Программа экзамена, 3-ий модуль

1. Коммутативное кольцо. Единственность единицы. $0 * a = 0, (-1) * a = -a$. Делители нуля. Целостные кольца. Обратимые элементы. Поля. Примеры.

2. Идеалы в коммутативных кольцах. Сумма и пересечение идеалов. Конечно порожденные идеалы. Главные идеалы.

3. Гомоморфизм колец. $\ker f$ — идеал, $\operatorname{im} f$ — подкольцо. $f(0) = 0$. Для целостных колец K_1, K_2 и гомоморфизма $f : K_1 \longrightarrow K_2$ верно, что либо $\ker f = K_1$, либо $f(1) = 1$.

4. Фактор кольцо. Теорема о гомоморфизме колец.

5. Евклидово кольцо. Деление с остатком. Алгоритм Евклида. Существование НОД. Евклидово кольцо — кольцо главных идеалов. Линейное представление НОД. Взаимная простота.

6. Неприводимые элементы кольца. В кольце главных идеалов K для неприводимого $p \in K$ идеал (p) максимальный, простой и $K/(p)$ поле.

7. Кольцо главных идеалов факториально.

8. Примеры нефакториальных колец $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}], \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.

9. Деление с остатком в целых числах $\mathbb{Z}$, в любом поле $\Bbbk$, в кольце многочленов над полем $\Bbbk[x]$, в кольце формальных степенных рядов $\Bbbk[[x]]$, в кольце целых гауссовых чисел $\mathbb{Z}[i]$, в кольце целых чисел Эйзенштейна $\mathbb{Z}[w]$, где $w^2 + w + 1 = 0$, $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

10. Прямое произведение колец. Китайская теорема об остатках в кольце целых числел и в кольце многочленов.

11. Многочлены. Теорема Безу. Сколько может быть корней у многочлена степени n в поле.

12. Содержание ($cont$) многочлена с целыми коэффициентами. Примитивные многочлены в $\mathbb{Z}[x]$. Произведение примитивных многочленов. Лемма Гаусса в кольце целых чисел: Приводимый над $\mathbb{Q}$ многочлен с целыми коэффициентами раскладывается в произведение двух многочленов с целыми коэффициентами. При этом степень каждого из этих многочленов меньше чем степень изначального многочлена.

13. Критерий Эйзенштейна неприводимости многочлена.

$$\Phi_p = x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1$$

неприводимый над $\mathbb{Q}$ многочлен, если p - простое.

14. Интерполяционный многочлен Лагранжа.

15. Поле. Характеристика поля. Положительная характеристика поля — простое число.

16. Поля $\mathbb{Z}/(p)$. Малая теорема Ферма $x^p - x = 0 \pmod{p}$.
Теорема Вильсона $(p-1)! = -1 \pmod{p}$.

17. Целые гауссовы числа $\mathbb{Z}[i]$. Евклидово кольцо, идеалы, факториальность, простые целые гауссовы числа. Разложение натурального числа в сумму двух квадратов целых чисел. Поля $\mathbb{Z}[i]/(p)$.

18. Все идеалы в $\Bbbk[[x]]$. Обратимые и неприводимые элементы в $\Bbbk[[x]]$.

19. Расширения полей. Алгебраическое расширение поля. Присоединение корня неприводимого многочлена.

20. Поле разложения для многочлена.

21. Сколько может быть элементов в конечном поле. Построение p^n-элементного поля.

22. Эндоморфизм Фробениуса для поля с конечной характеристикой.

23. Мультипликативная группа конечного поля.

24. Поле частных целостного кольца. Поля частных для $\mathbb{Z}, \Bbbk[x], \Bbbk[[x]]$.

25. Разложение рациональной функции в сумму простейших дробей.

26. Линейные рекуррентные последовательности и рациональные производящие функции.

27. Формула Бине для чисел Фибоначчи.

28. Общий вид k-го элемента линейной рекуррентной последовательности.

29. Рациональная производящая функция и линейное рекуррентное соотношение для последовательности $z_k = P_n(k)$, где P_n- многочлен степени n.

30. Симметрические многочлены. Элементарные симметрические многочлены. Теорема Виета.

31. Лексикографический порядок на мономах. Старший моном произведения многочленов. Вид старшего монома симметрического многочлена.

32. Основная теорема о симметрических многочленах.

33. $s_k = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^k$. Производящая функция для элементарных симметрических многочленов и ее логарифмическая производная. Тождества Ньютона для s_k и σ_i.

34. Определение группы, единственность единицы и обратных элементов. Подгруппы.

35. Гомоморфизм групп. Ядро и образ гомоморфизма. Теорема о гомоморфизме.

36. Действие группы на множестве, разбиение на непересекающиеся орбиты, эффективные, свободные и транзитивные действия, стабилизатор элемента. Фактор множество по действию группы. Стабилизаторы всех элементов одной орбиты сопряжены. Формулы для длины орбиты конечной группы и для числа её орбит на конечном множестве (формула Полиа–Бернсайда).

37. Циклические подгруппы, порядок элемента группы.

38. Левое и правое действие группы на себе, теорема Лагранжа о смежных классах и индексе подгруппы.

39. Присоединённое действие группы на себе, классы сопряжённости. Нормальные подгруппы и фактор группы.

40. Группы $\mathrm{S_n}$ и $\mathrm{A_n}$. Знак, длина и цикловой тип перестановки. Описание присоединённого действия, класса сопряжённости и централизатора данной перестановки, число элементов в них.

41. Простота группы A_5.

42. Группа $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ и ее нормальная подгруппа $\mathrm{SL}_n(\Bbbk)$, $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)/\mathrm{SL}_n(\Bbbk)$. Классы сопряженности в группе $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Колличество элементов в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q), \mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$.

43. Проективное пространство $\mathbb{P}_n(\Bbbk)$, группа $\mathrm{PGL}_n(\Bbbk)$.

44. Группы ортоганальных матриц $\mathrm{O_n}$. Группы $\mathrm{O}_2, \mathrm{SO}_2, \mathrm{O}_3, \mathrm{SO}_3$. Классы сопряженности и из каких линейных оперторов состоят эти группы. SO_3 как $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$.

45. Группы унитарных матриц $\mathrm{U_n}, \mathrm{SU_n}$. Изоморфизм $\mathrm{SO}_2 \cong U_1$. Гомоморфизм $\mathrm{SU}_2 \mapsto \mathrm{SO}_3$.

46. Группы диэдра D_n. Группы автоморфизмов и собственных автоморфизмов правильных многогранников.

47. Группы автоморфизмов правильных $n-$мерных симплексов.

48. Конечнопорождённые абелевы группы. Свободные конечнопорождённые абелевы группы, базис, ранг, корректность определения ранга.

49. Подгруппы свободных абелевых групп, их ранги.

50. Теорема о взаимных базисах в свободной абелевой группе и ее подгруппе.

51. Классификация конечнопорожденных абелевых групп (без доказательства).

Список литературы

[1] Э.Б. Винберг, Курс Алгебры

[2] В. Сендеров, А. Спивак, Суммы квадратов и целые гауссовы цисла

[3] А.Л.Городенцев, Алгебра–1

[4] А.Л.Городенцев, Алгебра–2

[5] А. И. Кострикин, Введение в алгебру. Часть 1