m \geq n} x_m$ является неубывающей $i_{n+1} \geq i_n$. Если последовательность $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ не ограничена снизу, то полагаем $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$. Если же последовательность $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}$ не ограничена сверху, то полагаем $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

Примеры. $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$,
 $\limsup_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = 1, \liminf_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = -1, \limsup_{n \rightarrow \infty} n = +\infty = \liminf_{n \rightarrow \infty} n$.

Очевидно также, что $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Упражнение. Докажите это очевидное утверждение.

Обсуждение верхних и нижних пределов не даром происходит в разделе про частичные пределы: они также являются частичными пределами. Более того верна следующая теорема.

Теорема. Нижний и верхний пределы ограниченной последовательности являются, соответственно, наименьшим и наибольшим из её частичных пределов.

Доказательство. Докажем только для $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ (доказательство для $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ аналогично). Рассмотрим последовательность $i_n = \inf_{m \geq n} x_m$. Она монотонно не убывает, т.е. $i_n \leq i_{n+1}$. Т.к. по предположению последовательность $(x_n)_n$ ограничена, то, в частности, она ограничена сверху и по теореме Вейерштрасса существует предел $i = \lim_{n \rightarrow \infty} i_n$. Для чисел $n \in \mathbb{N}$ по определению инфимума подберём такие числа $k_n \in \mathbb{N}$, что $k_n < k_{n+1}$ и

$$i_n \leq x_{k_n} < i_n + \frac{1}{n}.$$

Т.к. $\lim_{n \rightarrow \infty} i_n = i = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(i_n + \frac{1}{n}\right)$, то по теореме о двух милиционерах $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = i$, т.е. i — частичный предел последовательности $(x_n)_n$. Это наименьший частичный предел. Действительно,

$\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : i - \varepsilon < i_n$, т.е. $i - \varepsilon < \inf_{m \geq n} x_m \leq x_m$ для всякого $m \geq n$. Это означает, что ни один частичный предел не может быть меньше $i - \varepsilon$, т.е. для всякого частичного предела A верно, что $i - \varepsilon \leq A$ (получено переходом к пределу в неравенстве). Тогда беря супремум по всем $\varepsilon > 0$, получаем $i = \sup_{\varepsilon > 0} (i - \varepsilon) \leq A$, т.е. i — наименьший из частичных пределов. $\square$

Для того, чтобы понять что последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ расходится достаточно найти два различных частичных предела. Действительно, если бы наша последовательность сходилась, тогда всякая бы её подпоследовательность также сходилась, причём к тому же самому числу, т.е. все частичные пределы были бы равны между собой (и равны пределу последовательности). Однако, как понять что наша последовательность сходится (если это сложно сделать “в лоб”)? По идее, нам бы помогло рассмотрение *всех* частичных предел. Если бы мы убедились, что все они равны, то это было бы аргументом в пользу сходимости самой последовательности. Разумеется, такой подход на практике сложно реализуем. Поэтому крайне удобной будет следующая теорема, которая вскрывает важность верхнего и нижнего пределов.

Теорема. Последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ сходится тогда и только тогда, когда

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Доказательство. Если последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ сходится, то любая её подпоследовательность сходится причём к тому же числу. Т.е. все частичные пределы равны между собой и равны пределу $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, в частности равны пределу $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и частичные пределы $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Обратно. Рассмотрим последовательности $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ такие, что $i_n = \inf_{m \geq n} x_m, s_n = \sup_{m \geq n} x_m$. Имеем

$$i_n \leq x_n \leq s_n.$$

Применяя теорему о двух милиционерах получаем утверждение теоремы. $\square$

В заключении заметим также, что по следствию из доказательства теоремы Вейрштрасса (см. предыдущую лекцию) верно, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} = \inf_n (\sup_{m \geq n} x_m), \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} = \sup_n (\inf_{m \geq n} x_m).$$

Число e

Докажем, что существуют конечные пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

причём они равны друг другу. Это число есть основание натуральных логарифмов $e \approx 2,71828 \dots$. Более того,

$$(0.1) \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Доказательство. Обозначим

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Напомним **неравенство Бернулли**: для любого $x > -1$ и целого $k \geq 1$

$$(1+x)^k \geq 1+kx,$$

причём неравенство строгое, если $x \neq 0$ и $k \geq 2$.

(а) Монотонность.

1. *Последовательность (a_n) возрастает.*

Рассмотрим отношение

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right).$$

По неравенству Бернулли с $x = -\frac{1}{(n+1)^2}$ имеем

$$\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n > 1 - \frac{n}{(n+1)^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n^2 + n + 1}{(n+1)^2} \cdot \frac{n+2}{n+1}.$$

Поскольку

$$(n^2 + n + 1)(n+2) > (n+1)^3,$$

получаем $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, то есть $a_{n+1} > a_n$.

2. *Последовательность (b_n) убывает.*

Запишем

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} = \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2}.$$

Применяя неравенство Бернулли с $x = \frac{1}{n(n+2)} > 0$, получаем

$$\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1} \geq 1 + \frac{n+1}{n(n+2)}.$$

Тогда

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} \geq \left(1 + \frac{n+1}{n(n+2)}\right) \frac{n+1}{n+2} = \frac{n^2 + 3n + 1}{n(n+2)} \cdot \frac{n+1}{n+2}.$$

Но

$$(n^2 + 3n + 1)(n+1) = n^3 + 4n^2 + 4n + 1 > n^3 + 4n^2 + 4n = n(n+2)^2,$$

поэтому $\frac{b_n}{b_{n+1}} > 1$, то есть $b_n > b_{n+1}$.

(б) Совпадение пределов.

Поскольку a_n возрастает, b_n убывает и $a_n < b_n$ для всех n , обе последовательности ограничены и, следовательно, сходятся. Обозначим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = M.$$

Но $b_n = a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$, откуда

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = L \cdot 1 = L.$$

Таким образом, пределы совпадают. Обозначим их общее значение через e :

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

(с) Двойное неравенство.

Из монотонности и сходимости следует:

$$a_n < e \quad \text{для всех } n \quad (\text{так как } a_n \nearrow e),$$

$$b_n > e \quad \text{для всех } n \quad (\text{так как } b_n \searrow e).$$

Следовательно, для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \square$$

Числовые ряды

Важную роль играют последовательности, заданные в виде сумм элементов других последовательностей. Рассмотрим последовательность $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ и напомним “бесконечную сумму”:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := a_1 + a_2 + \dots + a_k + \dots$$

Это выражение называется числовым рядом или просто рядом. Однако, такое определение вряд ли можно считать строгим. Чтобы дать строгое определение ряда рассмотрим величину $S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Она называется n -ой *частичной суммой*.

Определение. (Числовым) рядом называется предел частичных сумм, т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, где a_n — элементы последовательности $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$.

Определение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *сходящимся*, если сходится последовательность частичных сумм, иными словами, если существует предел $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$. Этот предел S (если он существует) называется *суммой ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Если этот предел не существует, то ряд называется *расходящимся*, сумма ряда в этом случае не определена. Наконец, если предел равен $\pm\infty$, то ряд называется *расходящимся к $\pm\infty$ соответственно*.

Примеры. 1) *Телескопический ряд*: пусть дана последовательность $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$ называется *телескопическим*. Найдём его сумму

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} ((a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_{n+1} - a_n)) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) - a_1, \end{aligned}$$

где в последнем равенстве мы воспользовались тем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, если $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ сходится. Таким образом, телескопический ряд сходится тогда и только тогда, когда сходится образующая его последовательность $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2) *Геометрический ряд*: он определяется как предел *геометрической прогрессии*, т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n q^{k-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^n}{1 - q},$$

где $q \neq 1$. Если $|q| < 1$, то геометрический ряд сходится и его сумма равна $\frac{1}{1-q}$.

3) *Гармонический ряд*: он определяется следующим образом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Частичная сумма гармонического ряда имеет специальное обозначение H_n и называется *гармоническим числом*. Покажем, что гармонический ряд является расходящимся (к $+\infty$). Для этого используем неравенство, которое вытекает из неравенства (0.1):

$$(0.2) \quad \frac{1}{n+1} < \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) < \frac{1}{n}.$$

(В этом неравенстве и при его выводе фигурирует пока не очень понятная функция $\ln$. Пока что мы будем понимать её в “школьном смысле”, т.е. все свойства логарифма считаем известными. В начале второго модуля мы строго обоснуем все эти свойства. Никаких логических циклов у нас при этом не возникнет.)

Это неравенство даёт:

$$\begin{aligned} \ln 2 - \ln 1 &< 1, \\ \ln 3 - \ln 2 &< \frac{1}{2}, \\ &\dots \\ \ln(n+1) - \ln n &< \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Складывая, получим:

$$(0.3) \quad \ln(n+1) < H_n.$$

Рассмотрим последовательность, чей n -ый член имеет вид $x_n = H_n - \ln n$. Мы утверждаем, что эта последовательность сходится. Действительно, $x_n > \frac{1}{n+1}$, как это следует из неравенств (0.2) и (0.3). Значит, последовательность $(x_n)_n$ ограничена снизу нулём. С другой стороны, $x_n - x_{n+1} = -\frac{1}{n+1} + \ln(n+1) - \ln n = \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n+1} > 0$, как это следует из неравенства (0.2). Значит, $(x_n)_n$ монотонно убывает. Тогда по теореме Вейерштрасса существует предел $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} (H_n - \ln n)$. Этот предел называется *постоянной Эйлера-Маскерони*.

Её численное значение примерно равно 0,577216. Это одна из замечательных констант в математике. Таким образом, $\lim_{n \rightarrow \infty} (H_n - \ln n - \gamma) = 0$. Перепишем это так

$$H_n - \ln n - \gamma = \varepsilon_n,$$

где $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда

$$H_n = \ln n + \gamma + \varepsilon_n.$$

Тогда переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим, что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} H_n = +\infty$, т.к. $\ln n$ не ограничен сверху.

Лекция 10

Сейчас мы займёмся общими вопросами сходимости рядов.

Теорема. *Сходимость ряда не зависит от выбрасывания (добавления) конечного множества начальных слагаемых, т.е.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сходится} \Leftrightarrow \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \text{ сходится.}$$

Доказательство. Пусть $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ и $\tilde{S}_n = \sum_{k=m+1}^{n+m} a_k$. Заметим, что $\tilde{S}_n = S_{n+m} - S_m$. Утверждение следует т.к. $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+m}$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{S}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - S_m$ $\square$

Замечание. Выбрасывание конечного множества начальных слагаемых меняет сумму ряда!

Теорема (необходимое условие сходимости ряда). *Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то последовательность $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ инфинитезимальна, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.*

Доказательство. Заметим, что $a_n = S_n - S_{n-1}$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = 0. \square$$

Замечание. Как показывает пример гармонического ряда, обратное к предыдущей теореме утверждение не верно.

Непосредственно из предыдущей теоремы получаем

Следствие (признак расходимости ряда). *Пусть последовательность $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ не инфинитезимальна, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.*

Примеры. (i) Ряды $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ расходятся.

(ii) Рассмотрим p -ряд или ряд Дирихле: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$. При $p \leq 0$ имеем $\frac{1}{n^p} \nrightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, тогда по признаку расходимости, ряд расходится.

Следующий критерий нужен для доказательства почти всех теорем о рядах, всех признаков сходимости и расходимости. Непосредственно к исследованию конкретных рядов критерий Коши, как правило, не применяется. Это просто перефразировка теоремы “последовательность сходится, если и только если она фундаментальна” для последовательности частичных сумм ряда.

Теорема (критерий Коши). *Для того, чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходил, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall m > 0, n > N \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Достаточно заметить, $|S_{n+m} - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k \right|$ и воспользоваться критерием Коши для последовательности $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$. $\square$

Следствие. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Доказательство. Применим дважды критерий Коши в разные стороны. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится, то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall m > 0, n > N \sum_{k=n+1}^{n+m} |a_k| < \varepsilon.$$

Поэтому, $\forall \varepsilon > 0$ можно взять то же самое N : $\forall m > 0, n > N$ справедливо $\left| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k \right| \leq$

$\sum_{k=n+1}^{n+m} |a_k| < \varepsilon$. Отсюда следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. $\square$

Определение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится. Ряд сходится условно, если он сходится, но не сходится абсолютно.

Следствие произносится теперь по-другому: *абсолютно сходящийся ряд сходится*. Заметим также, что если ряд сходится условно, то оба ряда, составленные из его членов одного знака, расходятся. Если бы ровно один из этих рядов сходил, то весь ряд бы расходился; если бы сходились оба, исходный ряд сходил бы абсолютно.

Примеры. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ сходится абсолютно; мы скоро покажем, что *знакопеременный гармонический ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ сходится условно; ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ не сходится ни абсолютно, ни условно (он расходится).

Теорема. Гармонический ряд расходится.

Доказательство. Воспользуемся критерием Коши. Положим $m = n$, тогда для каждого натурального n справедлива оценка

$$\left| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \right| = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

По критерию Коши гармонический ряд расходится. $\square$

Наконец, отметим такое свойство сходящихся рядов

Теорема (о линейной комбинации сходящихся рядов). Пусть ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся. Тогда для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ тоже сходится.

Доказательство. Достаточно воспользоваться линейностью предела, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

и взять в качестве $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ последовательности частичных сумм для рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ соответственно. $\square$

Ряды с положительными (неотрицательными) членами

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n \geq 0$. Заметим что последовательность его частичных сумм $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ является неубывающей. Тогда верна следующая теорема

Теорема. Для сходимости ряда с неотрицательными (положительными) членами необходимо и достаточно, чтобы последовательность частичных сумм была ограничена.

Доказательство. Последовательность частичных сумм ряда с неотрицательными членами не убывает. Поэтому, если эта последовательность ограничена, то она сходится по теореме Вейерштрасса. Обратно, если эта последовательность сходится, то она ограничена. $\square$

Замечание. (i) Сумма сходящегося ряда с положительными членами совпадает с точной верхней гранью частичных сумм.

(ii) Для ряда с неотрицательными (положительными) членами верна дихотомия: либо он сходится, либо он расходится к $+\infty$.

Признаки сходимости рядов

Теорема (признак сравнения). Пусть даны два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n, a_n, b_n \geq 0$. Пусть при некотором $C > 0$ для всех n справедливо неравенство $a_n \leq C b_n$. Тогда из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ вытекает сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ вытекает расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Доказательство. Пусть S_n — частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а $\tilde{S}_n$ — частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Имеем $0 \leq S_n \leq C \tilde{S}_n$ для всех n . Тогда если последовательность $(\tilde{S}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ сходится, то сходится и последовательность $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (см. теорему о сходимости ряда с неотрицательными членами из предыдущего раздела). Наоборот, если последовательность $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ расходится, то расходится и последовательность $(\tilde{S}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. $\square$

Замечание. (i) Как всегда, в условиях теоремы достаточно чтобы неравенство $a_n \leq C b_n$ выполнялось начиная с некоторого N .

(ii) В условиях теоремы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *минорирующим рядом*, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ называется *мажорирующим рядом*.

Теорема (предельный признак сравнения). Пусть даны два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ с положительными членами и пусть существует конечный положительный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = C > 0.$$

Тогда ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся и расходятся одновременно.

Доказательство. В силу условия при достаточно больших n выполнены неравенства $\frac{1}{2}Cb_n \leq a_n \leq \frac{5}{2}Cb_n$. $\square$

Следующая теорема — весьма практичный метод исследования сходимости рядов с положительными членами.

Теорема (конденсационный признак Коши). Пусть последовательность $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $a_n > 0$ монотонна и убывает к нулю. Тогда ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$$

сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Запишем неравенства

$$\begin{aligned} a_2 &\leq a_2 \leq a_1, \\ 2a_4 &\leq a_3 + a_4 \leq 2a_2, \\ 4a_8 &\leq a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \leq 4a_4, \\ 8a_{16} &\leq a_9 + a_{10} + \dots + a_{15} + a_{16} \leq 8a_8, \\ &\dots \\ 2^{n-1}a_{2^n} &\leq a_{2^{n-1}+1} + \dots + a_{2^n} \leq 2^{n-1}a_{2^{n-1}} \end{aligned}$$

и сложим их. Положим $\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^n 2^k a_{2^k}$, получим $\frac{1}{2}\tilde{S}_n \leq S_{2^n} - a_1 \leq \tilde{S}_n + a_1$. Тогда из сходимости последовательности $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ следует сходимость последовательности $(\tilde{S}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и наоборот (почему?). $\square$

Применяя эту замечательную теорему можно доказать, что

(i) Гармонический ряд расходится: он удовлетворяет условию конденсационного признака Коши и потому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sim \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1,$$

что является расходящимся рядом.

(ii) Мы уже видели, что p -ряд расходится при $p \leq 0$. При $p > 0$ ряд удовлетворяет условию конденсационного признака Коши и потому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \sim \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^{pn}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{(p-1)n}},$$

получили геометрический ряд; он сходится при $p > 1$.

(iii) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ удовлетворяет условию конденсационного признака Коши (почему?) и потому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \sim \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \ln 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln 2} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

т.е. он расходится.

Продолжим обсуждение признаков сходимости. Рассмотрим два следующих важных признака

Теорема (признак Даламбера). Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с $a_n > 0$. Обозначим $q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Тогда

- (i) если $q > 1$, то ряд расходится;
- (ii) если $q < 1$, то ряд сходится.

Теорема (радикальный признак Коши). Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с $a_n \geq 0$. Обозначим

$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$. Тогда

- (i) если $q > 1$, то ряд расходится;
- (ii) если $q < 1$, то ряд сходится.

Замечание. В обоих признаках в случае $q = 1$ вопрос о сходимости ряда остаётся открытым (например рассмотрите p -ряд при произвольном p).

Доказательство. Доказательство расходимости: если $q > 1$, то существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что

- 1) для признака Даламбера: $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow a_{n+1} > a_n, \forall n > N$ (т.е. $a_n > a_N$);
- 2) для радикального Коши: $\sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow a_n > 1, \forall n > N$.

В обоих случаях последовательность $(a_n)_n$ не инфинитезимальна. Значит, ряд расходится.

Доказательство сходимости: если $q < 1$, то выберем $r \in (q, 1)$. Тогда

- 1) для признака Даламбера: найдём N такое, что $\forall n \geq N$ имеем $a_{n+1} < r a_n$, тогда

$$a_{N+k} < r a_{N+k-1} < r^2 a_{N+k-2} < \dots < r^k a_N, \forall k \in \mathbb{N};$$

- 2) для радикального Коши: найдём N такое, что $\forall n \geq N$ имеем $a_n < r^n$.

Такое N действительно найдётся: для этого достаточно положить $r = q + \varepsilon < 1$ (почему такое $\varepsilon > 0$ есть?) и воспользоваться условием сходимости $q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ или $q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$, соответственно.

Далее ряд $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ сходится. Тогда по признаку сравнения сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. $\square$

Замечание. Доказательство признака Даламбера можно адаптировать для доказательства того, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{n^p} = +\infty \quad \text{для любых } q > 1, p \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим последовательность

$$a_n = \frac{q^n}{n^p},$$

где $q > 1$ и $p \in \mathbb{R}$. Рассмотрим отношение соседних членов:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{q^{n+1}}{(n+1)^p} \cdot \frac{n^p}{q^n} = q \left(\frac{n}{n+1} \right)^p = q \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^p.$$

Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^p = 1$ (почему?), получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1.$$

Следовательно, существует номер $N \in \mathbb{N}$ и число r такое, что $1 < r < q$, для которых при всех $n \geq N$ выполняется

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > r.$$

Тогда для любого $n > N$

$$a_n = a_N \cdot \frac{a_{N+1}}{a_N} \cdot \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} > a_N \cdot r^{n-N}.$$

Поскольку $r > 1$, имеем $r^{n-N} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, а значит

$$a_n \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Таким образом,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{n^p} = +\infty \quad \text{для любых} \quad q > 1, p \in \mathbb{R}.$$

Знакопеременные ряды

В заключении рассмотрим следующий сходимости знакопеременного ряда специального вида

Теорема (признак Лейбница). Пусть дан знакопеременный ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$, где $b_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и $b_{n+1} \leq b_n$. Тогда этот ряд сходится.

Доказательство. Рассмотрим последовательность чётных частичных сумм $(S_{2n})_n$. Она не убывает

$$S_{2n} = S_{2n-2} + b_{2n-1} - b_{2n} \geq S_{2n-2}.$$

Рассмотрим последовательность чётных частичных сумм $(S_{2n})_n$. Она не возрастает

$$S_{2n+1} = S_{2n-1} - b_{2n} + b_{2n+1} \leq S_{2n-1}.$$

Таким образом

$$S_2 \leq S_4 \leq \dots \leq S_{2n} \leq S_{2n+1} \leq S_{2n-1} \leq \dots \leq S_3 \leq S_1.$$

Следовательно, обе последовательности сходятся. Более того, т.к. $S_{2n+1} = S_{2n} + b_{2n+1}$, то переходя к пределу получаем, что предел обеих последовательностей один и тот же и равен S . Тогда и вся последовательность $(S_n)_n$ сходится к S т.к. начиная с некоторого N все члены этой последовательности лежат в ε -окрестности точки S . $\square$

Пример. Из признака Лейбница моментально получаем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ сходится. Заметим, что его абсолютный ряд расходится, т.е. ряд сходится условно.

Замечание. Условие монотонности в признаке Лейбница отбросить нельзя! чтобы в этом убедиться, рассмотрим такой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n} + (-1)^{n+1}}.$$

Легко убедиться в том, что для членов этого ряда нет никакой монотонности (правда есть условие инфинитезимальности). Предположим, что этот ряд сходится. Тогда вычтем его из ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}},$$

который точно сходится по признаку Лейбница. Получим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} - \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n} + (-1)^{n+1}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \right)} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

где в последнем действии мы применили предельный признак сравнения. Итак, мы получили, что разность двух сходящихся рядов расходится. Это противоречит теореме о линейной комбинации сходящихся рядов. Значит, наш ряд расходится.

2 модуль

Лекция 11

Предел функции

Определение. Проколота окрестность точки a — это окрестность точки a без самой точки a .

Обозначение. $\mathring{U}(a)$

Пример. Множество $\{x : |x| \in (0, \delta)\}$ — проколота окрестность точки 0 при любом $\delta > 0$, т.е. проколота δ -окрестность $\mathring{U}_\delta(0)$ нуля.

Определение 1 (по Коши). Пусть $E \subset \mathbb{R}$ и $a \in E'$ — предельная точка множества E . Пусть функция f определена на E . Говорят, что функция f стремится к $A \in \mathbb{R}$ при x , стремящемся к a , если и только если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathring{U}_\delta(a) \cap E : |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Часто последняя запись записывается в более явном виде (расписывая определение $\mathring{U}_\delta(a)$)

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in E, 0 < |x - a| < \delta : |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Обозначение. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, f(x) \rightarrow A$ при $x \rightarrow a$.

Определение 2 (переформулировка). $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, если для любой окрестности $U(A)$ точки A найдётся проколота окрестность $\mathring{U}(a)$ точки a такая, что $f(\mathring{U}(a) \cap E) \subset U(A)$.

Упражнение. Объясните, почему определения 1 и 2 эквивалентны.

Сходимость к $\pm\infty$. Определения вполне естественные:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall C > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathring{U}_\delta(a) \cap E : f(x) > C.$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall C > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathring{U}_\delta(a) \cap E : f(x) < C.$$

Определение 3 (по Гейне). Число A является пределом функции f при $x \rightarrow a$, если для любой последовательности $(x_n)_n \subset E$ такой, что $x_n \rightarrow a, x_n \neq a$ справедливо соотношение $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

Следующие теоремы показывают, что определение предела функции по Коши и по Гейне совпадают.

Теорема 1 (необходимое условие). Если $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, то для любой последовательности $(x_n)_n \subset E$ такой, что $x_n \rightarrow a, x_n \neq a$ справедливо соотношение $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

Теорема 2 (достаточное условие). Пусть для любой (строго монотонной последовательности) $(x_n)_n \subset E$ такой, что $x_n \rightarrow a$ справедливо соотношение $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$. Тогда $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Доказательство. 1) Пусть $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ и $x_n \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty, x_n \neq a$. Покажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$. Выберем $\varepsilon > 0$ и построим по нему такое $\delta > 0$, что из $0 < |x - a| < \delta, x \in E$ следует $|f(x) - A| < \varepsilon$. Теперь, в силу $x_n \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$ по числу δ выберем такое N , что при всех $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \delta$. Отсюда и по построению числа δ следует, что при всех $n > N$ выполняется неравенство $|f(x_n) - A| < \varepsilon$. Таким образом, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

2) Пусть для любой последовательности $(x_n)_n \subset E$ такой, что $x_n \rightarrow a$ справедливо соотношение $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$. Покажем, что тогда $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$. Рассуждать будем от противного. Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq A$. Значит,

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 : \exists x \in E, 0 < |x - a| < \delta \mid |f(x) - A| \geq \varepsilon.$$

Итак, пусть такое ε существует. В качестве произвольного δ будем выбирать числа $\delta_n = n^{-1}$, каждому такому δ_n соответствует $x_n \neq a$ такой, что $|x_n - a| < \delta_n$, но $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon$. Очевидно, что $x_n \rightarrow a$ (почему?). Далее из любой последовательности $(x_n)_n$ такой, что $x_n \rightarrow a, x_n \neq a$ можно выбрать строго монотонную подпоследовательность $(x_{n_k})_k$ (как?). Эта строго монотонная подпоследовательность также стремится к a , однако $f(x_{n_k})$ не стремится к A по построению: $|f(x_{n_k}) - A| \geq \varepsilon$. $\square$

Свойства пределов функции

Из эквивалентности определений по Коши и по Гейне моментально следуют такие свойства:

Утверждение 1. Пусть существуют пределы $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ и $B = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$. Тогда существует предел $\lim_{x \rightarrow a} (\alpha f(x) + \beta g(x))$ и он равен $\alpha A + \beta B$.

Утверждение 2. Пусть существуют пределы $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ и $B = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$. Тогда существует предел $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x))$ и он равен AB . Если $B \neq 0$ и $g \neq 0$ в некоторой окрестности точки a , то существует предел $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)/g(x))$ и он равен A/B .

Утверждение 3 (предельный переход в неравенствах). Пусть существуют конечные пределы $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ и $B = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$. Если $f(x) \geq g(x)$ для всех x из некоторой проколотой окрестности точки a , то $A \geq B$.

Теорема о двух милиционерах. Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$. Если $f(x) \geq h(x) \geq g(x)$ для всех x из некоторой проколотой окрестности точки a , то существует предел $\lim_{x \rightarrow a} h(x)$ и он равен A .

В утверждениях 1, 2 и 3 мы пользуемся определением по Гейне. В нём речь идет про последовательности, а для последовательностей мы это уже доказывали.

Утверждение 4. Если у функции f существует конечный предел A при $x \rightarrow a$, то она ограничена в некоторой проколотой окрестности точки a . Если $A \neq 0$, то в некоторой проколотой окрестности точки a выполняется оценка $|f(x)| > |A|/2$.

Доказательство. Здесь пользуемся определением по Коши. Получаем:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathring{U}_\delta(a) \cap E : A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon,$$

т.е. f ограничена в $\mathring{U}_\delta(a) \cap E$.

Вторая часть утверждения легко доказывается если взять $\varepsilon = A/2$, если $A > 0$ и $\varepsilon = -A/2$, если $A < 0$. $\square$

Предел функции при $x \rightarrow \pm\infty$

Как и следует ожидать, определения предел функции при $x \rightarrow \infty$ таковы:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall x > N \mid |f(x) - A| < \varepsilon,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall C > 0 \exists N > 0 : \forall x > N \mid f(x) > C.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall C > 0 \exists N > 0 : \forall x > N \ f(x) < C.$$

Аналогично определения предела функции при $x \rightarrow -\infty$ таковы

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N < 0 : \forall x < N \ |f(x) - A| < \varepsilon,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall C > 0 \exists N < 0 : \forall x < N \ f(x) > C.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall C < 0 \exists N < 0 : \forall x > N \ f(x) < C.$$

Из определений видно, что из существования предела $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ следует существование предела $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$. Обратное не верно. Пример: $f(x) = \sin(\pi x)$. В этом случае $f(n) = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$, поэтому предел $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$ существует и равен нулю. В то же время, $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(\pi x)$ не существует.

Упражнение. Докажите, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(\pi x)$ не существует.

Предел сложной функции. Замена переменных в пределах

Пусть даны две функции, f и g , причём их области определения и множества значений так согласованы, что определена функция $g(f(x))$. Пусть функция f определена в проколотой окрестности точки a и пусть существует предел $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, причём $f(x) \neq A$ в этой проколотой окрестности. Пусть функция g определена в проколотой окрестности $\mathring{U}(A)$ точки A и существует предел $\lim_{y \rightarrow A} g(y) = B$. Тогда в некоторой проколотой окрестности точки a определена функция $g(f(x))$ и существует предел $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = B$, иными словами, если в формуле

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow A} g(y) = B$$

второй предел существует, то существует и первый, и он равен второму. **Докажем это:** дано:

$$\forall \varepsilon_0 > 0 \exists \delta_0 > 0 : \forall x, 0 < |x - a| < \delta_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon_0,$$

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \exists \delta_1 > 0 : \forall y, 0 < |y - A| < \delta_1 \Rightarrow |g(y) - B| < \varepsilon_1.$$

Хотим доказать:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |g(f(x)) - B| < \varepsilon.$$

Положим $\varepsilon = \varepsilon_1$ и построим по ε_1 величину δ_1 так, чтобы $\forall y : 0 < |y - A| < \delta_1 \Rightarrow |g(y) - B| < \varepsilon_1$. Теперь положим $\varepsilon_0 = \delta_1$ и построим по этому ε_0 величину δ_0 . Покажем, что требуемая формула выполняется при $\delta = \delta_0$. По построению при $0 < |x - a| < \delta$ выполнено $|f(x) - A| < \varepsilon_0 = \delta_1$, при $|f(x) - A| < \delta_1$ выполнено $|g(f(x)) - B| < \varepsilon$. $\square$

Эту формулу удобно применять к вычислению пределов: например, если мы знаем, что $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, то

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} = [y = 4x] = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y/4} = 4,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = [y = x^2] = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1.$$

Предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ называется *первым замечательным пределом*. Есть ещё и *второй*:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Эти пределы действительно замечательные и они много где используются в математическом анализе (и не только!). Чтобы их доказать нам будет нужно поговорить сначала про *односторонние пределы*.

Лекция 12

Односторонние пределы

Важную роль играют так называемые односторонние пределы функций. Неформально говоря, это пределы, в которых $x \rightarrow a$ “с одной стороны”, либо справа, либо слева от точки a . Соответственно, бывают два односторонних предела: левый (левосторонний, предел слева) и правый (правосторонний, предел справа).

Левый предел обозначается $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$, правый — $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$.

Определение. Число A называется левым пределом $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ при $x \rightarrow a$, $a \in E'$ если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in (a - \delta, a) \cap E: |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Число A называется правым пределом $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ при $x \rightarrow a$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in (a, a + \delta) \cap E: |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Замечание. Если существуют оба односторонних предела, и они равны $A \in \mathbb{R}$, то существует и обычный предел $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ и он также равен A . Обратное так же верно. Это замечание часто оформляют в виду теоремы: *конечный предел A функции $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ в точке $a \in E'$ существует тогда и только тогда, когда существуют конечные левые и правые пределы в a , равные A .*

Определения односторонних пределов могут также быть переформулированы в терминах Гейне. Ограничимся формулировками для левого предела.

Пусть функция f определена на интервале $(a - h, a)$.

Теорема о левом пределе по Гейне. Если $A = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$, то для любой последовательности $(x_n)_n \subset (a - h, a)$, $x_n \rightarrow a$, справедливо соотношение $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$. Пусть для любой строго возрастающей последовательности $(x_n)_n \subset (a - h, a)$, $x_n \rightarrow a$ последовательность $(f(x_n))_n$ сходится. Тогда существует предел $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$.

Замечание. Чтобы получить формулировку этой теоремы для правого предела, нужно заменить слова “строго возрастающей” на “строго убывающей”, а интервал $(a - h, a)$ заменить на $(a, a + h)$.

Доказательство. Доказательство этой теоремы опустим: оно ничем не отличается от доказательства утверждения про то, что определение по Коши эквивалентно определению по Гейне (убедитесь в этом и воспроизведите это доказательство!).

Прокомментируем только вторую часть теорем. Сначала покажем, что в условиях теоремы все последовательности $(f(x_n))_n$ сходятся к одному и тому же пределу A . Пусть есть две строго возрастающие последовательности $(x_n)_n, (y_n)_n$, $x_n, y_n \rightarrow a$. Построим по ним объединяющую строго возрастающую последовательность $(z_n)_n$, $z_n \rightarrow a$, последовательности $(x_n)_n, (y_n)_n$ — подпоследовательности $(z_n)_n$. Теперь по предположению $(f(z_n))_n$ сходится к некоторому числу A , следовательно, обе подпоследовательности $(f(x_n))_n, (f(y_n))_n$ также сходятся к A . Дальнейшее доказательство можно провести от противного, аналогично доказательству утверждению, что определение по Гейне влечёт определение по Коши. $\square$

Из этой теоремы следует, например следующее важное утверждение. Мы скажем, что функция f является *монотонно возрастающей*, если $f(x) > f(y)$ при $x > y$, где x, y принадлежат

области определения функции f . Аналогично формулируются понятия монотонно *неубывающей*, *убывающей* и *невозрастающей* функций. Во всех этих случаях мы говорим, что функция f *монотонная* (в своей области определения).

Теорема об односторонних пределах монотонной функции. Пусть на отрезке $[c, d]$ задана монотонно возрастающая функция f . Пусть $a \in (c, d)$. Тогда существуют пределы $A = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ и $B = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$.

Доказательство. Для доказательства достаточно отметить, что для любой строго возрастающей последовательности $(x_n)_n$, $x_n \rightarrow a$ последовательность $(f(x_n))_n$ не убывает и ограничена сверху числом $f(a)$ и что для любой строго убывающей последовательности $(x_n)_n$, $x_n \rightarrow a$ последовательность $(f(x_n))_n$ не возрастает и ограничена числом $f(a)$ снизу. Далее пользуемся теоремой Вейерштрасса. $\square$

В заключении этого раздела отметим, что все утверждения из раздела “Свойства пределов функций” выполняются для односторонних пределов (в частности выполнена теорема о двух милиционерах!).

Упражнение. Проверьте это!

Замечательные пределы

Теперь мы готовы к обсуждению замечательных пределов. Напомним, что их два.

Первый замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Второй замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

Доказательство первого замечательного предела. Докажем сначала, что

$$\cos^2 x < \frac{\sin x}{x} < 1,$$

при $0 < |x| < \pi/2$. Рассмотрим случай $x \in (0, \pi/2)$. Случай $x \in (-\pi/2, 0)$ рассматривается аналогично. Рассмотрим рис.1. Даны: тригонометрический круг, с центром в начале координат, луч OL , проведённый под углом $x \in (0, \pi/2)$ к положительному лучу оси абсцисс, точка K — точка пересечения окружности и луча OL , перпендикуляры к оси абсцисс проходят через K и точку с координатами $(1, 0)$.

Теперь $S_{\triangle OAK} < S < S_{\triangle OAL}$, где S — площадь сектора OAK . Выразим эти площади через x : $|OA| = |OK| = 1$, $KH = \sin x$, $AL = \tan x$, тогда $S_{\triangle OAK} = \frac{1}{2} \sin x$, $S = \frac{1}{2}x$, $S_{\triangle OAL} = \frac{1}{2} \tan x$. Итак, $\sin x < x < \tan x$, откуда

$$\cos^2 x < \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Теперь из $\frac{\sin x}{x} < 1$ следует, что $0 < \sin x < x$. Тогда по теореме о двух милиционерах получаем, что $\lim_{x \rightarrow 0+0} \sin x = 0$. Покажем, что $\lim_{x \rightarrow 0+0} \cos^2 x = 1$. Действительно, $\lim_{x \rightarrow 0+0} \cos^2 x = \lim_{x \rightarrow 0+0} (1 - \sin^2 x) = 1 - \lim_{x \rightarrow 0+0} \sin^2 x = 1$. Тогда по теореме о двух милиционерах неравенство $\cos^2 x < \frac{\sin x}{x} < 1$ влечёт, что $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Наконец, рассмотрение $x \in (-\pi/2, 0)$ аналогично влечёт, что $\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Следовательно, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ т.к. левые и правые пределы в 0 равны между собой $\square$

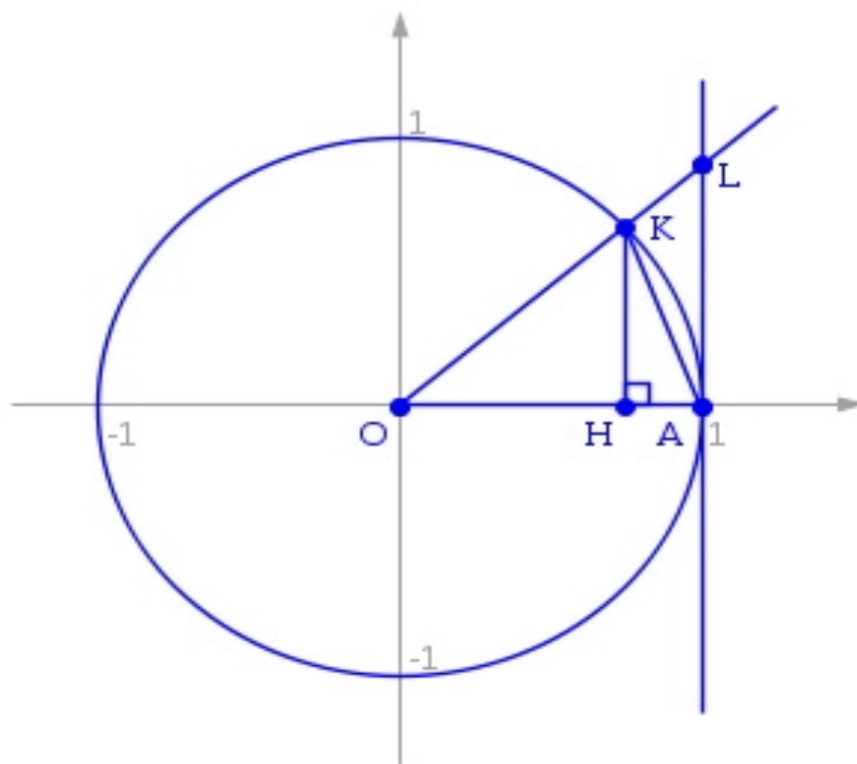


Рис. 1. К первому замечательному пределу

Следствие 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1.$

Следствие 2 (из доказательства). $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1.$

В первом следствии мы просто замечаем, что $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ и пользуемся арифметикой пределов. Во втором следствии из доказательства мы получаем, что $\lim_{x \rightarrow 0+0} \sin x = 0$ и $\lim_{x \rightarrow 0+0} \cos x = 1$ (т.к. в доказательстве мы рассматривали $x \in (0, \pi/2)$). Далее используя замечание в начале доказательства о том, что рассмотрение $x \in (-\pi/2, 0)$ происходит аналогично, мы получаем, что $\lim_{x \rightarrow 0-0} \sin x = 0$ и $\lim_{x \rightarrow 0-0} \cos x = 1$. Далее мы видим, что как для косинуса так и для синуса левые и правые пределы в 0 равны между собой, а значит, существуют пределы этих функций в 0.

Доказательство второго замечательного предела. Ранее мы доказали, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Пусть теперь x — вещественное число, а не натуральное, обозначим через $n = [x]$ его целую часть. Тогда

$$\left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^{[x]} \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x] + 1},$$

поэтому

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \frac{n+1}{n+2} \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{n+1}{n}.$$

Легко видеть, что

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \frac{n+1}{n+2} \rightarrow e, \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{n+1}{n} \rightarrow e, \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Значит, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $N \in \mathbb{N}$, такое что при $n > N$

$$\left| \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \frac{n+1}{n+2} - e \right| < \varepsilon, \quad \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{n+1}{n} - e \right| < \varepsilon,$$

откуда получаем

$$\left| \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - e \right| < \varepsilon$$

при $x > N$. $\square$.

Упражнение. Почему в доказательстве второго замечательного предела мы не воспользовались теоремой о двух милиционерах?

***O*-большое и *o*-малое**

Часто на практике и для наших дальнейших целей будет удобны понятия *o*-малого и *O*-большого.

Определение: Функция α называется бесконечно малой по сравнению с функцией f при $x \rightarrow a$, если существует такая проколота окрестность $\mathring{U}(a)$ точки a , на которой $\alpha(x) = \varepsilon(x)f(x)$ при $x \in \mathring{U}(a)$, причём $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$. При этом пишут, что $\alpha(x) = o(f(x))$ при $x \rightarrow a$.

Определение: Функция f называется ограниченной относительно функции g при $x \rightarrow a$, если функции f, g определены в проколоте окрестности $\mathring{U}(a)$ точки a и существует такое число $C > 0$, что $|f(x)| \leq C|g(x)|$ при $x \in \mathring{U}(a)$. При этом пишут, что $f(x) = O(g(x))$ при $x \rightarrow a$.

Относительно последнего определения: эквивалентно можно сказать, что $f(x) = O(g(x))$ при $x \rightarrow a$, если существует такая ограниченная в $\mathring{U}(a)$ функция h , что $f(x) = h(x)g(x)$, $\forall x \in \mathring{U}(a)$.

Примеры: 1) $x^2 = o(x)$ при $x \rightarrow 0$;

2) $x = o(x^2)$ при $x \rightarrow +\infty$;

3) $(x+1)^2 = O(x^2)$ при $x \rightarrow +\infty$;

4) $o(x) = O(x)$ при $x \rightarrow 0$ однако $O(x) \neq o(x)$ при $x \rightarrow 0$.

Также полезным оказывается понятие *асимптотически равных* или *эквивалентных* функций.

Определение. Функции f и g называются эквивалентными или асимптотически равными при $x \rightarrow a$, если существует такая проколота окрестность $\mathring{U}(a)$ точки a , на которой $f(x) = \lambda(x)g(x)$ при $x \in \mathring{U}(a)$, причём $\lim_{x \rightarrow a} \lambda(x) = 1$. При этом пишут, что $f(x) \sim g(x)$ при $x \rightarrow a$.

Примеры: $\sin x \sim x$ при $x \rightarrow 0$, $\operatorname{tg} x \sim x$ при $x \rightarrow 0$ как следствие из первого замечательного предела

Несложно показать, что асимптотическое равенство или эквивалентность является отношением эквивалентности на функциях (при условии что $x \rightarrow a$ для всех функций).

Упражнение: проверьте это.

Лекция 13

Существование предела функции

Теорема (критерий Коши). Предел $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ существует, если и только если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, y \in \dot{U}_\delta(a) \cap E \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть существует $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$. Тогда, по определению Коши,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in E, 0 < |x - a| < \delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon/2.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$, построим по нему $\delta > 0$. Теперь

$$\forall x, y \in \dot{U}_\delta(a) \cap E \quad |f(x) - A| < \varepsilon/2, |f(y) - A| < \varepsilon/2,$$

из чего следует, что $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, y \in \dot{U}_\delta(a) \cap E \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Отсюда вытекает, что для каждой последовательности $(x_n)_n \subset E$ такой, что $x_n \rightarrow a$ последовательность образов $(f(x_n))_n$ фундаментальна (почему?). Поэтому для каждой $(x_n)_n \subset E$ такой, что $x_n \rightarrow a$ последовательность $f(x_n)$ сходится (почему?). Осталось увидеть, что для двух последовательностей $(x_n)_n, (y_n)_n \subset E$ таких, что $x_n, y_n \rightarrow a$ пределы последовательностей $(f(x_n))_n$ и $(f(y_n))_n$ совпадают. Для этого рассмотрим последовательность

$$x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n, \dots \subset E,$$

эта последовательность также сходится к a , поэтому последовательность образов

$$f(x_1), f(y_1), f(x_2), f(y_2), \dots$$

также фундаментальна, следовательно, сходится. Значит, пределы $(f(x_n))_n$ и $(f(y_n))_n$ совпадают как частичные пределы сходящейся последовательности $\square$

Непрерывные функции

Определение. Функция $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ называется непрерывной в точке $x_0 \in E$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in E \cap U_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0)).$$

Иначе можно сказать, что $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна в точке $x_0 \in E$, если для любой окрестности $U(f(x_0))$ найдётся окрестность $U(x_0)$ такая, что $f(E \cap U(x_0)) \subset U(f(x_0))$.

Упражнение. Почему в предыдущем определении действительно можно так сказать?

Заметим, что всякая функция f непрерывна в изолированной точке области определения: существует окрестность $U(x_0)$ такая, что $f(E \cap U(x_0)) = f(x_0) \subset U(f(x_0))$. Сейчас мы покажем, что непрерывность функции f в точке $x_0 \in E$, где x_0 — предельная точка E , эквивалентна $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ или более эффектно $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x)$. Используя затем эквивалентность определений по Гейне и по Коши, можно также сказать, что для любой последовательности $(x_n)_n$ сходящейся к x_0 справедливо, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Теорема. Функция $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна в точке $x_0 \in E \cap E'$ тогда и только тогда, когда $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Доказательство. В одну сторону утверждение очевидно: если функция непрерывна в точке $x_0 \in E$, тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Для это нужно лишь заметить, что в определении непрерывной

в точке $x_0 \in E$ функции речь идёт о $E \cap U_\delta(x_0)$ тогда как в определении предела мы имеем $E \cap \mathring{U}_\delta(x_0)$.

Обратно, пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Значит, по окрестности $U(f(x_0))$ найдём проколотую окрестность $\mathring{U}(x_0)$ такую, что $f(E \cap \mathring{U}(x_0)) \subset U(f(x_0))$. Т.к. $f(x_0) \in U(f(x_0))$, то $f(E \cap U(x_0)) \subset U(f(x_0))$. $\square$

Из теорем о пределах функции следуют “обычные” свойства непрерывных в некоторой точке $x_0 \in E \cap E'$ функций: сумма и произведение непрерывных в x_0 функций — непрерывная в x_0 функция, частное непрерывных в x_0 функций f/g тоже непрерывна (если $g(x_0) \neq 0$).

Определение. Функция называется непрерывной на множестве E , если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Теорема. Пусть функция $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна в точке $x_0 \in E \cap E'$. Тогда функция f ограничена в некоторой окрестности точки x_0 , а если $f(x_0) \neq 0$, то в некоторой окрестности точки x_0 функция f ненулевая и более того $|f| > |f(x_0)|/2 > 0$, и её знак совпадает со знаком $f(x_0)$.

Теорема. Пусть функции $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывны в точке $x_0 \in E \cap E'$. Тогда функции $\alpha f + \beta g, fg$ и (если, дополнительно, $g(x_0) \neq 0$) f/g непрерывны в x_0 .

Теорема о сложной функции. Пусть функция $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна в точке $x_0 \in E \cap E'$, а функция g определена в окрестности точки $f(x_0)$ и непрерывна в этой точке. Тогда функция $g(f(x))$ непрерывна в точке x_0 .

Следующая теорема содержит важное свойство непрерывных функций, которое часто принимают за определение непрерывной функции.

Теорема. Функция f непрерывна на интервале или на $\mathbb{R}$, если прообраз любого открытого множества открыт.

Односторонняя непрерывность

Пусть функция f определена на множестве $[x_0, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$. Будем говорить, что f непрерывна справа в точке x_0 , если существует односторонний предел f при $x \rightarrow x_0 + 0$ и $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$. Аналогично, если функция f определена на множестве $(x_0 - \delta, x_0]$, $\delta > 0$, то f непрерывна слева в точке x_0 , если существует односторонний предел f при $x \rightarrow x_0 - 0$ и $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$.

Непрерывные функции на отрезке

Определение. Будем говорить, что функция $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, если f непрерывна на интервале (a, b) , непрерывна слева в точке b и непрерывна справа в точке a .

Всюду через $C([a, b])$ или $C^0([a, b])$ обозначается множество непрерывных функций на отрезке $[a, b]$, это множество является векторным пространством.

Теорема о промежуточном значении (Больцано–Коши). Пусть $f \in C([a, b])$, причём $f(a)f(b) < 0$. Тогда существует такое $\theta \in (a, b)$, что $f(\theta) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим случай $f(a) < 0, f(b) > 0$. Определим множество $E = \{y \mid \forall x \in (y, b) : f(x) > 0\}$. Это множество не пусто: из $f(b) > 0$ следует, что $f(x) > 0$ в окрестности точки b . Это множество ограничено снизу: a — нижняя граница этого множества.

Значит, у этого множества есть точная нижняя грань $\theta = \inf E$. Покажем, что $f(\theta) = 0$. Если это не так, то либо $f(\theta) > 0$, либо $f(\theta) < 0$.

Если $f(\theta) > 0$, то $f > 0$ в окрестности $U_\delta(\theta)$, таким образом $\theta - \delta/2 \in E$, это противоречит тому, что θ — нижняя грань E .

Если $f(\theta) < 0$, то $f < 0$ в окрестности $U_\delta(\theta)$, таким образом $\theta + \delta/2 \notin E$, это противоречит тому, что θ — точная нижняя грань для E . $\square$

Следствие. Пусть $f \in C([a, b])$, причём $f(a) < f(b)$. Тогда для любого $A \in (f(a), f(b))$, найдётся такое $\theta \in (a, b)$, что $f(\theta) = A$.

Доказательство. Для доказательства следствия достаточно рассмотреть функцию $f(x) - A$, для неё выполнены все условия теоремы Больцано–Коши. $\square$

Теорема Вейерштрасса о максимальном значении. Пусть $f \in C([a, b])$. Тогда f ограничена сверху и снизу, причём найдутся такие точки x_1 и x_2 на $[a, b]$, что

$$f(x_1) = \min_{[a, b]} f(x), \quad f(x_2) = \max_{[a, b]} f(x).$$

Доказательство. Будем рассуждать от противного. Пусть функция f не ограничена, это значит, что найдётся последовательность $(x_n)_n \subset [a, b]$, для которой $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_n)| = +\infty$. Выберем из последовательности $(x_n)_n$ (она ограничена!) сходящуюся подпоследовательность $(x_{n_k})_k$, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0$. Теперь $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0$, а $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \pm\infty \neq f(x_0)$, что противоречит непрерывности f на $[a, b]$. Итак, функция f ограничена и сверху, и снизу. Пусть $M = \sup f(x)$, но f не принимает значение M ни в какой точке. Тогда функция $\varphi(x) = 1/(M - f(x))$ определена при всех $x \in [a, b]$, по доказанным ранее теоремам, она непрерывна. Значит, эта функция ограничена сверху: $\varphi(x) < K$, отсюда $M - f(x) > 1/K$, или $f(x) \leq M - 1/K$, что противоречит $M = \sup f(x)$. Аналогичная конструкция показывает, что достигается точка минимума. $\square$

Теорема. Образ отрезка при непрерывном функции — отрезок или точка.

Доказательство. Если $f = \text{const}$, то образ — единственная точка. Пусть $f \neq \text{const}$. Тогда образ $[a, b]$ не просто отрезок — это отрезок $\Delta = [\min_{[a, b]} f, \max_{[a, b]} f]$. Действительно, мы показали, что значения $\min_{[a, b]} f$ и $\max_{[a, b]} f$ достигаются. Более того, то, что любые значения из Δ достигаются, следует из теоремы о промежуточном значении. Наконец, очевидно, что значения вне Δ не принадлежат образу (поскольку эти значения находятся вне $\min_{[a, b]} f$ и $\max_{[a, b]} f$). $\square$

Лекция 14

Разрывы, классификация точек разрыва

Непрерывные функции не имеют разрывов. Если функция не непрерывна, тогда мы будем интересоваться какого типа разрывы у неё могут быть. Одни разрывы в некотором смысле лучше, другие хуже.

Определение. Пусть функция $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ не является непрерывной в некоторой точке $x_0 \in E$. Тогда точка x_0 называется точкой разрыва функции f .

Упражнение. Запишите это определение в кванторах.

Упражнение. Пусть x_0 — точка разрыва функции $f: E \rightarrow \mathbb{R}$. Если существует такая непрерывная функция $\tilde{f}: E \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $\tilde{f}|_{E \setminus \{x_0\}} = f|_{E \setminus \{x_0\}}$, то точка x_0 называется точкой устранимого разрыва.

Таким образом, устранимый разрыв можно устранить доопределив функцию в точке разрыва нужным образом и превратив её в непрерывную функцию.

Определение. Если существуют конечные односторонние пределы $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$ и по крайней мере один из этих пределов не совпадает со значением f в точке x_0 , то x_0 называется точкой разрыва 1-го рода. Если не существует (или бесконечен) хотя бы один односторонний предел $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$, то точка x_0 называется точкой разрыва 2-го рода.

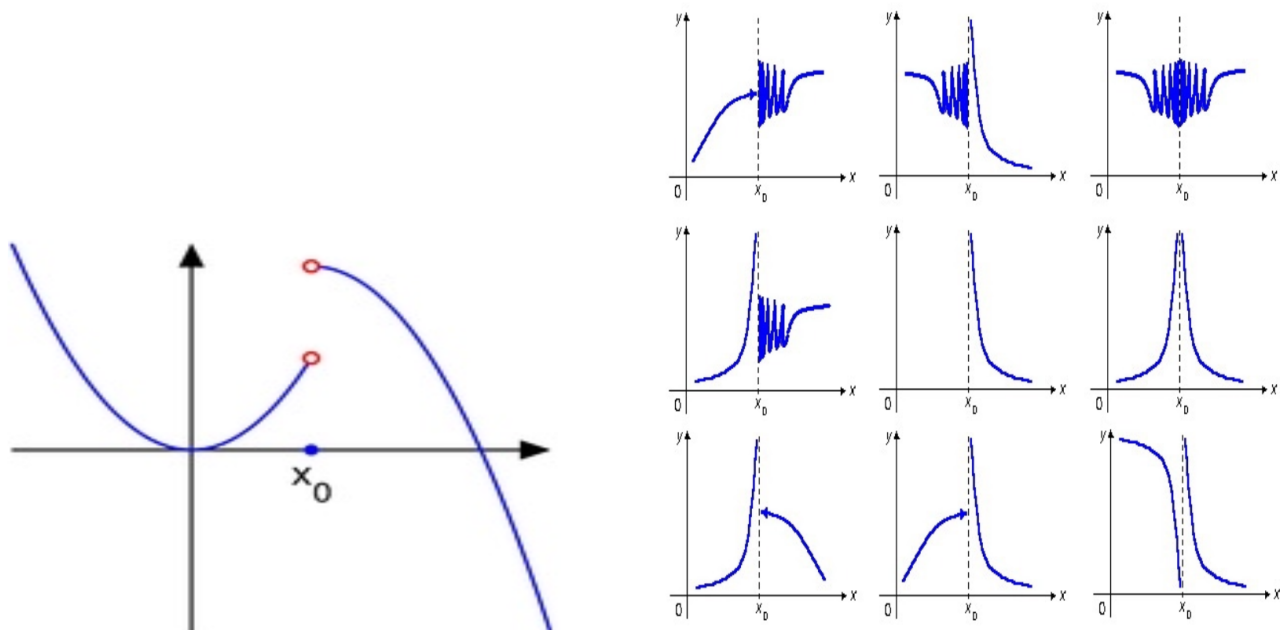


Рис. 2. На левой картинке показан разрыв 1-го рода, на правой картинке — почти все возможные варианты разрыва 2-го рода

Примеры. 1) Функция *знак* определена как:

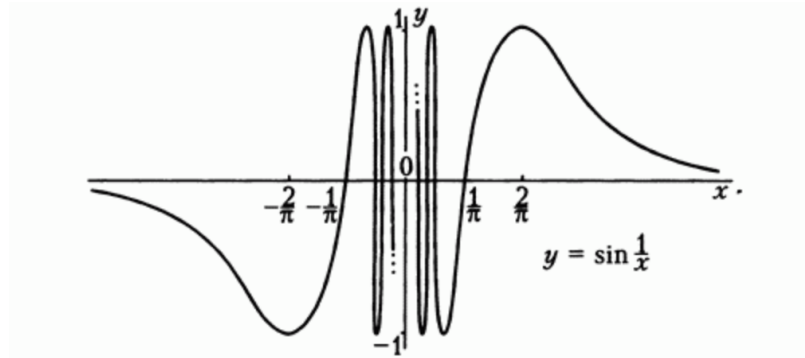
$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

У неё есть единственный разрыв в точке 0, являющийся разрывом 1-го рода.

2) Функция

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

разрывна в точке 0. В этой точке у неё разрыв 2-го рода.



3) Функция *Дирахле* определена следующим образом:

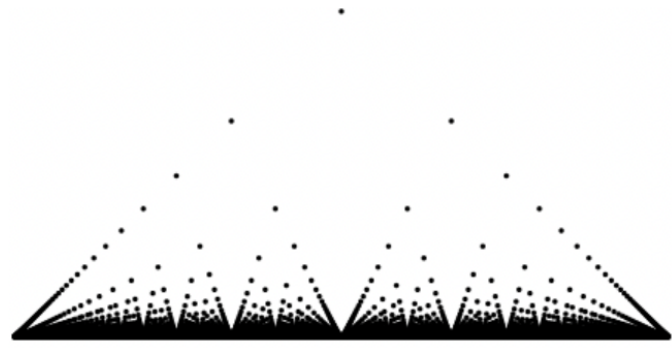
$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

У функции Дирахле в каждой точке разрыв 2-го рода.

2) Родственницей функции Дирахле является *функция Римана*:

$$R(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 1/q, & x = p/q, (p, q) = 1, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Функция Римана разрывна в рациональных точках (все они являются разрывами 1-го рода) и непрерывна в иррациональных.



Элементарные функции

Элементарной функцией называется функция, которую можно задать одним аналитическим выражением, составленным из основных элементарных функций с помощью четырёх арифметических действий и композиций функций. Основными элементарными функциями называются функции $f(x) = \text{const}$, $f(x) = x$, $f(x) = a^x$ и $f(x) = \ln x$, степенная функция x^α , все тригонометрические функции и обратные к ним. Таким образом, основная элементарная функция — это кирпичик, из которого мы строим более сложные элементарные функции с помощью обычных операций. На семинарах мы корректно определим функции a^x , $\ln x$ и x^α и докажем, что они непрерывны в своих областях определения. Для тригонометрических функций и обратных к ним мы не будем этого доказывать.

С помощью основной элементарной функции определяются *гиперболические функции*:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x},$$

эти функции называются соответственно *гиперболическим синусом*, *гиперболическим косинусом*, *гиперболическим тангенсом* и *гиперболическим котангенсом*. Также по аналогии с тригонометрическими функциями определяются *гиперболический секанс* и *гиперболический косеканс*:

$$\operatorname{sch} x = 1/\operatorname{ch} x, \quad \operatorname{csch} x = 1/\operatorname{sh} x.$$

Аналогия с тригонометрическими функциями заключается в том, что для гиперболических функций выполняются например такие тождества

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad \operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y, \quad \operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y}, \quad \operatorname{ch}^2(x/2) = \frac{\operatorname{ch} x + 1}{2}, \quad \operatorname{sh}^2(x/2) = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{2}.$$

Также верны формулы двойного, тройного, кратного “угла”, суммы и разности синусов, косинусов и тангенсов. Все эти формулы легко выводятся из определений. Также легко видеть, что гиперболические синус и тангенс — нечётные функции (т. е. $f(-x) = -f(x)$), гиперболические косинус и котангенс — чётные (т. е. $f(-x) = f(x)$).

Производные

Пусть функция f определена в окрестности точки x_0 .

Определение производной 1. Если существует конечный предел

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A,$$

то функция f называется дифференцируемой в точке x_0 , число A называется производной функции f в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$.

Определение производной 2. Функция f называется дифференцируемой в точке x_0 , если при некотором A для её значений в точках $x_0 + h$ при $h \rightarrow 0$ справедливо представление $f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + o(h)$, при этом число A называется производной функции f в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$.

Оба определения эквивалентны, это просто различная формулировка одной и той же формулы:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = A \Leftrightarrow f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + o(h).$$

Утверждение. Дифференцируемая в точке x_0 функция непрерывна в этой точке.

Доказательство. Следует из определения 2: если $f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + o(h)$, при $h \rightarrow 0$, то $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$. $\square$

Замечание. 1) Функция f дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

при условии, что оба предела существуют и конечны. Они называются “односторонними производными”. Более точно, предел при $x \rightarrow x_0 + 0$ называется “правой производной”, а предел при $x \rightarrow x_0 - 0$ — левой.

2) Не верно, что всякая непрерывная в x_0 функция дифференцируема в x_0 : функция $|x|$ является непрерывной в нуле, но не дифференцируемой в нём. Убедитесь в этом!

Определение. Функция $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ называется дифференцируемой на E , если она дифференцируема в каждой точке множества E .

Обозначение. $C^1(E)$ — множество непрерывно дифференцируемых функций на E , т.е. производная функции является непрерывной функцией. Из предыдущего утверждения следует, что $C^1(E) \subset C^0(E)$.

Приведем некоторое количество примеров вычисления производных по определению.

$$(x^n)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \dots + h^n - x^n}{h} = nx^{n-1};$$

$$(a^x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} = a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \ln a;$$

$$(\sin x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cos(x+h/2) \sin(h/2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h/2)}{h/2} \cos(x+h/2) = \cos x;$$

аналогично $(\cos x)' = -\sin x$.

Арифметические правила дифференцирования.

Теорема. Пусть функции f и g дифференцируемы в точке x_0 , внутренней точке области определения функций.

1. Линейная комбинация $\varphi = \alpha f + \beta g$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) дифференцируема в точке x_0 и $\varphi' = \alpha f' + \beta g'$.
2. Произведение $f \cdot g$ дифференцируемо в точке x_0 и $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ (правило Лейбница).
3. Пусть $g(x_0) \neq 0$, тогда частное f/g дифференцируемо в точке x_0 и

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

В частности

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} 1. \quad & \alpha f(x_0 + h) + \beta g(x_0 + h) - \alpha f(x_0) - \beta g(x_0) = \alpha(f(x_0 + h) - f(x_0)) + \beta(g(x_0 + h) - g(x_0)) = \\ & = \alpha(f'(x_0)h + o(h)) + \beta(g'(x_0)h + o(h)) = (\alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0))h + o(h), \quad h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad & f(x_0 + h) \cdot g(x_0 + h) - f(x_0) \cdot g(x_0) = f(x_0 + h) \cdot g(x_0 + h) - f(x_0) \cdot g(x_0 + h) + \\ & + f(x_0) \cdot g(x_0 + h) - f(x_0) \cdot g(x_0) = (f'(x_0)h + o(h)) \cdot (g(x_0) + o(1)) + f(x_0) \cdot (g'(x_0)h + o(h)) = \\ & = (f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0))h + o(h), \quad h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad & \frac{f(x_0 + h)}{g(x_0 + h)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{f(x_0 + h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0 + h)}{g(x_0 + h)g(x_0)} = \\ & = \frac{f(x_0 + h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x_0 + h)}{g(x_0 + h)g(x_0)} = \\ & = \frac{(f(x_0 + h) - f(x_0))g(x_0) + f(x_0)(g(x_0) - g(x_0 + h))}{g(x_0 + h)g(x_0)} = \frac{f'(x_0)g(x_0)h - f(x_0)g'(x_0)h + o(h)}{g^2(x_0) + o(1)} = \\ & = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)} \frac{h}{1 + o(1)} + o(h) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)} h + o(h), \quad h \rightarrow 0. \quad \square \end{aligned}$$

Пример. $(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$

Лекция 15

Продолжаем изучать свойства производной.

Теорема о дифференцировании сложной функции. Пусть функция f определена в окрестности точки x_0 и дифференцируема в точке x_0 . Пусть функция g определена в окрестности точки $f(x_0)$ и дифференцируема в точке $f(x_0)$. Тогда функция $g \circ f$ определена в окрестности точки x_0 , дифференцируема в этой точке и

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Доказательство. По предположению $f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + o(h)$, $g(f(x_0) + t) - g(f(x_0)) = g'(f(x_0))t + o(t)$ при $h, t \rightarrow 0$. Положим во второй формуле $t = f(x_0 + h) - f(x_0)$. В силу первой формулы имеем $t = O(h)$, значит $o(t) = o(h)$ при $h, t \rightarrow 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} g(f(x_0 + h) - g(f(x_0))) &= g'(f(x_0))(f(x_0 + h) - f(x_0)) + o(h) = g'(f(x_0))(f'(x_0)h + o(h)) + o(h) = \\ &= g'(f(x_0))f'(x_0)h + o(h). \end{aligned}$$

При этом дифференцируемая в точке x_0 функция f непрерывна в этой точке, поэтому при достаточно малом h величина $f(x_0 + h)$ попадает в ту окрестность точки $f(x_0)$, в которой определена функция g . $\square$

Пример. $(\sin x^2)' = (\sin)'(x^2)(x^2)' = (\cos x)2x = 2x \cos x$.

Дифференцируемость обратной функции

Пусть функция f непрерывна и строго монотонна в окрестности точки x_0 . На семинарах мы показали, что в окрестности точки $f(x_0)$ определена непрерывная обратная функция f^{-1} со значениями в окрестности точки x_0 .

Теорема о производной обратной функции. Пусть функция f дифференцируема в точке x_0 и пусть $f'(x_0) \neq 0$. Тогда функция f^{-1} дифференцируема в точке $f(x_0)$ и

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Доказательство. Имеем $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \neq 0$. Хотим показать, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(f(x_0) + t) - f^{-1}(f(x_0))}{t} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Перепишем искомое равенство в эквивалентном виде

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{f^{-1}(f(x_0) + t) - f^{-1}(f(x_0))} = f'(x_0).$$

Обозначим $u = f^{-1}(f(x_0) + t)$, тогда $f(u) = f(x_0) + t$ и $t = f(u) - f(x_0)$. Очевидно (почему?), что $u \rightarrow x_0$ при $t \rightarrow 0$. Поэтому

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{f^{-1}(f(x_0) + t) - f^{-1}(f(x_0))} = \lim_{u \rightarrow x_0} \frac{f(u) - f(x_0)}{u - x_0} = f'(x_0).$$

Пример 1. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$. Действительно, пусть $x = \sin y$, $y = \arcsin x$. Эти функции взаимно обратны, если $x \in [-1, 1]$ и $y \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Теперь, если $\cos y \neq 0$ или, что тоже, $|x| \neq 1$, то

$$y' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Знак перед корнем выбран с учётом того, что $\cos y > 0$ при $y \in [-\pi/2, \pi/2]$. Далее, так как $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$ при $x \in (-1, 1)$, то $(\arccos x)' + (\arcsin x)' = 0$, откуда находим формулу для $(\arccos x)'$.

Пример 2. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$. Действительно, пусть $x = \operatorname{tg} y, y = \operatorname{arctg} x$. Эти функции взаимно обратны, если $x \in (-\infty, \infty)$ и $y \in [-\pi/2, \pi/2]$. Теперь

$$y' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Таблица производных

Эта таблица содержит все основные формулы производных, зная которые можно вычислять производные других функций. По крайней мере некоторые из этих формул надо знать наизусть: 1-9, 11. Формулы 13-15 желательно помнить, как похожие на формулы 5-7. Формулы 17-20 приведены в ознакомительных целях.

Геометрический смысл производной. Касательная как предел секущих

Будем предполагать, что кривая задана графиком функции f . Секущей, проходящей через точку $(x_0, f(x_0))$, называется прямая, проходящая через эту точки и ещё точку $(x_0+h, f(x_0+h))$ графика функции.

Уравнение секущей:

$$y - f(x_0) = \frac{1}{h}(f(x_0+h) - f(x_0))(x - x_0).$$

При $x = x_0$ имеем $y = f(x_0)$, при $x = x_0 + h$ имеем $y = f(x_0 + h)$, то есть это в самом деле секущая; при каждом $h \neq 0$ — своя секущая.

Теперь устремим h к нулю. Если функция f дифференцируема в точке x_0 , то уравнение “предельной секущей” будет иметь вид $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Эта прямая проходит через точку $(x_0, f(x_0))$, тангенс угла её наклона равен производной, эта прямая называется касательной (или касательной к графику f в точке x_0).

Здесь есть одна тонкость: мы перешли к пределу в уравнении прямой. Что это значит формально — прямая стремится к прямой — не слишком понятно. Пересекающиеся в некоторой точке прямые, даже с очень близкими углами наклона, “на бесконечности” далеки друг от друга. Однако, пусть мы будем писать уравнение каждой прямой в виде $y - f(x_0) = k(x - x_0)$. При разных k это будут прямые, проходящие через точку $(x_0, f(x_0))$. Пусть число k зависит от параметра h . И пусть существует предел $k(h)$ при $h \rightarrow 0$ такой, что $k(h) \rightarrow k(0)$. Тогда вполне естественно считать, что прямая $y - f(x_0) = k(0)(x - x_0)$ есть предельное положение прямых $y - f(x_0) = k(h)(x - x_0)$ при $h \rightarrow 0$. По такому определению у дифференцируемой функции касательная $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ есть предельное положение секущей: $y - f(x_0) = h^{-1}(f(x_0+h) - f(x_0))(x - x_0)$, при $h \rightarrow 0$. Секущая проходит через точки $(x_0, f(x_0))$ и $(x_0 + h, f(x_0 + h))$.

Дифференциал

	Функция f	Производная f'	О.Д.З.
1.	$const$	0	
2.	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$x > 0$ при $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ при $\alpha \in \mathbb{Q}$
3.	a^x	$a^x \ln a$	$x \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$
4.	$\log_a x $	$\frac{1}{x \ln a}$	$x \neq 0$, $a > 0$, $a \neq 1$
5.	$\sin x$	$\cos x$	
6.	$\cos x$	$-\sin x$	
7.	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$
8.	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq \pi k$
9.	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$ x < 1$
10.	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$ x < 1$
11.	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	
12.	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	
13.	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	
14.	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	
15.	$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	
16.	$\operatorname{cth} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$x \neq 0$
17.	$\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	
18.	$\operatorname{arch} x = \ln(x \pm \sqrt{x^2-1})$	$\pm \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$ x > 1$
19.	$\operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$	$\frac{1}{1-x^2}$	$ x < 1$
20.	$\operatorname{arcth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$	$\frac{1}{1-x^2}$	$ x > 1$

РИС. 3. Таблица производных.

Определение. Линейная функция $h \mapsto f'(x_0)h$ называется дифференциалом функции f в точке x_0 .

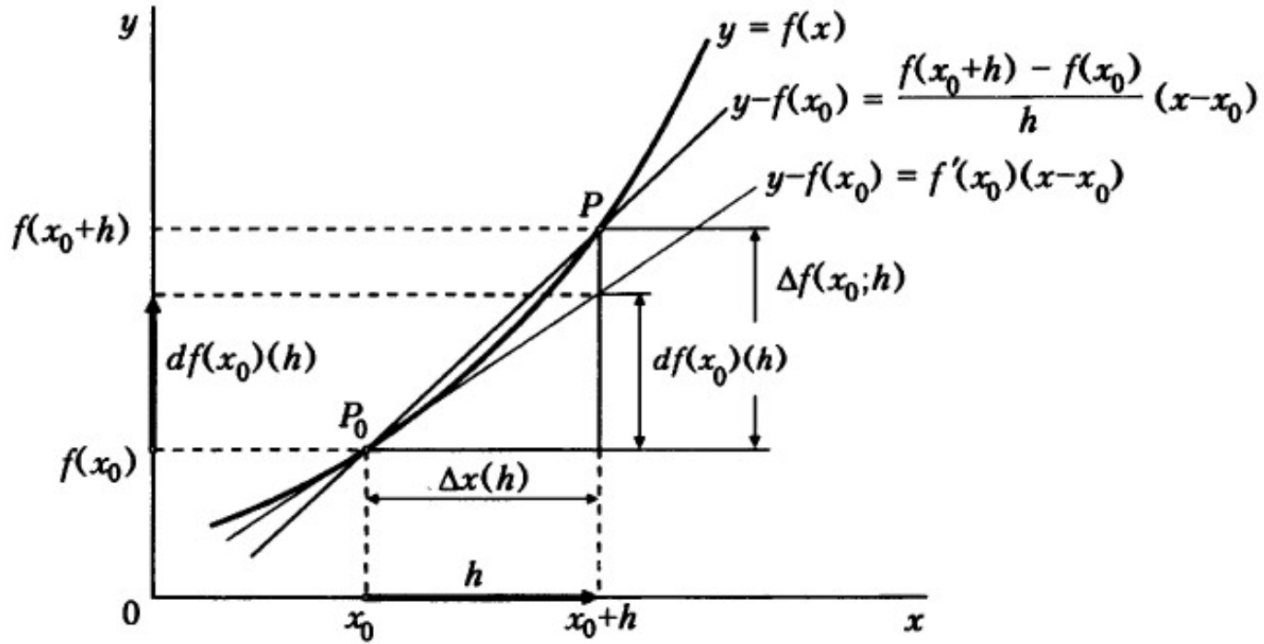


Рис. 4. Касательная и секущая.

Обозначения. $df(x_0)$, $d_{x_0}f$, $Df(x_0)$, $D_{x_0}f$.

Часто говорят, что дифференциал — *главная линейная часть приращения дифференцируемой функции*. В самом деле, *приращение функции* $f(x_0+h) - f(x_0)$ имеет вид суммы значения дифференциала Ah и малых более высокого порядка $o(h)$.

Замечание 1. Можно задать вопрос: раз дифференциал — линейное отображение, то из какого векторного пространства в какое он бьёт? Дифференциал — это линейная функция, для вещественных функций линейная функция — это умножения на число. Это функция определённая на приращениях h к x_0 и принимающая значения в множестве приращений к значениям функции. То есть, дифференциал, как и всякое линейное отображение, должен переводить начало координат в начало координат. Иными словами, если параллельно переместить начало координат на плоскости в точку $(x_0, f(x_0))$, то в новых координатах дифференциал будет настоящей линейной функцией. При этом у нас были переменные x и y , появились новые переменные $x - x_0$ и $y - f(x_0)$. Была числовая прямая “иксов”, стала числовая прямая приращений x . Была числовая прямая “игреков”, стала числовая прямая приращений y . Эти сдвинутые числовые прямые называют “касательные пространства” и обозначают $T_{x_0}\mathbb{R}$ и $T_{f(x_0)}\mathbb{R}$. Дифференциал — это линейная функция из $T_{x_0}\mathbb{R}$ в $T_{f(x_0)}\mathbb{R}$:

$$d_{x_0}f: T_{x_0}\mathbb{R} \rightarrow T_{f(x_0)}\mathbb{R}.$$

Эта терминология для функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ не обязательна и используется редко. Однако, когда мы в будущем дойдем до дифференцирования отображений из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$, вот там терминология станет уместной.

Замечание 2. Лейбниц использовал вместо обозначения $f'(x)$ для производной обозначение $\frac{df}{dx}$. Это обозначение очень удобно. Вообще-то, это единый символ: производная f в точке x .

Однако, это одновременно и дробь. И в некоторых формулах именно так её и удобно использовать, по крайней мере для запоминания. Мы будем использовать это обозначение иногда по-разному:

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} = \frac{d}{dx}f(x)|_{x=x_0}.$$

Следующее утверждение — это всего лишь “наведение порядка” в дифференциалах функций и касательных пространствах, в которых действуют эти дифференциалы, из теоремы о производной сложной функции.

Утверждение о дифференциале сложной функции. *Дифференциал композиции $g \circ f$ в точке x_0 является композицией дифференциалов $dg(f(x_0)) \circ df(x_0)$.*

Замечание. В условиях теоремы об обратной функции дифференциал обратного отображения — обратное отображение к дифференциалу функции f . Дифференциал $df(x_0)$ действует из касательного пространства $T_{x_0}\mathbb{R}$ в касательное пространство $T_{f(x_0)}\mathbb{R}$, дифференциал $df^{-1}(f(x_0))$ действует из касательного пространства $T_{x_0}\mathbb{R}$ в касательное пространство $T_{f(x_0)}\mathbb{R}$. Геометрически теорема об производной обратной функции означает следующее. График обратной функции симметричен графику функции относительно биссектрисы $y = x$. Поэтому касательная в какой-то точке также симметрична соответствующей касательной. Соответственно, произведение тангенсов углов наклона симметричных касательных равно 1. Это и утверждает теорема о производной обратной функции.

Основные теоремы дифференциального исчисления

Пусть на некотором интервале U задана непрерывная функция f .

Определение. *Внутренняя точка x_0 называется точкой локального минимума, если в некоторой окрестности $U(x_0) \subset U$ $f(x_0) \leq f(x)$ для всякой точки $x \in U(x_0)$. Внутренняя точка x_0 называется точкой строгого локального минимума, если в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(x_0) \subset U$ $f(x_0) < f(x)$ для всякой точки $x \in \mathring{U}(x_0)$. Величина $f(x_0)$ называется локальным минимумом функции f . Аналогично определяется точка (строгого) локального максимума и локальный максимум функции f . Точки локального максимума и минимума называются точками локального экстремума.*

Теорема Ферма. *Пусть в точке x_0 локального экстремума функция f дифференцируема. Тогда $f'(x_0) = 0$.*

Доказательство. Пусть, например, x_0 — точка локального максимума. Тогда

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0+0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0, \quad f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0-0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0,$$

поэтому $f'(x_0) = 0$. $\square$

Замечание 1. Теорема Ферма справедлива исключительно для внутренних точек области определения.

Теорема Ферма утверждает, что равенство $f'(x_0) = 0$ является необходимым условием локального экстремума. Для того, чтобы найти максимум дифференцируемой функции можно сначала найти все нули производной. Если их окажется конечное количество, то переберем их по очереди и найдем ту, в которой достигается максимум. Если требуется найти максимум функции на отрезке, то надо не забыть, что он может достигаться в крайних точках отрезка. Поэтому к списку “подозрительных на максимум” точек, в которых $f' = 0$ надо добавить ещё границы отрезка.

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА:

- [1] В.А. Зорич. Математический анализ, том 1. МЦНМО, 2002.
- [2] Г.М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, том 1. Издание 6, Наука, 1966.
- [3] А.М. Красносельский. Конспект лектора. Математический анализ. 1 курс, 1 модуль, 2020.
- [4] В.И. Богачёв. Математический анализ: конспект лекций. Мат. фак. ВШЭ, 1 курс, осень 2021.
- [5] С.М. Львовский. Лекции по математическому анализу. МЦНМО, 2008.
- [6] У. Рудин. Основы математического анализа. Мир, 1976.