Симметрические многочлены

В этом листке все многочлены определены над $\mathbb{C}$. Используется обозначение

$$s_k = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k.$$

Элементарными симметрическими многочленами степени k от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются

$$\sigma_k = \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 \ldots < j_k \leqslant n} x_{j_1} \cdot x_{j_2} \cdot \ldots \cdot x_{j_k}.$$

Принято считать, что $\sigma_k = 0$, если $k > n$ и $\sigma_0 = 1$.

АЛ4◇1. Выразите через элементарные симметрические многочлены:

а) $(x_1 - x_2)^2$

б) $(x_1 - 1)(x_2 - 1)(x_3 - 1)$

в) $\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2$

г) $\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^3$

д*) $(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4)(x_2 + x_3)(x_2 + x_4)(x_3 + x_4)$

АЛ4◇2*. Пусть σ_{ki} – элементарный симметрический многочлен степени k от переменных $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$. Докажите, что

$$\sigma_{ki} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{(k-j)} (x_i)^{(k-j)} \sigma_j.$$

АЛ4◇3. Рассмотрим производящую функцию для элементарных симметрических многочленов от n перемены́х $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\Sigma(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k t^k.$$

Покажите, что

а*)

$$\Sigma = \prod_{l=1}^{n} (1 + t x_l),$$

б*)

$$\frac{d}{dt} \ln(\Sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} s_k t^{k-1}.$$

АЛ4◇4*. Докажите формулу Ньютона

$$n\sigma_n = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{(j-1)} \sigma_{n-j} s_j.$$

АЛ4⋄5*. Вычислите значения симметрических многочленов s_k от корней многочлена

$$x^n + \frac{x^{n-1}}{1!} + \frac{x^{n-2}}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}.$$

АЛ4⋄6. Вычислите значения симметрических многочленов σ_k и s_k от комплексных корней n-ой степени из 1.

АЛ4⋄7. Пусть ξ – первообразный комплексный корень из 1 степени k.

а*) Покажите, что для любого комплексного числа a

$$(x-a)(x\xi - a)\ldots(x\xi^{k-1} - a) = (-1)^{(k+1)}(x^k - a^k).$$

б*) Для многочлена $P \in \mathbb{C}[x]$ покжите, что

$$P(x)P(\xi x)\ldots P(\xi^{k-1}x) = H(x^k),$$

и корни многочлена $H \in \mathbb{C}[x]$ это $k-$ые степени корней многочлена P.

Персональный табель ____.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 4 (10.12.2025)

№	дата	кто принял	подпись
1а			
б			
в			
г			
д			
2			
3а			
б			
4			
5			
6			
7а			
б			