

Программа экзамена, первый семестр

1. Определение коммутативной группы. Единственность нейтрального и обратного элементов. Подгруппа. Циклическая группа. Порядок элемента. Порядки элементов в циклической группе. Подгруппы циклической группы.
2. Коммутативное кольцо. Единственность единицы. $0 * a = 0, (-1) * a = -a$. Делители нуля. Целостные кольца. Обратимые элементы. Поля. Примеры.
3. Идеалы в коммутативных кольцах. Сумма и пересечение идеалов. Конечно порожденные идеалы. Главные идеалы.
4. Гомоморфизм колец. $\ker f$ — идеал, $\text{im } f$ — подкольцо. $f(0) = 0$. Для целостных колец K_1, K_2 и гомоморфизма $f : K_1 \rightarrow K_2$ верно, что либо $\ker f = K_1$, либо $f(1) = 1$.
5. Фактор кольцо. Теорема о гомоморфизме колец.
6. Евклидово кольцо. Деление с остатком. Алгоритм Евклида. Существование НОД. Евклидово кольцо — кольцо главных идеалов. Линейное представление НОД. Взаимная простота.
7. Неприводимые элементы кольца. В кольце главных идеалов K для неприводимого $p \in K$ идеал (p) максимальный, простой и $K/(p)$ поле.
8. Кольцо главных идеалов факториально.
9. Деление с остатком в целых числах \mathbb{Z} , в любом поле \mathbb{k} , в кольце многочленов над полем $\mathbb{k}[x]$, в кольце формальных степенных рядов $\mathbb{k}[[x]]$, в кольце целых гауссовых чисел $\mathbb{Z}[i]$, в кольце целых чисел Эйзенштейна $\mathbb{Z}[w]$, где $w^2 + w + 1 = 0$, $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.
10. Целые гауссовые числа $\mathbb{Z}[i]$. Евклидово кольцо, идеалы, факториальность, простые целые гауссовые числа. Разложение натурального числа в сумму двух квадратов целых чисел. Поля $\mathbb{Z}[i]/(p)$.
11. Все идеалы в $\mathbb{k}[[x]]$. Обратимые и неприводимые в $\mathbb{k}[[x]]$.
12. Примеры нефакториальных целостных колец в которых существует разложение на неприводимые $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}], \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.
13. Прямое произведение колец. Китайская теорема об остатках.
14. Поле. Характеристика поля. Конечная характеристика поля — простое число.
15. Поля $\mathbb{Z}/(p)$. Малая теорема Ферма $x^p - x = 0 \pmod{p}$.
Теорема Вильсона $(p-1)! = -1 \pmod{p}$.
16. Группа обратимых элементов кольца $(\mathbb{Z}/(m))^*$ и функция Эйлера $\varphi(m) = \#(\mathbb{Z}/(m))^*$, $\varphi(p^n)$, мультипликативность функции Эйлера для взаимно простых чисел.
17. Многочлены. Теорема Безу для многочленов над полем. Сколько может быть корней у многочлена степени n в поле.
18. Интерполяционный многочлен Лагранжа.
19. Расширения полей. Алгебраическое расширение поля. Присоединение корня неприводимого многочлена.
20. Поле разложения для многочлена.
21. Число элементов в конечном поле p^n . Построение поля \mathbb{F}_{p^n} . Изоморфизм полей с одинаковым количеством элементов.
22. Эндоморфизм Фробениуса для поля с конечной характеристикой.
23. Циклическая мультипликативная группа конечного поля.
24. Поле частных целостного кольца.

25. Факториальное кольцо. Неприводимые и простые элементы факториального кольца.
- 26 (Лемма Гаусса). Многочлен $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ с коэффициентами в факториальном кольце R с содержанием $\text{cont}(f) = \text{НОД}(a_0, a_1, \dots, a_n) = 1$ неприводим в кольце многочленов над полем частных $Q_R[x]$ факториального кольца R , если и только если он неприводим в кольце многочленов над самим кольцом $R[x]$.
27. Факториальность кольца многочленов $\mathbb{Z}[x]$.
28. Критерий Эйзенштейна неприводимости многочлена.

$$\Phi_p = x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1$$

неприводимый над \mathbb{Q} многочлен, если p - простое.

29. Разложение рациональной функции в сумму простейших дробей.
30. Линейная рекуррентная последовательность. Рациональные производящие функции. Характеристический многочлен оператора сдвига $\varphi(t) \mapsto \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t}$.
31. Формула Бине для чисел Фибоначчи.
32. Общий вид k -го элемента линейной рекуррентной последовательности.
33. Рациональная производящая функция и линейное рекуррентное соотношение для последовательности $z_k = P_n(k)$, где P_n - многочлен степени n .
34. Симметрические многочлены. Элементарные симметрические многочлены. Теорема Виета.
35. Лексикографический порядок на мономах. Старший моном произведения многочленов. Вид старшего монома симметрического многочлена. Основная теорема о симметрических многочленах.
36. $s_k = \sum_{i=1}^n x_i^k$. Производящая функция для элементарных симметрических многочленов и ее логарифмическая производная. Тождества Ньютона для s_k и σ_i .

Список литературы

- [1] В.СЕНДЕРОВ, А.СПИВАК, Суммы квадратов и целые гауссовые цисла
- [2] А. И. Кострикин Введение в алгебру. Часть 1
- [3] А.Л.Городенцев. Алгебра-1
- [4] А.Л.Городенцев. Алгебра-2
- [5] Э.Б. Винберг, Курс Алгебры