

Образцы задач для экзамена

Задача 1. Существует ли конечное поле характеристики 0? Существует ли бесконечное поле положительной характеристики?

Задача 2. Существует ли поле из 6 элементов?

Задача 3. Может ли поле из 9 элементов быть подполем поля из 27 элементов?

Задача 4. Что можно сказать про группу, у которой нет нетривиальных собственных подгрупп?

Задача 5. Найдите k -тый член последовательности a_k , если:

а) $a_0 = 1, a_1 = -7$ и $a_k = 5a_{k-1} - 6a_{k-2}$ при $k \geq 2$,

б) $a_0 = 5, a_1 = 3, a_2 = 48$ и $a_k = a_{k-1} + 8a_{k-2} - 12a_{k-3}$ при $k \geq 3$.

Задача 6. Верно ли, что для любого многочлена $f \in \mathbb{K}[x]$ ряд $\sum_{k \geq 0} f(k)x^k$ является рациональной функцией?

Задача 7. Вычислите производящую функцию для последовательностей

а) $1^2, 2^2, 3^2, \dots, k^2, \dots$ б) $n^2, (n+1)^2, (n+2)^2, \dots, (n+k)^2, \dots$

Задача 8. Найдите производящую функцию для чисел Фибоначчи. Выведите явную формулу для n -ого числа Фибоначчи.

Задача 9. Пусть многочлен $f \in \mathbb{R}[x]$ степени n имеет n различных корней. Разложите на простейшие дроби:

а) $\frac{f'}{f}$

б) $\frac{1}{f}$

Задача 10. Разложите $\frac{1}{x^p - x}$ на простейшие дроби над полем \mathbb{F}_p , для простого p .

Задача 11. Докажите неприводимость над полем \mathbb{Q} многочлена $\Phi_p = x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1$, где p — простое число.

(подсказка: можно сделать замену $y = x - 1$)

Задача 12. Докажите, что многочлен

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

не имеет кратных корней.

Задача 13. Выпишите все неприводимые многочлены степени ≤ 5 над полем \mathbb{F}_2 и все неприводимые приведённые многочлены степени ≤ 4 над полем \mathbb{F}_3 .

Задача 14. У скольких многочленов степени $\leq n$ из кольца $\mathbb{F}_2[x]$ нет корней в \mathbb{F}_2 ?

Задача 15. Пусть поле \mathbb{F}_q конечно. Верно ли, что любая функция $\mathbb{F}_q \rightarrow \mathbb{F}_q$ является многочленом? Существует ли ненулевой многочлен $f \in \mathbb{F}_q[x]$, задающий тождественно нулевую функцию?

Задача 16. Является ли кольцо вычетов $\mathbb{Q}[x]/(x^4 + 1)$ полем? Найдите $[1 + x]^{-1}$ и $[1 + x^2]^{-1}$, если существует.

Задача 17. Для кольца целых гауссовых чисел $\mathbb{Z}[i]$ найдите такие $n \in \mathbb{Z}$, что $\mathbb{Z}[i]/(n)$ поле. Сколько элементов содержит это поле.

Задача 18. Сколько элементов в фактор-кольце $\mathbb{Z}[i]/(a + ib)$? Найдите инвариантные множители и взаимные базисы в $\mathbb{Z}[i]$ и в идеале $(a + ib)$ как в \mathbb{Z} -подмодуле.

Задача 19. Докажите, что для любого идеала I в кольце целых чисел Эйзенштейна фактор-кольцо $\mathbb{Z}[w]/(I)$ содержит конечное число элементов.

- Задача 20.** Пусть $\mathbb{k} \subset \mathbb{F}$ — два поля, и \mathbb{F} — конечномерно как векторное пространство над \mathbb{k} . Верно ли, что любой элемент поля \mathbb{F} является корнем некоторого многочлена из $\mathbb{k}[x]$?
- Задача 21.** Покажите, что $P \in \mathbb{Z}[x]$ не может иметь целых корней, если $P(0)$ и $P(1)$ нечетные.
- Задача 22.** Докажите, что неприводимый над \mathbb{Q} многочлен не имеет кратных комплексных корней.
- Задача 23.** Найдите остаток от деления многочлена $x^{2025} + x + 1$ на многочлен $x^2 + x + 1$.
- Задача 24.** Докажите, что если \mathbb{F}_q — поле из q элементов, то $x^q - x = \prod_{a \in \mathbb{F}_q} (x - a)$
- Задача 25.** Изоморфны ли группы $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\} \subset \mathbb{H}$, где \mathbb{H} это тело кватернионов, и диэдральная группа D_4 .
- Задача 26.** Изоморфны ли группы S_3 и $SL_2(\mathbb{F}_2)$?
- Задача 27.** Положим $U_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$ и $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Докажите, что группы \mathbb{C}^*/U_n и \mathbb{C}^* изоморфны.
- Задача 28.** Покажите, что симметрическая группа S_n порождается двумя элементами.
- Задача 29.** Разлагается ли группа $GL_2(\mathbb{R})$ в прямое произведение подгрупп $SL_2(\mathbb{R})$ и $D = \{\lambda E : \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$? Такой же вопрос про группу $GL_3(\mathbb{R})$.
- Задача 30.** Покажите, что любая подгруппа конечнопорожденной абелевой группы тоже конечнопорожденная.
- Задача 31.** Докажите, что конечная абелева группа G порядка n является циклической тогда и только тогда, когда для любого d , делящего n , в G существует единственная подгруппа порядка d .
- Задача 32.** Пусть R — евклидово кольцо, $u \in R \setminus \{0\}$ — элемент наименьшей нормы. Докажите, что u обратим.
- Задача 33.** Пусть конечная группа G имеет две фактор группы F_1 и F_2 порядки которых взаимно просты, причем $|G| = |F_1| \cdot |F_2|$. Докажите, что группа $G \cong F_1 \times F_2$ изоморфна прямой сумме.
- Задача 34.** Приведите пример двух изоморфных, но не совпадающих подполей в \mathbb{C} .
- Задача 35.** Являются ли кольца $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ факториальными?
- Задача 36.** Сколько k -мерных векторных подпространств в n -мерном векторном пространстве над полем из q элементов? В частности сколько точек в $\mathbb{P}_n(\mathbb{F}_q)$.
- Задача 37.** Сколько элементов в группах $GL_n(\mathbb{F}_q)$, $SL_n(\mathbb{F}_q)$, $PGL_n(\mathbb{F}_q)$?
- Задача 38.** Сколько в $\mathbb{Z}/(3) \oplus \mathbb{Z}/(3) \oplus \mathbb{Z}/(3) \oplus \mathbb{Z}/(3)$ подгрупп, изоморфных
а) $\mathbb{Z}/(3)$ б) $\mathbb{Z}/(9)$ в) $\mathbb{Z}/(3) \oplus \mathbb{Z}/(3)$?
- Задача 39.** Сколько различных разложений в прямую сумму двух собственных подгрупп имеет абелева группа $\mathbb{Z}/(5) \oplus \mathbb{Z}/(5)$?
- Задача 40.** Какие классы сопряженности из S_n распадаются на несколько классов в A_n ?
- Задача 41.** Покажите, что всякая перестановка из S_n может быть представлена как произведение нескольких сомножителей равных циклам (12) и $(123 \dots n)$.
- Задача 42.** Покажите, что всякая четная перестановка может быть представлена как произведение тройных циклов.
- Задача 43.** Покажите, что группы собственных движений тетраэдра, куба, октаэдра изоморфны, соответственно, группам A_4 , S_4 , S_4 .
- Задача 44*.** Покажите, что группа собственных движений икосаэдра изоморфна группам A_5 .
- Задача 45.** Какие из ниже перечисленных групп изоморфны:
а) S_n б) A_n в) D_n г) Группы движений правильных многогранников д) Группы собственных движений правильных многогранников е) Группы движений правильных n -мерных симплексов.