Образцы задач для экзамена

Задача 1. Существует ли конечное поле характеристики 0? Существует ли бесконечное поле положительной характеристики?

Задача 2. Существует ли поле из 6 элементов?

Задача 3. Может ли поле из 9 элементов быть подполем поля из 27 элементов?

Задача 4. Найдите k-тый член последовательности a_k, если:

а) $a_0 = 1, a_1 = -7$ и $a_k = 5a_{k-1} - 6a_{k-2}$ при $k \geqslant 2$,

б) $a_0 = 5, a_1 = 3, a_2 = 48$ и $a_k = a_{k-1} + 8a_{k-2} - 12a_{k-2}$ при $k \geqslant 3$.

Задача 5. Верно ли, что для любого многочлена $f \in \Bbbk[x]$ ряд $\sum_{k\geqslant 0} f(k)x^k$ является рациональной функцией?

Задача 6. Вычислите производящую функцию для последовательностей

а) $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, k^2, \ldots$ **б)** $n^2, (n+1)^2, (n+2)^2, \ldots, (n+k)^2, \ldots$.

Задача 7. Найдите производящую функцию для чисел Фибоначчи. Выведите явную формулу для n-ого числа Фибоначчи.

Задача 8. Пусть многочлен $f \in \mathbb{R}[x]$ степени n имеет n различных корней. Разложите на простейшие дроби:

а) $\frac{f'}{f}$

б) $\frac{1}{f}$

Задача 9. Разложите $\frac{1}{x^p - x}$ на простейшие дроби над полем $\mathbb{F}_p$, для простого p.

Задача 10. Покажите, что многочлен $x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1$ неприводим над полем $\mathbb{Q}$, если и только если n-простое число. (позсказка: для простого n можно сделать замену $y = x - 1$)

Задача 11. Докажите, что многочлен

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

не имеет кратных корней.

Задача 12. Выпишите все неприводимые многочлены степени $\leqslant 5$ над полем $\mathbb{F}_2$ и все неприводимые приведённые многочлены степени $\leqslant 4$ над полем $\mathbb{F}_3$.

Задача 13. У скольких многочленов степени $\leqslant n$ из кольца $\mathbb{F}_2[x]$ нет корней в $\mathbb{F}_2$?

Задача 14. Пусть поле $\mathbb{F}_q$ конечно. Верно ли, что любая функция $\mathbb{F}_q \mapsto \mathbb{F}_q$ является многочленом? Существует ли ненулевой многочлен $f \in \mathbb{F}_q[x]$, задающий тождественно нулевую функцию?

Задача 15. Является ли кольцо вычетов $\mathbb{Q}[x]/(x^4 + 1)$ полем? Найдите $[1 + x]^{-1}$ и $[1 + x^2]^{-1}$, если существует.

Задача 16. Для кольца целых гауссовых чисел $\mathbb{Z}[i]$ найдите такие $n \in \mathbb{Z}$, что $\mathbb{Z}[i]/(n)$ поле. Сколько элементов содержит это поле.

Задача 17. Докажите, что для любого идеала I в кольце целых чисел Эйзенштейна фактор кольцо $\mathbb{Z}[w]/(I)$ содержит конечное число элементов.

Задача 18. Пусть $\Bbbk \subset \mathbb{F}$ — два поля, и $\mathbb{F}$ — конечномерно как векторное пространство над $\Bbbk$. Верно ли, что любой элемент поля $\mathbb{F}$ является корнем некоторого многочлена из $\Bbbk[x]$?

Задача 19. Покажите, что $P \in \mathbb{Z}[x]$ не может иметь целых корней, если $P(0)$ и $P(1)$ нечетные.

Задача 20. Докажите, что неприводимый над $\mathbb{Q}$ многочлен не имеет кратных комплексных корней.

Задача 21. Найдите остаток от деления многочлена $x^{2026}+x+1$ на многочлен x^2+x+1.

Задача 22. Докажите, что если $\mathbb{F}_q$ — поле из q элементов, то $x^q - x = \prod\limits_{a\in\mathbb{F}_q}(x-a)$.

Задача 23. Пусть R — евклидово кольцо, $u \in R \setminus \{0\}$ — элемент наименьшей нормы. Докажите, что u обратим.

Задача 24. Приведите пример двух изоморфных, но не совпадающих подполей в $\mathbb{C}$.

Задача 25. Являются ли кольца $\mathbb{Z}[\sqrt{2}], \mathbb{Z}[\sqrt{-1}], \mathbb{Z}[\sqrt{-3}], \mathbb{Z}[\sqrt{-5}], \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ факториальными?