

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ
Факультет математики

Специальный курс

СЛУЧАЙНЫЕ МАТРИЦЫ,
СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ
И
ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МОДЕЛИ

Лекции:

Поволоцкий Александр Маркович

Москва
2023

Оглавление

1	Необходимые сведения из теории вероятностей	9
1.1	Вероятностное пространство, случайные величины и их характеристики	9
1.2	Сходимость последовательностей случайных величин и предельные теоремы.	13
1.3	Мартингалы и концентрация меры	18
1.4	Слабая сходимость случайных мер	21
2	Метод моментов и закон Вигнера	23

Введение

В данном курсе обсуждается круг вопросов, связанный с образованием предельных форм и наличием случайных отклонений, описываемых универсальными вероятностными законами. Ситуации, в которых сложные многокомпонентные системы при огрубленном рассмотрении ведут себя простым универсальным образом, не зависящим от деталей исходной системы, хорошо знакомы как математикам, так и физикам. В теории вероятности они описываются утверждениями, известными как Закон Больших Чисел (ЗБЧ) и Центральная Предельная Теорема (ЦПТ). Однако стандартные примеры таких утверждений, содержащиеся в учебниках, относятся к суммам большого числа независимых случайных величин, и хотя класс подобных задач достаточно широк, требование независимости ограничивает область приложений получаемых результатов. Естественным образом возникает вопрос, можно ли сформулировать столь же содержательные и универсальные утверждения о каких-либо случайных системах с большим числом степеней свободы, выходящие за рамки невзаимодействующего мира.

В последние годы было найдено множество замечательных связей между, на первый взгляд, совершенно различными задачами математики, а также математической и теоретической физики. С математической стороны это комбинаторные и вероятностные задачи о системах с большим числом степеней свободы. Среди них задача описания собственных значений матриц со случайными элементами, задачи о статистике случайных диаграмм Юнга, задачи о замощении различных областей плоскости доминошками или ромбиками, задачи о перечислении непересекающихся путей на решётках. С физической стороны это задачи статистической физики о распространении границ разделов между различными средами, потоках взаимодействующих частиц, полимерах в неупорядоченных средах и т.д.

Курс посвящён возникновению универсального поведения в различных моделях многокомпонентных случайных систем. С формальной точки зрения мы рассмотрим широкий класс многомерных случайных величин и случайных процессов со взаимодействием, заданным простыми локальными правилами. Оказывается, что в правильно выбранных, естественных единицах измерения такие системы обнаруживают удивительно схожее поведение. А именно, если число степеней свободы в рассматриваемых системах велико, то возникающие при соответствующем перемасштабировании наборы случайных величин демонстрируют «свойство концентрации» к некоторым неслучайным детерминистическим предельным формам. Случайные отклонения от этих предельных форм, «флуктуации», измеренные в характерном «флуктуационном» масштабе, описываются небольшим набором универсальных вероятностных распределений, функциональный вид которых зависит только от глобальных симметрий системы, и не зависит от «микроподробностей» исходной задачи.

Вывод точного, явного вида универсальных распределений — это задача, которую

можно решить аналитически лишь для систем, обладающих специальной математической структурой, которая обеспечивает наличие большого количества симметрий и которая оказывается тесно связанной с понятием интегрируемости. Эта структура стоит за множеством красивых точных математических результатов, которые в скейлинговом пределе приводят к утверждениям, аналогичным ЗБЧ и ЦПТ. Хотя курс не следует какому либо учебному пособию, большую часть материала можно найти в книгах и курсах [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7], приведенных в списке литературы ниже.

Благодарности

Автор благодарит Хайдара Нурлигареева за составление конспектов лекций и подбор упражнений, которые легли в основу этого текста.

Литература

- [1] Anderson G. W., Guionnet A., Zeitouni O. An introduction to random matrices. No. 118. — Cambridge university press, 2010.
- [2] Bai Z., Silverstein J. W. Spectral analysis of large dimensional random matrices. — Springer, 2010. — Vol. 20.
- [3] Mingo J. A., Speicher R. Free probability and random matrices. — Springer, 2017. — Vol. 35.
- [4] Speicher R. Lecture Notes on"Free Probability Theory-// arXiv preprint arXiv:1908.08125. — 2019.
- [5] Метя М. Л. Случайные матрицы // М.: МЦНМО. — 2012.
- [6] Forrester P. J. Log-gases and random matrices (LMS-34). — Princeton University Press, 2010.
- [7] Borodin A., Gorin V. Lectures on integrable probability // Probability and statistical physics in St. Petersburg. — 2016. — Vol. 91. — P. 155–214.

Глава 1

Необходимые сведения из теории вероятностей

В этом разделе мы напоминаем основные понятия теории вероятности, которые будут служить языком нашего изложения, а также приведем доказательства нескольких утверждений, которые понадобятся нам в дальнейшем.

1.1 Вероятностное пространство, случайные величины и их характеристики

Любой математический текст, посвященный обсуждению вероятностных задач, начинается с постулирования вероятностного пространства. Вероятностное пространство есть тройка $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, включающая

- пространство элементарных исходов Ω ,
- сигма-алгебру его подмножеств $\mathcal{F} \subset 2^\Omega$
- и вероятностную меру $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$, ставящую в соответствие каждому множеству из $\mathcal{F}$ число от нуля до единицы.

На практике обычно изучается не само вероятностное пространство, а случайные величины, т.е. измеримые функции на нем

$$\xi : \Omega \rightarrow \mathfrak{X},$$

принимающие значения в некотором пространстве $\mathfrak{X}$, наделенном топологией и, соответственно, сигма-алгеброй борелевских множеств. В общем случае мы обычно будем понимать под $\mathfrak{X}$ польское (т.е. полное сепарабельное метрическое) пространство, в простейшем варианте сводящееся к $\mathbb{R}$ или подобным.

Рассмотрим простейший случай $\mathfrak{X} = \mathbb{R}$. Для случайной величины $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ можно определить матожидание

$$\mathbb{E}\xi := \int_{\Omega} \xi(\omega) d\mathbb{P} \quad (1.1)$$

Полезное понятие, обобщающее матожидание, – условное матожидание. Пусть $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ – σ -подалгебра $\mathcal{F}$. Условным матожиданием случайной величины ξ относительно $\mathcal{F}'$

называется случайная величина $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}')$, измеримая относительно $\mathcal{F}'$, такая что для любой функции $\eta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, также измеримой относительно $\mathcal{F}'$, имеем

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}')\eta] = \mathbb{E}\xi\eta. \quad (1.2)$$

Как можно охарактеризовать случайную величину ξ на $\mathbb{R}$, так чтобы, не вникая в детали отображения $\xi(\omega)$, задать меру множеств, отображаемых в те или иные подмножества $\mathbb{R}$? Для этого служит функция распределения вероятности

$$F_\xi(x) := \mathbb{P}(\{\omega : \xi(\omega) \leq x\}), \quad (1.3)$$

а если мера на $\mathbb{R}$, индуцируемая отображением ξ , абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, то и плотность вероятности

$$f_\xi(x) = F'_\xi(x). \quad (1.4)$$

Аналогично можно рассматривать несколько случайных величин на одном и том же вероятностном пространстве. Они характеризуются совместными функциями распределения

$$F_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}(\{\omega : \xi_1(\omega) \leq x_1, \dots, \xi_n(\omega) \leq x_n\}) \quad (1.5)$$

При этом мы говорим, что случайные величины независимы, если их совместная функция распределения распадается в произведение индивидуальных функций распределения,

$$F_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n F_{\xi_k}(x_k), \quad (1.6)$$

что немедленно влечет подобную факторизацию матожиданий произведений, как самих случайных величин, так и их функций.

Альтернативное описание распределения случайной величины ξ дает характеристическая функция

$$\varphi_\xi(x) = \mathbb{E}(e^{ix\xi}), \quad (1.7)$$

которая, будучи преобразованием Фурье меры, определяет распределение единственным образом.

Близко связанное с характеристической функцией понятие производящей функции моментов

$$M_\xi(x) = \mathbb{E}(e^{x\xi}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n x^n}{n!}. \quad (1.8)$$

определено, когда все моменты

$$m_n = \mathbb{E}(\xi^n) \quad (1.9)$$

распределения случайной величины ξ конечны. Ее можно понимать либо как формальный ряд, либо как аналитическую в некоторой окрестности нуля функцию. В первом случае экспонента под знаком матожидания в (1.8) также понимается как формальный ряд. Во втором предполагается, что ряд в правой части (1.8) сходится в некоторой окрестности нуля, что накладывает дополнительные ограничения на скорость убывания вероятности на бесконечности. Получившуюся аналитическую функцию можно аналитически продолжить из области сходимости как минимум на всю мнимую ось. Результат естественно совпадает с характеристической функцией.

Поскольку знание характеристической функции эквивалентно знанию распределения, мы подходим к ответу на естественный вопрос о том, можно ли, зная все моменты (кумулянты) случайной величины, однозначно восстановить распределение. Эта задача известна как *проблема моментов*. Одно из её решений состоит как раз в том, чтобы производящая функция моментов $M_\xi(x)$ была аналитической в некоторой окрестности нуля, то есть чтобы моменты убывали достаточно быстро. Это требование эквивалентно *критерию Рисса*:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_n^{\frac{1}{n}}}{n} < \infty. \quad (1.10)$$

В частности, если носитель распределения конечен, то есть $\text{Supp}(\xi) \in [-M, M]$ для некоторой константы M , то при всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $m_n \leq M^n$ и проблема моментов имеет единственное решение.

Замечание 1.1. Наиболее полное и чуть менее ограничительное решение той же проблемы дается критерием Карлемана, который требует сходимости ряда обратных четных моментов.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{m_{2n}} < \infty. \quad (1.11)$$

Моменты не всегда являются удобной характеристикой распределения. Зачастую удобнее пользоваться *кумулянтами*, являющимися полиномиальными комбинациями моментов. Кумулянты определяются как коэффициенты c_n ряда Тейлора логарифма производящей функции моментов, который будем называть *производящей функцией кумулянтов*:

$$C_\xi(x) = \ln M_\xi(x) = \ln \mathbb{E}(e^{x\xi}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n x^n}{n!}. \quad (1.12)$$

Кумулянты исторически называют также *полуинвариантами* или *семиинвариантами*.

Упражнение 1.2. Пусть случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$ являются независимыми, а числа $a_1, \dots, a_n$ представляют собой некоторый набор констант. Докажите, что (при условии, что указанные величины существуют):

- а) $\varphi_{a_1\xi_1+\dots+a_n\xi_n}(x) = \varphi_{\xi_1}(a_1x) \cdot \dots \cdot \varphi_{\xi_n}(a_nx)$,
- б) $M_{a_1\xi_1+\dots+a_n\xi_n}(x) = M_{\xi_1}(a_1x) \cdot \dots \cdot M_{\xi_n}(a_nx)$,
- в) $C_{a_1\xi_1+\dots+a_n\xi_n}(x) = C_{\xi_1}(a_1x) + \dots + C_{\xi_n}(a_nx)$.

Таким образом, как видно из упражнения 1.2, важной особенностью кумулянтов является их аддитивность: кумулянты суммы независимых случайных величин — это сумма кумулянтов этих величин.

Кумулянты и моменты содержат одинаковую информацию и могут быть однозначно выражены друг через друга формальным переразложением в ряд логарифмированного (соответственно, экспоненцированного) ряда для производящей функции моментов (кумулянтов).

Упражнение 1.3. Докажите, что между первыми тремя моментами и кумулянтами выполняются следующие соотношения

$$m_1 = c_1, \quad m_2 = c_2 + c_1^2, \quad m_3 = c_3 + 3c_1c_2 + c_1^3 \quad (1.13)$$

$$c_1 = m_1, \quad c_2 = m_2 - m_1^2, \quad c_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3 \quad (1.14)$$

В частности, $c_1 = \mathbb{E}(\xi)$ и $c_2 = \mathbb{D}(\xi)$.

Общая формула, выражающая моменты через кумулянты, имеет вид

$$m_n = \sum_{\pi \in \mathcal{P}(n)} \prod_{I \in \pi} c_{|I|}. \quad (1.15)$$

Здесь суммирование ведётся по множеству

$$\mathcal{P}(n) = \{\pi = \{I_1, \dots, I_k\} : [n] = \bigcup_{i=1}^k I_i; I_i \cap I_j = \emptyset, i \neq j; k \in [n]\}. \quad (1.16)$$

разбиений множества

$$[n] := \{1, \dots, n\}$$

на все возможные подмножества.

Приведенные формулы моментов и кумулянтов одной случайной величины – частный случай более общих формул для характеристик набора случайных величин. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ – набор из n случайных величин, не обязательно различных, $n \in \mathbb{N}$. Определим совместные моменты как полилинейные функционалы степени n

$$m_n(\xi_1, \dots, \xi_n) := \mathbb{E}(\xi_1 \cdots \xi_n). \quad (1.17)$$

Тогда можно определить и совместные кумулянты, как полилинейные функционалы, $c_k(x_1, \dots, x_k)$, связанные с моментами соотношением, частным случаем, которого является соотношение (1.15),

$$m_n(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_{\pi \in \mathcal{P}(n)} \prod_{I \in \pi} c_{|I|}(\xi_I), \quad (1.18)$$

где $I = (i_1, \dots, i_{|I|})$ – блоки разбиения π и мы ввели обозначение $\xi_I = (\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_{|I|}})$. К этому соотношению можно также прийти, введя производящие функции совместных моментов и совместных кумулянтов для наборов случайных величин, и потребовав, чтобы, так же как и в случае одной случайной величины они были связаны между собой соотношением (1.12). В частности из этой связи следует следующий важный факт: кумулянты вычисленные на наборе случайных величин, среди которых имеется хотя бы одна, независимая от остальных, равны нулю.¹ Позже при обсуждении свободной вероятности мы познакомимся с некоммутативными аналогами этого факта и соотношения (1.18).

Охарактеризуем на языке моментов, кумулянтов и их производящих функций некоторые важнейшие примеры распределений.

Пример 1.4. Пусть случайная величина $\xi = a$ задаётся дельта-мерой Дирака

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \in A \\ 0, & \text{если } a \notin A, \end{cases} \quad (1.19)$$

т.е. $\mathbb{P}(\xi = a) = 1$, а её функция распределения представляет собой функцию Хэвисайда:

$$F_\xi(x) = \theta(x - a) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > a \\ 0, & \text{если } x \leq a. \end{cases} \quad (1.20)$$

¹Эти факты также хорошо известны специалистам по квантовой теории поля и статистической физике, где совместные моменты и кумулянты известны под названием несвязные и связанные корреляционные функции соответственно.

1.2. СХОДИМОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И ПРЕДЕЛЬНЫЕ

Тогда производящие функции моментов и кумулянтов имеют вид

$$M_\xi(x) = e^{xa}, \quad C_\xi(x) = xa.$$

То есть единственный ненулевой кумулянт дельта-распределения — первый: $c_1 = a$.

Пример 1.5. Вторым и последним примером распределения, у которого почти все кумулянты равны нулю, а значит, $C_\xi(x)$ — многочлен, это распределение Гаусса. Для нормально распределённой случайной величины $\xi \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, задаваемой плотностью

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (1.21)$$

имеем

$$M_\xi(x) = \exp\left(\mu x + \frac{\sigma^2 x^2}{2}\right), \quad C_\xi(x) = \mu x + \frac{\sigma^2 x^2}{2}. \quad (1.22)$$

В частности, $c_1 = \mu$, $c_2 = \sigma^2$ и $c_k = 0$ при $k > 2$.

Пример 1.6. Ещё одно важное дискретное распределение, распределение Пуассона $\text{Poi}(\lambda)$, выделено тем, что все его кумулянты одинаковы:

$$\mathbb{P}(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \quad (1.23)$$

$$M_\xi(x) = e^{e^{\lambda x}}, \quad C_\xi(x) = e^{\lambda x} \quad (1.24)$$

и $c_k = \lambda$ при всех $k \in \mathbb{N}$.

Упражнение 1.7. Убедитесь в справедливости формул (1.22) и (1.24)).

Упражнение 1.8. Докажите, что чётные моменты полукругового распределения Вигнера с плотностью $f_{sc}(x) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4-x^2} \cdot \mathbb{I}_{\{|x| \leq 2\}}$ даются числами Каталана, а нечётные равны нулю:

$$m_{2k} = C_k = \frac{C_{2k}^k}{k+1}, \quad m_{2k+1} = 0. \quad (1.25)$$

1.2 Сходимость последовательностей случайных величин и предельные теоремы.

Определение 1.9. Пусть $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность случайных величин определённых на одном вероятностном пространстве. Говорят, что эта последовательность сходится к случайной величине ξ

- почти наверное (или почти всюду), и пишут

$$\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} \xi,$$

если

$$\mathbb{P}\left(\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \xi\right) = \mathbb{P}\left(\omega: \xi_n(\omega) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \xi(\omega)\right) = 1, \quad (1.26)$$

т.е. имеет место поточечная сходимость везде, кроме, быть может, множества меры нуль;

- по вероятности, и пишут

$$\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \xi,$$

если для любого $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) = \mathbb{P}(\omega: |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0; \quad (1.27)$$

- по распределению или слабо, и пишут

$$\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} \xi,$$

если для любой непрерывной ограниченной функции $g \in C_b$:

$$\mathbb{E}(g(\xi_n)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}(g(\xi)), \quad (1.28)$$

или же, что эквивалентно сказанному выше, если последовательность функций распределения сходится к предельной функции распределения во всех её точках непрерывности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{\xi_n}(t) \rightarrow F_{\xi}(t) \quad \forall t: F_{\xi} \in C(t); \quad (1.29)$$

- в L^p , и пишут

$$\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^p} \xi,$$

если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|\xi_n - \xi|^p) = 0. \quad (1.30)$$

Упражнение 1.10. Докажите эквивалентность определений сходимости по распределению, заданных формулами (1.28) and (1.29).

Упражнение 1.11. Докажите следующие свойства сходимостей:

- если $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} \xi$, то $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \xi$, но обратное, вообще говоря, не верно;
- если $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^p} \xi$ и $p \geq 2$, то $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \xi$, но обратное, вообще говоря, не верно;
- если $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \xi$, то $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} \xi$, но обратное, вообще говоря, не верно;
- если $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} \xi$ и ξ вырожденная случайная величина, т.е. $\mathbb{P}(\xi = a) = 1$, то $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \xi$.

Сходимость по распределению — это частный случай *слабой сходимости мер*; отчасти упражнение 1.11 объясняет последнее название. Заметим, что здесь не обязательно требовать, чтобы члены последовательности и предельная случайная величина были определены на одном вероятностном пространстве. Отметим также, что хотя из сходимости по вероятности сходимость почти наверное не следует, *теорема Рисса* гарантирует нам, что из исходной последовательности можно извлечь подпоследовательность, которая будет сходиться к пределу почти наверное.

Опишем основные инструменты, используемые для доказательства сходимости.

Лемма 1.12. [Неравенство Маркова] Пусть ξ — неотрицательная случайная величина с конечным математическим ожиданием: $\xi \geq 0$ и $\mathbb{E}\xi \leq \infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ справедливо следующее неравенство:

$$\mathbb{P}(\xi > \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}\xi}{\varepsilon}. \quad (1.31)$$

1.2. СХОДИМОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И ПРЕДЕЛЬНЫЕ

В частности, если при некотором $k \in \mathbb{N}$ для случайной величины ξ выполнено неравенство $\mathbb{E}|\xi - \mathbb{E}\xi|^k < \infty$, то

$$\mathbb{P}(|\xi - \mathbb{E}\xi| > \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}|\xi - \mathbb{E}\xi|^k}{\varepsilon^k} \quad (1.32)$$

При $k = 2$ неравенство (1.32) превращается в *неравенство Чебышева* и используется для доказательства сходимости по вероятности: последняя имеет место, когда $\mathbb{D}\xi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Наиболее сложный случай сходимости — сходимость почти наверное, поскольку для его обоснования требуется привлекать утверждения о событиях, включающих бесконечное число членов последовательности. Однако если типичная последовательность сходится достаточно быстро, для доказательства также можно воспользоваться неравенством Маркова в комбинации с леммой Бореля-Контелли.

Лемма 1.13. [Лемма Бореля-Контелли] Пусть $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность случайных событий. Обозначим

$$A = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \equiv \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m \right) = \{ \omega : \forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N}, m > n : \omega \in A_m \},$$

т.е. A — это исходы, которые происходят бесконечно часто. Тогда:

I) если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$ сходится, то $\mathbb{P}(A) = 0$;

II) если все события A_n независимы в совокупности и числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$ расходится, то $\mathbb{P}(A) = 1$.

Теперь для обоснования сходимости почти наверное можно действовать следующим образом. Рассмотрим событие $A_n = \{ \omega : |\xi_n - \xi| > \varepsilon \}$. Если при некотором $k > 0$ ряд, составленный из $\mathbb{E}|\xi_n - \xi|^k$, сходится, то первая часть леммы Бореля-Контелли совместно с неравенством Маркова гарантируют сходимость почти наверное.

Вернемся к сходимости по распределению. Незаменимый инструмент для доказательства такой сходимости дает теорема Леви о непрерывности.

Теорема 1.14. [Теорема Леви о непрерывности] Пусть $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность случайных величин. Тогда если $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} \xi$, то для любого $t \in \mathbb{R}$:

$$\varphi_{\xi_n}(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \varphi_{\xi}(t).$$

Обратно, если $\varphi(t) \in C(0)$ — функция действительного аргумента, непрерывная в нуле, и для каждого $t \in \mathbb{R}$ имеет место сходимость $\varphi_{\xi_n}(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \varphi(t)$, то $\varphi(t)$ является

характеристической функцией случайной величины ξ , для которой $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} \xi$.

Часто вместо анализа сходимости характеристической функции удобнее исследовать сходимость моментов (кумулянтов) распределения.

Определение 1.15. Пусть для всех $k, n \in \mathbb{N}$ моменты

$$m_n^{(k)} = \mathbb{E}(\xi_k^n) \quad \text{и} \quad m_n = \mathbb{E}(\xi^n)$$

случайных величин ξ_k и ξ соответственно конечны для любого порядка n . Будем говорить, что ξ_n сходится к ξ в смысле моментов, если для каждого $n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m_n^{(k)} = m_n. \quad (1.33)$$

Вообще говоря, сходимости в смысле моментов и по распределению не эквивалентны и ни одна из них не влечет другую.

Упражнение 1.16. На примере меры

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) \delta_0 + \frac{1}{n} \delta_n$$

убедитесь в том, что из сходимости по распределению (и даже по вероятности), сходимость в смысле моментов не следует.

Тем не менее, в некоторых случаях можно утверждать, что из сходимости в смысле моментов следует сходимость по распределению. Так же, как в проблеме моментов, для этого достаточно, чтобы моменты росли не слишком быстро. В частности, если и ξ , и все ξ_n имеют компактный носитель, то сходимость следует из теоремы Вейерштрасса о полиномиальной аппроксимации.

Теорема 1.17. [Теорема Вейерштрасса о полиномиальной аппроксимации] Пусть f — функция, определённая на отрезке $[a, b]$ и непрерывная на этом отрезке. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой многочлен $P \in \mathbb{R}[x]$, что для всех $x \in [a, b]$ выполняется $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$.

В свою очередь, сходимость математических ожиданий многочленов от случайной величины немедленно следует из сходимости моментов.

От требования ограниченности носителя можно избавиться, наложив определённые условия на предельную случайную величину. А именно, достаточно, чтобы моменты предельной случайной величины гарантировали единственность решения проблемы моментов, например, удовлетворяя критерию Карлемана. Мы докажем более слабое утверждение, которое пригодится нам в дальнейшем, потребовав компактности носителя, но лишь для предельной величины.

Лемма 1.18. Пусть последовательность ξ_n сходится в смысле моментов к случайной величине ξ с ограниченным носителем, т.е. $\text{Supp}(\xi) \subset [-a, a]$ для некоторого $a > 0$. Тогда имеет место сходимость по распределению:

$$\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} \xi.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную ограниченную непрерывную функцию $g(x)$, такую, что $|g(x)| < b$ для некоторого $b > 0$. Докажем, что

$$\left| \int_{\mathbb{R}} g dF_{\xi} - \int_{\mathbb{R}} g dF_{\xi_n} \right| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Для этого разобьём область интегрирования на отрезок $A = [-2a, 2a]$ и его дополнение. По теореме Вейерштрасса о полиномиальной аппроксимации (теорема 1.17) для любого $\varepsilon > 0$ можно найти многочлен $P(x)$, для которого верно

$$|g(x) - P(x)| < \frac{\varepsilon}{8} \quad \forall x \in A.$$

Кроме того, имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} g dF_{\xi} - \int_{\mathbb{R}} g dF_{\xi_n} \right| &\leq \int_A |g - P| dF_{\xi} + \int_A |g - P| dF_{\xi_n} \\ &+ \left| \int_{\mathbb{R}} P dF_{\xi} - \int_{\mathbb{R}} P dF_{\xi_n} \right| + \int_{\mathbb{R} \setminus A} (|g| + |P|) dF_{\xi_n}, \end{aligned}$$

где в правой части уже опущены два интеграла по dF_{ξ} по области $\mathbb{R} \setminus A$, поскольку там dF_{ξ} равен нулю тождественно. Ясно, что первые два слагаемых правой части в сумме меньше $\varepsilon/4$ в силу выбора многочлена P и вероятностности меры. Выбрав достаточно большое n , можно добиться, чтобы третье слагаемое также не превышало $\varepsilon/4$; здесь мы пользуемся сходимостью моментов и тем, что P — многочлен. Наконец, четвертое слагаемое оценивается с помощью аргумента, использованного при доказательстве неравенства Маркова (лемма 1.12). В самом деле, пусть $2q$ — чётное число, большее или равное степени многочлена P и $p \in \mathbb{N}$ — некоторое натуральное число. Тогда найдётся такая константа c , что $|P(x)| \leq c(1 + |x|^{2q})$, откуда

$$\int_{\mathbb{R} \setminus A} (|g| + |P|) dF_{\xi_n} \leq \int_{\mathbb{R} \setminus A} (b + c(1 + |x|^{2q})) dF_{\xi_n} \leq \left(\frac{b+c}{(2a)^{2(q+p)}} + \frac{c}{(2a)^{2p}} \right) \int_{\mathbb{R}} x^{2(q+p)} dF_{\xi_n}.$$

Интеграл в правой части сходится к $m_{2(q+p)} \leq a^{2(p+q)}$. Поэтому, увеличивая p , можно добиться того, чтобы для достаточно больших n правая часть не превышала $\varepsilon/4$. $\square$

Наконец, приведём формулировки обещанных выше ЗБЧ и ЦПТ, и докажем их, воспользовавшись теоремой Леви о непрерывности.

Теорема 1.19. [ЗБЧ] Пусть (ξ_n) — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин, обладающих конечным математическим ожиданием $\mathbb{E}(\xi_n) = \mu$. Тогда

$$\bar{\xi}_n = \frac{S_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \mu. \quad (1.34)$$

Теорема 1.20. [ЦПТ] Если же, помимо конечных математических ожиданий, (ξ_n) имеют ещё и конечную дисперсию $\mathbb{D}(\xi_n) = \sigma^2$, то

$$\zeta_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} \eta, \quad (1.35)$$

где случайная величина η имеет стандартное нормальное распределение $\mathcal{N}(0, 1)$.

Доказательство. Прежде всего, заметим, что если все моменты ξ_n существуют, то из независимости и аддитивности кумулянтов мы немедленно устанавливаем, что все кумулянты случайных величин $\bar{\xi}_n$ и ζ_n стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$, за исключением $\mathbb{E}(\bar{\xi}_n) \rightarrow \mu$ в первом случае, и $\mathbb{E}(\zeta_n^2) \rightarrow 1$ во втором. Однако нет надобности ограничивать класс распределений; общий случай следует из предельных переходов для характеристической функции и теоремы Леви (теорема 1.14). Действительно, существование математического ожидания гарантирует существование первой производной $\varphi_{\xi_1}(x)$ в $x = 0$, откуда вытекает, что

$$\varphi_{\xi_1}(x) = 1 + i\mu x + o(x), \quad x \rightarrow 0.$$

В силу линейности (упражнение 1.2) это означает, что

$$\varphi_{\bar{\xi}_n}(x) = \left(\varphi_{\xi_1} \left(\frac{x}{n} \right) \right)^n = \left(1 + i \frac{\mu x}{n} + o \left(\frac{x}{n} \right) \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{i\mu x}.$$

Следовательно, $\bar{\xi}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} \mu$, а значит, в силу упражнения 1.11 мы имеем $\bar{\xi}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \mu$.

Аналогично, поскольку характеристическая функция случайной величины

$$\eta_k = \frac{\xi_k - \mu}{\sigma}$$

имеет вид

$$\varphi_{\eta_1}(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad x \rightarrow 0,$$

для $\zeta_n = \sum_{k=1}^n \frac{\eta_k}{\sqrt{n}}$ мы имеем

$$\varphi_{\zeta_n}(x) = \left(\varphi_{\eta_1} \left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right) \right)^n = \left(1 - \frac{x^2}{2n} + o \left(\frac{x^2}{n} \right) \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right).$$

Следовательно, согласно теореме Леви, $\zeta_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} \eta$, к чему мы и стремились. $\square$

Замечание 1.21. Существует также усиленный закон больших чисел, гарантирующий сходимость почти наверное при условии совокупной независимости всех членов последовательности и конечности математического ожидания.

На практике ЗБЧ и ЦПТ означают, что при больших n величина S_n детерминистически растёт линейно по n . Случайные отклонения от детерминистического линейного роста, которые могут быть обнаружены с конечной вероятностью, имеют порядок величины $O(\sqrt{n})$ и описываются нормальным распределением, независимо от деталей исходных случайных величин:

$$S_n \sim \mu n + \sigma \sqrt{n} \cdot \mathcal{N}(0, 1). \quad (1.36)$$

1.3 Мартингалы и концентрация меры

ЗБЧ это пример концентрации меры, вокруг неслучайной величины. Этот результат, будучи в большой степени универсальным, тем не менее, ограничен суммами последовательностей независимых случайных величин. Ещё одним классом процессов, в которых наблюдается подобное явление, не основанных на независимости случайных величин, являются мартингалы.

Определение 1.22. Мартингалом (в дискретном времени) относительно последовательности сигма алгебр $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_3 \dots$ называют последовательность случайных величин $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ такую, что для всех $n \in \mathbb{N}$ величина χ_n измерима относительно $\mathcal{F}_n$, $\mathbb{E}|\chi_n| < \infty$ и

$$\mathbb{E}(\chi_n | \mathcal{F}_{n-1}) = \chi_{n-1} \quad (1.37)$$

Видно, что мартингал это процесс, который в среднем никуда не смещается. Поэтому не удивительно, что приятной особенностью мартингалов являются различные утверждения о их сходимости. Один из инструментов, который позволяет их делать — мартингальные неравенства. Докажем одно такое неравенство, которое будет нам полезно для доказательства свойства концентрации меры.

Лемма 1.23 (Неравенство Азумы). Пусть $(\chi_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ - мартингал с ограниченными приращениями, т.е. для некоторых $a_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$

$$|\chi_{n+1} - \chi_n| \leq a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \quad (1.38)$$

тогда справедлива следующая оценка

$$\mathbb{P}(|\chi_0 - \chi_n| > t) \leq 2e^{-\frac{t^2}{2 \sum_{k=1}^n a_k^2}} \quad (1.39)$$

Доказательство. Запишем экспоненциальное неравенство Маркова для величины $(\chi_0 - \chi_n)$

$$\mathbb{P}(\chi_n - \chi_0 > t) = \mathbb{P}(e^{\lambda(\chi_n - \chi_0)} > e^{\lambda t}) \leq \frac{\mathbb{E}e^{\lambda(\chi_n - \chi_0)}}{e^{\lambda t}}, \quad (1.40)$$

где предполагается, что $\lambda > 0$. Оценим знаменатель в правой части. Для этого введем линейную функцию

$$h_a(x) = \operatorname{ch} a\lambda + \frac{x}{a} \operatorname{sh} a\lambda, \quad a > 0 \quad (1.41)$$

и заметим, что в силу выпуклости экспоненты неравенство

$$e^{\lambda x} \leq h_a(x) \quad (1.42)$$

выполняется при $-a \leq x \leq a$. Тогда

$$\mathbb{E}e^{\lambda(\chi_n - \chi_0)} = \mathbb{E}(\mathbb{E}(e^{\lambda(\chi_n - \chi_{n-1})} | \mathcal{F}_{n-1}) e^{\lambda(\chi_{n-1} - \chi_0)}) \quad (1.43)$$

$$\leq \mathbb{E}(\mathbb{E}(h_{a_n}(\chi_n - \chi_{n-1}) | \mathcal{F}_{n-1}) e^{\lambda(\chi_{n-1} - \chi_0)}) = h_{a_n}(0) \mathbb{E}e^{\lambda(\chi_{n-1} - \chi_0)} \quad (1.44)$$

$$= \operatorname{ch}(\lambda a_n) \mathbb{E}e^{\lambda(\chi_{n-1} - \chi_0)} \leq e^{\frac{\lambda^2 a_n^2}{2}} \mathbb{E}e^{\lambda(\chi_{n-1} - \chi_0)} \leq e^{\frac{\lambda^2 \sum_{k=1}^n a_k^2}{2}} \quad (1.45)$$

где в первом переходе мы воспользовались измеримостью разности $(\chi_{n-1} - \chi_0)$ относительно $\mathcal{F}_n$, во втором неравенством (1.42), в третьем тем, что χ_n - мартингал, и наконец тем, что гиперболический косинус мажорируется экспонентой от квадратичной функции. Тогда из (1.40) имеем

$$\mathbb{P}(\chi_n - \chi_0 > t) \leq e^{\frac{\lambda^2}{2} \sum_{k=1}^n a_k^2 - \lambda t} \leq e^{-\frac{t^2}{2 \sum_{k=1}^n a_k^2}}, \quad (1.46)$$

где во втором неравенстве мы минимизировали экспоненту по λ . Для $\mathbb{P}(\chi_n - \chi_0 < -t)$ верна такая же оценка, и наконец

$$\mathbb{P}(|\chi_n - \chi_0| > t) \leq \mathbb{P}(\chi_n - \chi_0 < -t) + \mathbb{P}(\chi_n - \chi_0 > t) \leq 2e^{-\frac{t^2}{2 \sum_{k=1}^n a_k^2}}. \quad (1.47)$$

□

Важный пример мартингала — мартингал Дуба.

Определение 1.24. [мартингал Дуба] Пусть $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_3 \dots$ - последовательность сигма-алгебр, а χ — произвольная случайная величина, такая что $\mathbb{E}|\chi| < \infty$. Тогда последовательность случайных величин

$$\chi_n := \mathbb{E}(\chi | \mathcal{F}_n), \quad n \in \mathbb{N} \quad (1.48)$$

образует мартингал по отношению $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Действительно, имеет место цепочка равенств

$$\mathbb{E}(\chi_n | \mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\chi | \mathcal{F}_n) | \mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(\chi | \mathcal{F}_{n-1}) = \chi_{n-1}$$

где во втором равенстве использовано телескопическое свойство условного матожидания по отношению к вложенным сигма-алгебрам и кроме того конечность матожидания модуля χ_n следует из аналогичного свойства величины χ ,

$$\mathbb{E}|\chi_n| = \mathbb{E}|\mathbb{E}(\chi | \mathcal{F}_n)| \leq \mathbb{E}\mathbb{E}(|\chi| | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}|\chi| < \infty.$$

Применение неравенства Азумы к мартингалу Дуба позволяет доказывать свойство концентрации меры.

Пусть $\chi = (\chi_n)_{1 \leq n \leq m}$ — набор независимых случайных величин, а $f(x_1, \dots, x_m)$ — s -липшицева вещественнозначная функция m переменных, что означает, что изменение функции при варьировании одной переменной конечно, т.е.

$$|f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_m) - f(x_1, \dots, x_{k-1}, x'_k, x_{k+1}, \dots, x_m)| \leq a_k. \quad (1.49)$$

для некоторого набора $a_k > 0, k = 1, \dots, m$. Из этого следует, что $\mathbb{E}f(\chi_1, \dots, \chi_m) < \infty$. Покажем также, что выполнено неравенство

$$|\mathbb{E}(f(\chi_1, \dots, \chi_m) | \chi_k, \dots, \chi_m) - \mathbb{E}(f(\chi_1, \dots, \chi_m) | \chi_{k+1}, \dots, \chi_m)| \leq a_k. \quad (1.50)$$

Для этого введем обозначение $\chi^{(i,j)} = \{\chi_i, \dots, \chi_j\}$, где $1 \leq i < j \leq m$ для подмножеств χ состоящих из элементов с номерами от i до j . Тогда

$$|\mathbb{E}(f(\chi) | \chi^{(k,m)}) - \mathbb{E}(f(\chi) | \chi^{(k+1,m)})| = |\mathbb{E}[\mathbb{E}(f(\chi) | \chi \setminus \chi_k) - f(\chi) | \chi^{(k+1,m)}]|. \quad (1.51)$$

Заметим, что в виду независимости $\chi_1, \dots, \chi_k$ имеет место равенство

$$\mathbb{E}[f(\chi) | \chi \setminus \chi_k] = \int_{\mathbb{R}} f(\chi^{(1,k-1)}, x, \chi^{(k+1,m)}) dF_{\chi_k}(x), \quad (1.52)$$

где $F_{\chi_k}(x_k)$ — функция распределения χ_k . Используя неравенство Гёльдера, мы приходим к оценке

$$|\mathbb{E}[f(\chi) | \chi \setminus \chi_k] - f(\chi)| = \left| \int_{\mathbb{R}} (f(\chi^{(1,k-1)}, x, \chi^{(k+1,m)}) - f(\chi)) dF_{\chi_k}(x) \right| \leq a_k, \quad (1.53)$$

которая вкупе с (1.51) даёт (1.50). Отсюда, применяя неравенство Азумы, получим неравенство Мак-Диармида

$$\mathbb{P}(|f(\chi_1, \dots, \chi_m) - \mathbb{E}f(\chi_1, \dots, \chi_m)| > t) \leq 2e^{-\frac{t^2}{2 \sum_{k=1}^m a_k^2}}. \quad (1.54)$$

Приведем пример его применения.

Пример 1.25. Пусть $f_m(x_1, \dots, x_m)$, $m \in \mathbb{N}$, — последовательность измеримых s -липшицевых функций, для каждой из которых неравенство (1.50) выполнено с $a_1 = \dots = a_m = a(m) = O(1/\sqrt{m(\ln m)^{(1+\epsilon)}})$ с $\epsilon > 0$ при $m \rightarrow \infty$. Тогда из неравенства Мак-Диармида и леммы Бореля-Контелли следует следующее свойство концентрации меры

$$f_m(\chi_1, \dots, \chi_m) - \mathbb{E}f_m(\chi_1, \dots, \chi_m) \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{n.n.} 0. \quad (1.55)$$

1.4 Слабая сходимость случайных мер

До сих пор мы обсуждали сходимость последовательностей случайных величин, принимающих значения в $\mathbb{R}$. При этом выяснилось, что случайные величины, построенные как функции большого числа других случайных величин, зачастую демонстрируют универсальное типичное поведение, которое проявляется в их сходимостях к неслучайным или универсальным случайным пределам, определяемым утверждениями типа ЗБЧ и ЦПТ. В более общем случае при рассмотрении многокомпонентных случайных систем, таких как случайные матрицы, уместно ставить вопросы о более детальном описании их типичного поведения в пределе когда число компонент неограниченно растет. Для этого хорошо приспособлен язык случайных мер и сходимости их последовательностей.

Пусть $\mathfrak{X}$ – польское пространство, $\mathcal{B}(\mathfrak{X})$ – борелевская сигма-алгебра его подмножеств, а $\mathcal{P}(\mathfrak{X})$ – пространство вероятностных борелевских мер на $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}(\mathfrak{X}))$. В секции 1 было дано понятие слабой сходимости мер, которое можно определять через сходимость интегралов от ограниченных непрерывных функций. Отметим, что слабая сходимость может быть метризуема, например, при помощи метрики Леви-Прохорова, в случае $\mathfrak{X} = \mathbb{R}$ имеющую вид

$$\ell(\mu, \nu) = \inf \{ \varepsilon > 0 : F_\mu(x - \varepsilon) - \varepsilon \leq F_\nu(x) \leq F_\mu(x + \varepsilon) + \varepsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R} \}, \quad (1.56)$$

с которой слабая сходимость превращается в привычную сходимость в метрическом пространстве. С такой метрикой пространство $\mathcal{P}(\mathfrak{X})$ само является польским пространством.

Приведем также определение метрики Леви-Прохорова для случая общих метрических пространств $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}(\mathfrak{X}))$. Пусть $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{X})$ – борелевское множество. Для $\varepsilon > 0$ определим множество

$$A^\varepsilon = \bigcup_{p \in A} B_\varepsilon(p), \quad (1.57)$$

как объединение шаров где $B_\varepsilon(p)$ радиуса ε с центрами в каждой точке множества A . Тогда для мер $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathfrak{X})$

$$\ell(\mu, \nu) = \inf \{ \varepsilon > 0 : \mu(A) \leq \nu(A^\varepsilon) + \varepsilon \text{ \& } \nu(A) \leq \mu(A^\varepsilon) + \varepsilon, \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathfrak{X}) \}, \quad (1.58)$$

Слабая сходимость² позволяет задать топологию в $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, а следовательно и борелевскую сигма-алгебру $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$. Если $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – некоторое вероятностное пространство, то случайная вероятностная мера – это случайный элемент на этом пространстве, который принимает значения в $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Иными словами, случайная вероятностная мера – это измеримое отображение $(\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathcal{P}(\mathbb{R}), \mathcal{F}_{\mathcal{P}})$, определённое правилом $\omega \mapsto \mu(\omega)$. К таким мерам применимы обычные понятия сходимости, принятые в теории вероятности, с которыми мы имели дело в разделе 1.

Определение 1.26. Пусть $\mu, \mu_1, \mu_2, \dots$ – случайные вероятностные меры, определённые на одном вероятностном пространстве. Будем говорить, что последовательность (μ_n) слабо сходится к μ почти наверное (по вероятности, в среднем), и писать

$$\mu_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}(\mathbb{P}, \mathbb{E})} \mu, \quad (1.59)$$

²С точки зрения функционального анализа слабая сходимость мер – это *-слабая сходимость линейного функционала в двойственном пространстве.

тогда и только тогда, когда

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) d\mu_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}(\mathbb{P}, \mathbb{E})} \int_{\mathbb{R}} g(x) d\mu, \quad \forall g(x) \in C_b(\mathbb{R}).$$

Пример 1.27. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — выборка из некоторого распределения $F_\lambda(x)$ (то есть случайные величины $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — независимы и одинаково распределены как некоторая случайная величина λ распределенная с мерой m_λ). Рассмотрим эмпирическую выборочную меру

$$L_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{\lambda_k}. \quad (1.60)$$

Тогда

$$L_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} m_\lambda \quad (1.61)$$

Действительно, поскольку $\mathbb{I}_{\lambda < x}$ распределена как бернуллиевская случайная величина, то Усиленный Закон Больших Чисел даёт нам

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{I}_{\{\lambda_k < x\}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} F_\lambda(x). \quad (1.62)$$

Из поточечной почти наверное сходимости последовательности функций распределения следует слабая сходимость мер почти наверное. Предел (1.61) можно интерпретировать как пример Закона Больших Чисел для эмпирической спектральной меры диагональной матрицы, элементы которой являются одинаково распределенными случайными величинами.

Глава 2

Метод моментов и закон Вигнера

Обсуждая ЗБЧ и ЦПТ, мы имели дело с независимыми случайными величинами. В дальнейшем мы будем пытаться высказывать подобного рода утверждения, скорее, для наборов зависимых величин. Оказывается, существуют широкие классы систем, демонстрирующих на больших масштабах характерное поведение, которое не зависит от микроскопических подробностей, и первым таким классом, который мы рассмотрим, станут случайные матрицы.

Впервые случайные матрицы возникли в физике при изучении спектров ядер больших атомов. Несмотря на то, что задача диагонализации гамильтонианов больших взаимодействующих систем чрезвычайно сложна и не решается точно, оказалось, что статистически уровни энергии ведут себя как собственные значения некоторого класса случайных матриц. Позже выяснилось, что подобные утверждения справедливы и для других сложных систем, например, таких, как квантовые бильярды, квантовые точки и др. С другой стороны, случайные матрицы представляют интерес и для математиков, например, потому что поведение, подобное собственным значениям случайных матриц, обнаруживается в структуре комплексных нулей ζ -функции Римана, которая, в свою очередь, тесно связана с распределением простых чисел.

Мы начнём с круга вопросов, касающихся изучения спектра случайных матриц. Как уже было упомянуто, изучение случайных матриц было мотивировано вопросом о типичном виде ядерных спектров, которые определяются наборами собственных чисел многомерных самосопряженных операторов. Основная идея состоит в том, что в достаточно общей ситуации типичный вид этого спектра не зависит от деталей отдельных матричных элементов, а определяется лишь симметриями оператора. Поэтому мы будем считать матричные элементы случайными величинами, а цель будет заключаться в том, чтобы попытаться ответить на вопрос, как выглядит типичный спектр очень большой эрмитовой матрицы со случайными матричными элементами. Этот вопрос был впервые поставлен и решен математиком и физиком Юджном Вигнером в 1958 году сначала для матриц со случайными элементами, задаваемыми распределением Бернулли, а потом и для произвольных распределений.

Для простоты мы ограничимся случаем вещественных симметричных матриц, хотя те же утверждения относятся и к комплекснозначным эрмитовым матрицам, а также к вещественно-кватернионным эрмитовым матрицам.

Определение 2.1. Матрицей Вигнера будем называть вещественную симметричную матрицу $W = (w_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, элементы $w_{ij} = w_{ji}$ которой на главной диагонали и выше являются независимыми случайными величинами, одинаково распределёнными выше

главной диагонали, а также одинаково (но, возможно, по-другому), распределёнными на главной диагонали:

$$w_{ij} = w_{ji} \sim \xi, \quad 1 \leq i < j \leq n; \quad \mathbb{E}(\xi) = 0, \quad \mathbb{D}(\xi) = \sigma^2 < \infty; \quad (2.1)$$

$$w_{ii} \sim \eta, \quad 1 \leq i \leq n; \quad \mathbb{E}(\eta) = 0, \quad \mathbb{D}(\eta) < \infty. \quad (2.2)$$

Для упрощения технических деталей на протяжении всего этого раздела мы будем также предполагать, что все моменты распределений случайных величин ξ и η конечны.

Вопрос, на который мы хотим ответить в этом разделе, звучит следующим образом: «Как выглядит типичный спектр большой Вигнеровской матрицы?» Ответ оказывается удобно сформулировать в виде Закона Больших Чисел для эмпирической спектральной меры вигнеровской матрицы, отнормированной так, чтобы спектр находился в ограниченной области.

Определение 2.2. Пусть $M = M^\dagger \in \mathbb{C}^{n \times n}$ — эрмитова матрица¹, обладающая собственными значениями $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Всякой такой матрице можно сопоставить эмпирическую спектральную меру (ЭСМ)

$$L_M = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{\lambda_k} \quad (2.3)$$

Поскольку матрицы Вигнера — случайные, их ЭСМ — также случайная мера. Однако если выбрать правильный масштаб, то мы увидим, что чем больше размер матрицы, тем менее вид спектра, а следовательно и ЭСМ, зависит от исходного распределения её матричных элементов, и тем ближе они становятся к единому универсальному закону. В пределе для ЭСМ вигнеровских матриц, перемасштабированных так, чтобы при увеличении размера спектр оставался в ограниченной области, справедлив аналог ЗБЧ, а именно, ЭСМ стремится к полукруговому закону Вигнера.

Теорема 2.3. [Теорема Вигнера]

Пусть $(w_{ij})_{1 \leq i < j}$ и $(w_{ii})_{i \geq 1}$ — последовательности независимых одинаково распределённых случайных величин, определенных на одном вероятностном пространстве, причём

$$\mathbb{E}w_{12} = \mathbb{E}w_{11} = 0, \quad (2.4)$$

$$\mathbb{D}w_{12} = \sigma^2, \quad \mathbb{D}w_{11} < \infty, \quad (2.5)$$

$$\mathbb{E}w_{12}^k < \infty, \quad \mathbb{E}w_{ii}^k < \infty, \quad k \geq 2, \quad (2.6)$$

а $W_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — матрица Вигнера с матричными элементами $w_{ij} = w_{ji}$, $1 \leq i, j \leq n$. Введём перемасштабированную матрицу

$$M_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \cdot W_n. \quad (2.7)$$

Тогда последовательность ЭСМ матриц M_n слабо сходится к полукруговому закону Вигнера почти наверное, то есть

$$L_{M_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} \mu_{sc}, \quad (2.8)$$

¹Знак $\dagger$ означает транспонирование и комплексное сопряжение.

где мера μ_{sc} задаётся плотностью

$$f_{sc}(x) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - x^2} \cdot \mathbb{I}_{\{|x| \leq 2\}}.$$

Доказательство. Для доказательства теоремы Вигнера мы будем использовать *метод моментов*. Суть его заключается в том, чтобы сначала доказать сходимость последовательности моментов ЭСМ к моментам полукругового закона, подобно тому, как мы это делали при доказательстве ЗБЧ в разделе 1. Если имеет место сходимость моментов почти наверное, то в силу ограниченности носителя полукругового распределения и леммы 1.18 мы будем иметь и слабую сходимость ЭСМ с вероятностью единица.

Для произвольной меры μ на $\mathbb{R}$ введём следующее обозначение

$$\langle \mu, f \rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x) \mu(dx). \quad (2.9)$$

В частности $m_k(\mu) = \langle \mu, x^k \rangle$ — это k -ый момент случайной величины, заданной мерой μ . Определим усредненную меру $\bar{L}_{M_n}$, которая характеризуется тем свойством, что для любой измеримой функции $f(x)$ выполнено соотношение

$$\langle \bar{L}_{M_n}, f(x) \rangle = \mathbb{E}_W \langle L_{M_n}, f(x) \rangle, \quad (2.10)$$

где нижний индекс W подчеркивает, что матожидание берется по отношению к мере на матрицах Вигнера.

Стратегия доказательства следующая. Сначала доказывается сходимость моментов в среднем к моментам полукругового распределения. Следом — сходимость моментов почти наверное к своим средним значениям. Таким образом, доказательство сводится к следующим трем утверждениям

$$(a) \quad \langle \mu_{sc}, x^{2k} \rangle = C_k, \text{ где } C_k = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \text{ — числа Каталана,}$$

$$(b) \quad \langle \bar{L}_{M_n}, x^k \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle \mu_{sc}, x^k \rangle,$$

$$(c) \quad \langle L_{M_n}, x^k \rangle \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} \langle \bar{L}_{M_n}, x^k \rangle.$$

Отметим, что доказательство утверждения (a) было сформулировано в разделе 1 в виде упражнения 1.8.

Итак, покажем, что $\langle \bar{L}_{M_n}, x^k \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle \mu_{sc}, x^k \rangle$. Прежде всего, заметим, что моменты ЭСМ — это следы степеней матрицы:

$$\langle L_{M_n}, x^k \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i^k = \frac{1}{n} \cdot \text{Tr } M_n^k = \frac{1}{n(\sigma\sqrt{n})^k} \cdot \text{Tr } W_n^k. \quad (2.11)$$

То же самое справедливо и для моментов усредненной меры

$$\langle \bar{L}_{M_n}, x^k \rangle = \frac{1}{n^{1+k/2}\sigma^k} \cdot \mathbb{E}_W(\text{Tr } W_n^k), \quad (2.12)$$

с той лишь разницей, что справа стоит матожидание следа, или, в силу линейности следа, след матожидания степеней матрицы W_n .

Выразим следы через матричные элементы и попробуем вычислить матожидания от полученных комбинаций матричных элементов. Чтобы понять, как ведёт себя величина $\langle \bar{L}_{M_n}, x^k \rangle$ в пределе $n \rightarrow \infty$, сначала вычислим следы $\text{Tr } W_n^k$ при малых значениях k .

При $k = 1$, очевидно, получаем $\mathbb{E}_W(\text{Tr } W_n) = \mathbb{E}_W(w_{11}) = 0$ и

$$\langle \bar{L}_{M_n}, x \rangle = 0. \quad (2.13)$$

При $k = 2$ справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_W(\text{Tr } W_n^2) &= \mathbb{E}_W \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n w_{ik} w_{ki} \right) = \\ &= \sum_{i \neq k} \mathbb{E}_W(w_{ik}^2) + \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_W(w_{ii}^2) = n(n-1)\sigma^2 + n \mathbb{D}_W(w_{11}). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Таким образом, при $n \rightarrow \infty$ мы получим

$$\langle \bar{L}_{M_n}, x^2 \rangle = \frac{1}{n} \mathbb{E}_W(\text{Tr } M_n^2) = \frac{n(n-1)\sigma^2 + n \mathbb{D}_W(Y)}{n^2 \sigma^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1. \quad (2.15)$$

При $k = 3$ из независимости случайных величин w_{ik} для различных пар (i, k) имеем

$$\langle \bar{L}_{M_n}, x^3 \rangle = \frac{1}{n^{5/2}} \cdot \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_W(w_{ii}^3) = \frac{n}{n^{5/2}} \cdot \mathbb{E}_W(w_{11}^3) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (2.16)$$

Что получится в общем случае? Как видно из разобранных примеров, для вычисления пределов моментов произвольного порядка нужно просуммировать вклады величин

$$\mathcal{W}(\pi) = \mathbb{E}(w_{i_1 i_2} w_{i_2 i_3} \dots w_{i_k i_1}) \quad (2.17)$$

с соответствующими весами, где $\pi = (i_1, \dots, i_k)$ — набор из k натуральных чисел, принимающих произвольные значения из множества $\{1, \dots, n\}$. Для решения этой задачи удобно использовать язык теории графов. Пусть $G = (V, E)$ — полный граф на n вершинах с петлей в каждой вершине.² Будем считать, что вершины пронумерованы числами от единицы до n , то есть $V = \{1, \dots, n\}$. Тогда каждому выражению вида (2.17) можно сопоставить замкнутый путь

$$\pi = (i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow i_3 \rightarrow \dots \rightarrow i_k \rightarrow i_1) \quad (2.18)$$

с весом $\mathcal{W}(\pi)$ определённым формулой (2.17). Таким образом, выражение для моментов сводится к сумме

$$\langle \bar{L}_{M_n}, x^k \rangle = \frac{1}{n^{k/2+1} \sigma^k} \sum_{\pi(k)} \mathcal{W}(\pi(k)) \quad (2.19)$$

по путям $\pi(k)$ из k шагов на графе G .

Далее, заметим, что различные пути, которые переводятся друг в друга перенумерацией вершин, имеют один и тот же вес. Будем говорить, что пути π и π' принадлежат одному классу эквивалентности, $\pi \sim \pi'$, если $\pi' = \tau(\pi)$, где $\tau \in S_n$. Здесь мы имеем в виду,

²Полным графом называется граф, у которого каждая вершина соединена ребрами со всеми остальными. В нашем случае мы также добавляем в каждую вершину петлю — ребро, соединяющее вершину с самой собой.

что $\pi = (i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow i_3 \rightarrow \dots \rightarrow i_k \rightarrow i_1)$, $\pi' = (\tau(i_1) \rightarrow \tau(i_2) \rightarrow \tau(i_3) \rightarrow \dots \tau(i_k) \rightarrow \tau(i_1))$, и, как следствие, $\mathcal{W}(\pi') = \mathcal{W}(\pi)$. Таким образом, суммирование по путям, сводится к суммированию по множеству классов эквивалентности $\mathcal{P} = \{\pi\} / \sim$:

$$\langle \bar{L}_{M_n}, x^k \rangle = \frac{1}{n^{k/2+1} \sigma^k} \sum_{\pi(k) \in \mathcal{P}} \|\pi(k)\| \cdot \mathcal{W}(\pi(k)), \quad (2.20)$$

где $\|\pi(k)\|$ — число путей в классе эквивалентности. Правда, пока остаётся вопрос, как пересчитать пути каждом таком классе. Оказывается, это легко сделать, если явно выделить классы эквивалентности путей, проходящих через фиксированное число вершин.

Обозначим через $\pi(k, m)$ путь из k шагов, проходящих в точности через m вершин, $\|\pi(k, m)\|$ — число элементов в его классе эквивалентности. Очевидно, что выполняется равенство $\|\pi(k, m)\| = n(n-1) \dots (n-m+1) = A_n^m$. Поэтому имеет место соотношение

$$\langle \bar{L}_{M_n}, x^k \rangle = \frac{1}{n^{k/2+1} \sigma^k} \sum_{m=1}^k \sum_{\pi(k, m) \in \mathcal{P}} A_n^m \cdot \mathcal{W}(\pi(k, m)). \quad (2.21)$$

Замечательной особенностью выражения, стоящего под знаком суммы, является тот факт, что общее число вершин в графе G влияет лишь на известный коэффициент A_n^m , а всё остальное зависит только от k и m , то есть остается конечным в пределе $n \rightarrow \infty$.

Какие пути вносят вклад в эту сумму? Прежде всего, заметим, что в силу условия (2.4) ненулевой вклад дают только те пути, в которых каждое пройденное ребро встречается не менее двух раз. Следовательно, учитывать имеет смысл лишь те пути, в которых число использованных рёбер не превышает $[k/2]$. Пусть $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ — подграф графа G , для которого $\|\tilde{E}\| \leq [k/2]$ и $|\tilde{V}| = m$, а через рёбра и вершины которого проходит путь $\pi(k, m)$. Сколько в таком графе может быть вершин, то есть каково число m ? Чтобы ответить на этот вопрос, сформулируем следующее известное из теории графов утверждение.

Лемма 2.4. Пусть $G = (V, E)$ конечный связный граф. Тогда $\|V\| \leq \|E\| + 1$, причём равенство имеет место тогда и только тогда, когда G — дерево.

Следовательно, число рёбер удовлетворяет неравенству $m \leq [k/2] + 1$, откуда

$$\langle \bar{L}_{M_n}, x^k \rangle = \frac{1}{n^{k/2+1} \sigma^k} \sum_{m=1}^{[k/2]+1} \sum_{\pi(k, m) \in \mathcal{P}} A_n^m \cdot \mathcal{W}(\pi(k, m)). \quad (2.22)$$

При $n \rightarrow \infty$ величина A_n^m растёт как $A_n^m \asymp n^m$. В случае нечётных k это означает, что моменты стремятся к нулю. Если же k — чётное число, то в пределе выживают только слагаемые, соответствующие $m = k/2 + 1$. Как следует из леммы 2.4, подграф $\tilde{G}$ в этом случае является деревом, причём пути $\pi(k, k/2 + 1)$ проходят по каждому ребру ровно два раза. Вес таких путей не зависит от класса эквивалентности и равен

$$\mathcal{W}(\pi(k, k/2 + 1)) = \sigma^k. \quad (2.23)$$

Таким образом, предельное выражение для чётных моментов равно числу классов эквивалентности путей $\pi(k, k/2 + 1)$, то есть

$$\langle \bar{L}_{M_n}, x^k \rangle = \begin{cases} \|\{\pi(k, k/2 + 1) \in \mathcal{P}\}\|, & k \in 2\mathbb{N} \\ 0, & k \in 2\mathbb{N} + 1 \end{cases} \quad (2.24)$$

Остается предъявить процедуру построения неэквивалентных путей из k шагов, обходящих дерева с $(k/2 + 1)$ вершинами так, что каждое ребро проходится два раза. Будем считать, что мы обходим вершины $\tilde{V} = (1, \dots, k/2 + 1)$, а итоговый результат представляет собой последовательность вершин $(v(0), \dots, v(k))$. Без ограничения общности можно положить $v(0) = 1$ и $v(1) = 2$, то есть первый шаг делается вдоль ребра $1 \rightarrow 2$. В дальнейшем, поскольку пройденные ребра не должны образовывать циклов, на каждом шаге мы можем либо перейти в ещё не посещённую вершину, либо вернуться в вершину, в которой были на предыдущем шаге. То есть имеется две возможности:

- (i) $v(i) \rightarrow v(i+1) = \max(v(0), \dots, v(i)) + 1$,
- (ii) $v(i) \rightarrow v(i-1)$.

Путь заканчивается возвращением на шаге k в исходную вершину: $v(k) = v(0) = 1$.

Далее, сопоставим последовательности $(v(0), \dots, v(k))$ последовательность из плюс-минус единиц $u = (u_1, \dots, u_k)$, заданную следующим правилом: для всех $j = 1, \dots, k$ шагу $v(j) \rightarrow v(j+1)$ типа (i) — переход в новую вершину — ставим в соответствие $u_{j+1} = 1$, а с шагом типа (ii) — возвращение — соотносим $u_{j+1} = -1$. Ясно, что сумма членов такой последовательности на каждом шаге неотрицательна, то есть

$$\sum_{i=1}^l u_i \geq 0, \quad 1 \leq l \leq k,$$

а полная сумма равна нулю: $u_1 + \dots + u_k = 0$. Поэтому при замене единиц на левые скобки, а минус единиц — на правые получается *правильная скобочная последовательность*, в которой каждой левой сколке соответствует правая, а любой начальный кусок содержит не меньше левых скобок, чем правых. Также, по последовательности u можно построить *путь Дика* — ломаную линию на плоскости, представляющую собой путь из точки $(0, 0)$ в точку $(2k, 0)$, составленный из векторов $(1, u_i)$, а потому не опускающийся ниже оси абсцисс Ox (рис. 2.1).

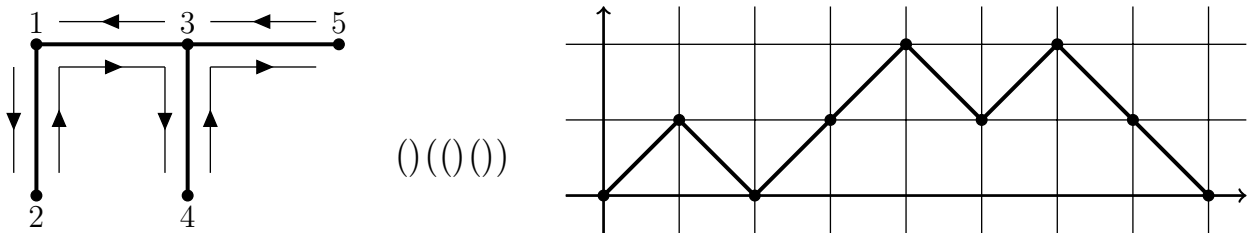


Рис. 2.1:

Итак, каждому обходу дерева можно сопоставить правильную скобочную последовательность или путь Дика. Очевидно и обратное: по каждому пути Дика можно построить представитель класса эквивалентности замкнутых путей из k шагов, проходящих ровно два раза по каждому ребру некоторого дерева $\tilde{G}$ с $\|\tilde{V}\| = k/2 + 1$ вершинами. Хорошо известно, что количество путей Дика, а следовательно, и выражение для моментов чётного порядка k даётся числом Каталана $C_{k/2}$. Таким образом, сходимость моментов в среднем, то есть утверждение (b), доказана.

Доказательство утверждения (c) мы оставляем читателю в виде упражнения. Отметим лишь общий план действий. Чтобы убедиться, что имеет место сходимость почти

наверное, достаточно исследовать поведение дисперсии $\mathbb{D}\langle L_{M_n}, x^k \rangle$. Доказательство снова проводится методом моментов, но на этот раз необходимо провести суммирование по парам путей из k шагов. Сначала имеет смысл удостовериться в том, что пары путей, не имеющих общих рёбер, не дают вклада в дисперсию. Этот факт помогает установить, что дисперсия стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, откуда с помощью неравенства Чебышёва следует сходимость по вероятности. Если же явно выделить пары путей, ответственных за ведущий ненулевой вклад, то можно показать, что дисперсия убывает достаточно быстро, а потому можно воспользоваться неравенством Маркова и леммой Бореля-Кантелли для доказательства сходимости почти наверное. $\square$

Упражнение 2.5. Докажите, что число правильных скобочных последовательностей из $2k$ скобок совпадает с количеством путей Дика длины $2k$ и равно k -ому числу Каталана C_k .

Упражнение 2.6. Проведите соответствующие вычисления и убедитесь, что в условиях теоремы Вигнера имеет место сходимость $\langle L_{M_n}, x^k \rangle \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.п.}} \langle \bar{L}_{M_n}, x^k \rangle$.

В приведённом доказательстве мы построили биекцию между классами эквивалентности обходов деревьев и путями Дика или правильными скобочными последовательностями. Дадим ещё пару комбинаторных интерпретаций этого результата.

Определение 2.7. Дерево с помеченной вершиной — корнем — называется корневым деревом или ориентированным деревом. Потомками данной вершины дерева, называются те вершины, для которых любой путь, соединяющий их с корнем, проходит через данную вершину. Упорядоченным называется дерево, у которого множество сыновей (ближайших потомков) каждой вершины упорядочено. Эквивалентно можно говорить о планарном дереве: ориентация дерева на плоскости задаёт естественный порядок его вершин.

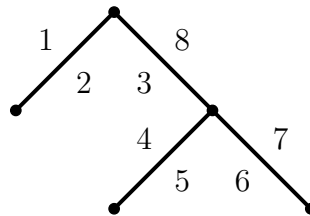


Рис. 2.2:

Заметим, что любое дерево в совокупности с порядком обхода его вершин задаёт упорядоченное корневое дерево или, эквивалентно, планарное дерево (рис. 2.2). Планарные деревья, таким образом, состоят в биекции с путями Дика (ср. с рис. 2.1).

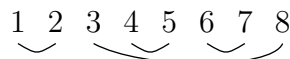


Рис. 2.3:

;

Ещё один важный комбинаторный объект, для которого можно установить биективное соответствие с путями Дика, правильными скобочными последовательностями

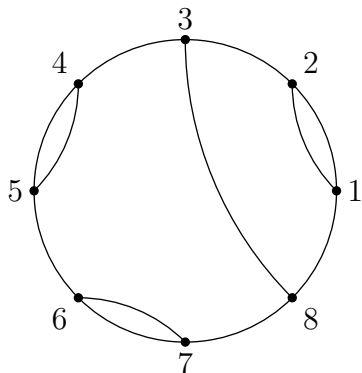


Рис. 2.4:

и планарными корневыми деревьями — это так называемое неперекрёстное разбиение. Оно может быть построено следующим образом. Перенумеруем шаги обходящего дерева пути числами от 1 до k . Выпишем эти числа подряд и соединим снизу дугами пары чисел, которые соответствуют шагам вдоль одного и того же ребра, сделанным с разных сторон (рис. 2.3). Ясно, что так как эта конструкция построена по обходу планарного дерева, дуги можно провести так, чтобы они не пересекались.

Определение 2.8. Разбиение упорядоченного множества $\{1, \dots, k\}$ на подмножества называется неперекрёстным разбиением, если для любых четырёх его элементов $1 \leq a < b < c < d \leq k$, а также для любых двух подмножеств разбиения A и B из условия $a, c \in A$ и $b, d \in B$ следует, что $A = B$. Неперекрёстное разбиение на множества из двух элементов будем называть попарным неперекрёстным разбиением или неперекрёстным парасочитанием.

Очевидно, разбиение будет неперекрёстным, если его можно изобразить, соединив между собой элементы каждого подмножества непересекающимися дугами, нарисованными под строчной записью множества $\{1, \dots, 2k\}$, как это было сделано на рис. 2.3. Эквивалентно, можно расположить элементы множества на окружности; в этом случае неперекрёстное разбиение изображается непересекающимися хордами, соединяющими элементы подмножеств (рис. 2.4). Как видно из рассуждения выше, моменты полукругового распределения определяются числом попарных неперекрёстных разбиений множества из $2k$ элементов.

Напомним, что суммирование по разбиениям уже встречалось нам в разделе 1 при обсуждении связи между моментами и кумулянтами в обычной теории вероятности. В частности, в силу того, что у стандартного нормального распределения $\mathcal{N}(0, 1)$ лишь один кумулянт $c_2 = 1$ не равен нулю, момент порядка $2k$ равен числу парных разбиений (парасочитаний) в множестве из $2n$ элементов. Поэтому в некотором смысле закон Вигнера аналог распределения Гаусса. В дальнейшем мы увидим, что теории свободной вероятности суммирование по неперекрёстным разбиениям играет ту же роль, что суммирование по любым разбиениям, которое возникало выше в связи с переходом от моментов к кумулянтам.