

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ
Факультет математики

Специальный курс

СЛУЧАЙНЫЕ МАТРИЦЫ,
СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ
И
ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МОДЕЛИ

Лекции:

Поволоцкий Александр Маркович

Москва
2023

Оглавление

1	Необходимые сведения из теории вероятностей	11
1.1	Вероятностное пространство, случайные величины и их характеристики	11
1.2	Сходимость последовательностей случайных величин и предельные теоремы.	15
1.3	Мартингалы и концентрация меры	20
1.4	Слабая сходимость случайных мер	23
2	Метод моментов и закон Вигнера	25
3	Метод преобразования Стилтеса и закон Марченко-Пастура	33
3.1	Статистики многокомпонентных выборок и сингулярные числа матриц.	33
3.2	Преобразование Стилтеса	35
3.3	Преобразование Стилтеса эмпирической спектральной меры.	38
3.4	Теорема о перемежаемости и возмущение спектра	41
3.5	Доказательство теоремы Марченко-Пастура	44
4	Инвариантные β-ансамбли Дайсона	49
4.1	Симметрические пространства и группы Ли	50
4.2	Интегрирование по пространствам матриц	52
4.2.1	Некомпактные матричные многообразия	53
4.2.2	Компактные матричные многообразия	57
4.3	Инвариантные матричные ансамбли	60
4.3.1	Гауссовы ансамбли	60
4.3.2	Круговые ансамбли	61
4.3.3	Ансамбли Вишерта	61
4.4	Распределение собственных значений при $n \rightarrow \infty$ и задача кулоновского газа.	62

5	Точечные процессы	67
5.1	Детерминантный точечный процесс	73
5.2	Биортогональный ансамбль.	75
5.3	Корреляционные функции в унитарных ансамблях	79
6	Элементы теории ортогональных многочленов	81
6.1	Использование многочленов Эрмита для построения ядра GUE	85
6.1.1	Норма многочленов Эрмита и трёхчленное соотношение	86
6.1.2	Корреляционное ядро и интегральные представления	87
7	Определитель Фредгольма	89
7.1	Функциональный подход	89
7.2	Определитель Фредгольма. Операторный подход.	96
7.2.1	Краткий экскурс в спектральную теорию ограниченных операторов в гильбертовых пространствах	96
7.2.2	Тензорные произведения гильбертовых пространств и определитель Фредгольма	101
8	Вспомогательные сведения	107
8.1	Формулы Сохоцкого-Племеля	107
8.2	Дополнение Шура	107
8.3	Кватернионы и матрицы кватернионов	109
8.4	Формула Коши-Бине.	110

Введение

В данном курсе обсуждается круг вопросов, связанный с образованием предельных форм и наличием случайных отклонений, описываемых универсальными вероятностными законами. Ситуации, в которых сложные многокомпонентные системы при огрубленном рассмотрении ведут себя простым универсальным образом, не зависящим от деталей исходной системы, хорошо знакомы как математикам, так и физикам. В теории вероятности они описываются утверждениями, известными как Закон Больших Чисел (ЗБЧ) и Центральная Предельная Теорема (ЦПТ). Однако стандартные примеры таких утверждений, содержащиеся в учебниках, относятся к суммам большого числа независимых случайных величин, и хотя класс подобных задач достаточно широк, требование независимости ограничивает область приложений получаемых результатов. Естественно, возникает вопрос, можно ли сформулировать столь же содержательные и универсальные утверждения о каких-либо случайных системах с большим числом степеней свободы, выходящие за рамки невзаимодействующего мира.

В последние годы было найдено множество замечательных связей между, на первый взгляд, совершенно различными задачами математики, а также математической и теоретической физики. С математической стороны это комбинаторные и вероятностные задачи о системах с большим числом степеней свободы. Среди них задача описания собственных значений матриц со случайными элементами, задачи о статистике случайных диаграмм Юнга, задачи о замощении различных областей плоскости доминошками или ромбиками, задачи о перечислении непересекающихся путей на решётках. С физической стороны это задачи статистической физики о распространении границ разделов между различными средами, потоках взаимодействующих частиц, полимерах в неупорядоченных средах и т.д.

Курс посвящён возникновению универсального поведения в различных моделях многокомпонентных случайных систем. С формальной точки зрения мы рассмотрим широкий класс многомерных случайных величин и случайных процессов со взаимодействием, заданным простыми локальными правилами. Оказывается, что в правильно выбранных, естественных единицах измерения такие системы обнаруживают удивительно схожее поведение. А именно, если число степеней свободы в рассматриваемых системах велико, то возникающие при соответствующем перемасштабировании наборы случайных величин демонстрируют «свойство концентрации» к некоторым неслучайным детерминистическим предельным формам. Случайные отклонения от этих предельных форм, «флуктуации», измеренные в характерном «флуктуационном» масштабе, описываются небольшим набором универсальных вероятностных распределений, функциональный вид которых зависит только от глобальных симметрий системы, и не зависит от «микроподробностей» исходной задачи.

Вывод точного, явного вида универсальных распределений — это задача, которую

можно решить аналитически лишь для систем, обладающих специальной математической структурой, которая обеспечивает наличие большого количества симметрий и которая оказывается тесно связанной с понятием интегрируемости. Эта структура стоит за множеством красивых точных математических результатов, которые в скейлинговом пределе приводят к утверждениям, аналогичным ЗБЧ и ЦПТ. Хотя курс не следует какому либо учебному пособию, большую часть материала можно найти в книгах и курсах [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7], приведенных в списке литературы ниже.

Благодарности

Автор благодарит Хайдара Нурлигареева за составление конспектов лекций и подбор упражнений, которые легли в основу этого текста.

Литература

- [1] Anderson G. W., Guionnet A., Zeitouni O. An introduction to random matrices. No. 118. — Cambridge university press, 2010.
- [2] Bai Z., Silverstein J. W. Spectral analysis of large dimensional random matrices. — Springer, 2010. — Vol. 20.
- [3] Mingo J. A., Speicher R. Free probability and random matrices. — Springer, 2017. — Vol. 35.
- [4] Speicher R. Lecture Notes on "Free Probability Theory" // arXiv preprint arXiv:1908.08125. — 2019.
- [5] Метя М. Л. Случайные матрицы // М.: МЦНМО. — 2012.
- [6] Forrester P. J. Log-gases and random matrices (LMS-34). — Princeton University Press, 2010.
- [7] Borodin A., Gorin V. Lectures on integrable probability // Probability and statistical physics in St. Petersburg. — 2016. — Vol. 91. — P. 155–214.

Глава 1

Необходимые сведения из теории вероятностей

В этом разделе мы напоминаем основные понятия теории вероятности, которые будут служить языком нашего изложения, а также приведем доказательства нескольких утверждений, которые понадобятся нам в дальнейшем.

1.1 Вероятностное пространство, случайные величины и их характеристики

Любой математический текст, посвященный обсуждению вероятностных задач, начинается с постулирования вероятностного пространства. Вероятностное пространство есть тройка $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, включающая

- пространство элементарных исходов Ω ,
- сигма-алгебру его подмножеств $\mathcal{F} \subset 2^\Omega$
- и вероятностную меру $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$, ставящую в соответствие каждому множеству из \mathcal{F} число от нуля до единицы.

На практике обычно изучается не само вероятностное пространство, а случайные величины, т.е. измеримые функции на нем

$$\xi : \Omega \rightarrow \mathfrak{X},$$

принимающие значения в некотором пространстве \mathfrak{X} , наделенном топологией и, соответственно, сигма-алгеброй борелевских множеств. В общем случае мы обычно будем понимать под \mathfrak{X} польское (т.е. полное сепарабельное метрическое) пространство, в простейшем варианте сводящееся к \mathbb{R} или подобным.

Рассмотрим простейший случай $\mathfrak{X} = \mathbb{R}$. Для случайной величины $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ можно определить матожидание

$$\mathbb{E}\xi := \int_{\Omega} \xi(\omega) d\mathbb{P} \quad (1.1)$$

Полезное понятие, обобщающее матожидание, – условное матожидание. Пусть $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ – σ -подалгебра \mathcal{F} . Условным матожиданием случайной величины ξ относительно \mathcal{F}'

называется случайная величина $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}')$, измеримая относительно \mathcal{F}' , такая что для любой функции $\eta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, также измеримой относительно \mathcal{F}' , имеем

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}')\eta] = \mathbb{E}\xi\eta. \quad (1.2)$$

Как можно охарактеризовать случайную величину ξ на \mathbb{R} , так чтобы, не вникая в детали отображения $\xi(\omega)$, задать меру множеств, отображаемых в те или иные подмножества \mathbb{R} ? Для этого служит функция распределения вероятности

$$F_\xi(x) := \mathbb{P}(\{\omega : \xi(\omega) \leq x\}), \quad (1.3)$$

а если мера на \mathbb{R} , индуцируемая отображением ξ , абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, то и плотность вероятности

$$f_\xi(x) = F'_\xi(x). \quad (1.4)$$

Аналогично можно рассматривать несколько случайных величин на одном и том же вероятностном пространстве. Они характеризуются совместными функциями распределения

$$F_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}(\{\omega : \xi_1(\omega) \leq x_1, \dots, \xi_n(\omega) \leq x_n\}) \quad (1.5)$$

При этом мы говорим, что случайные величины независимы, если их совместная функция распределения распадается в произведение индивидуальных функций распределения,

$$F_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n F_{\xi_k}(x_k), \quad (1.6)$$

что немедленно влечет подобную факторизацию матожиданий произведений, как самих случайных величин, так и их функций.

Альтернативное описание распределения случайной величины ξ дает характеристическая функция

$$\varphi_\xi(x) = \mathbb{E}(e^{ix\xi}), \quad (1.7)$$

которая, будучи преобразованием Фурье меры, определяет распределение единственным образом.

Близко связанное с характеристической функцией понятие производящей функции моментов

$$M_\xi(x) = \mathbb{E}(e^{x\xi}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n x^n}{n!}. \quad (1.8)$$

определено, когда все моменты

$$m_n = \mathbb{E}(\xi^n) \quad (1.9)$$

распределения случайной величины ξ конечны. Ее можно понимать либо как формальный ряд, либо как аналитическую в некоторой окрестности нуля функцию. В первом случае экспонента под знаком матожидания в (1.8) также понимается как формальный ряд. Во втором предполагается, что ряд в правой части (1.8) сходится в некоторой окрестности нуля, что накладывает дополнительные ограничения на скорость убывания вероятности на бесконечности. Получившуюся аналитическую функцию можно аналитически продолжить из области сходимости как минимум на всю мнимую ось. Результат естественно совпадает с характеристической функцией.

1.1. ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРОСТРАНСТВО, СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Поскольку знание характеристической функции эквивалентно знанию распределения, мы подходим к ответу на естественный вопрос о том, можно ли, зная все моменты (кумулянты) случайной величины, однозначно восстановить распределение. Эта задача известна как *проблема моментов*. Одно из её решений состоит как раз в том, чтобы производящая функция моментов $M_\xi(x)$ была аналитической в некоторой окрестности нуля, то есть чтобы моменты убывали достаточно быстро. Это требование эквивалентно *критерию Рисса*:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_n^{\frac{1}{n}}}{n} < \infty. \quad (1.10)$$

В частности, если носитель распределения конечен, то есть $\text{Supp}(\xi) \in [-M, M]$ для некоторой константы M , то при всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $m_n \leq M^n$ и проблема моментов имеет единственное решение.

Замечание 1.1. *Наиболее полное и чуть менее ограничительное решение той же проблемы дается критерием Карлемана, который требует сходимости ряда обратных четных моментов.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{m_{2n}} < \infty. \quad (1.11)$$

Моменты не всегда являются удобной характеристикой распределения. Зачастую удобнее пользоваться *кумулянтами*, являющимися полиномиальными комбинациями моментов. Кумулянты определяются как коэффициенты c_n ряда Тейлора логарифма производящей функции моментов, который будем называть *производящей функцией кумулянтов*:

$$C_\xi(x) = \ln M_\xi(x) = \ln \mathbb{E}(e^{x\xi}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n x^n}{n!}. \quad (1.12)$$

Кумулянты исторически называют также *полуинвариантами* или *семиинвариантами*.

Упражнение 1.2. *Пусть случайные величины ξ_1, \dots, ξ_n являются независимыми, а числа a_1, \dots, a_n представляют собой некоторый набор констант. Докажите, что (при условии, что указанные величины существуют):*

- а) $\varphi_{a_1\xi_1+\dots+a_n\xi_n}(x) = \varphi_{\xi_1}(a_1x) \cdot \dots \cdot \varphi_{\xi_n}(a_nx)$,
- б) $M_{a_1\xi_1+\dots+a_n\xi_n}(x) = M_{\xi_1}(a_1x) \cdot \dots \cdot M_{\xi_n}(a_nx)$,
- в) $C_{a_1\xi_1+\dots+a_n\xi_n}(x) = C_{\xi_1}(a_1x) + \dots + C_{\xi_n}(a_nx)$.

Таким образом, как видно из упражнения 1.2, важной особенностью кумулянтов является их аддитивность: кумулянты суммы независимых случайных величин — это сумма кумулянтов этих величин.

Кумулянты и моменты содержат одинаковую информацию и могут быть однозначно выражены друг через друга формальным перерасложением в ряд логарифмированного (соответственно, экспоненцированного) ряда для производящей функции моментов (кумулянтов).

Упражнение 1.3. *Докажите, что между первыми тремя моментами и кумулянтами выполняются следующие соотношения*

$$m_1 = c_1, \quad m_2 = c_2 + c_1^2, \quad m_3 = c_3 + 3c_1c_2 + c_1^3 \quad (1.13)$$

$$c_1 = m_1, \quad c_2 = m_2 - m_1^2, \quad c_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3 \quad (1.14)$$

В частности, $c_1 = \mathbb{E}(\xi)$ и $c_2 = \mathbb{D}(\xi)$.

Общая формула, выражающая моменты через кумулянты, имеет вид

$$m_n = \sum_{\pi \in \mathcal{P}(n)} \prod_{I \in \pi} c_{|I|}. \quad (1.15)$$

Здесь суммирование ведётся по множеству

$$\mathcal{P}(n) = \left\{ \pi = \{I_1, \dots, I_k\} : [n] = \bigcup_{i=1}^k I_i; I_i \cap I_j = \emptyset, i \neq j; k \in [n] \right\}. \quad (1.16)$$

разбиений множества

$$[n] := \{1, \dots, n\}$$

на все возможные подмножества.

Приведенные формулы моментов и кумулянтов одной случайной величины – частный случай более общих формул для характеристик набора случайных величин. Пусть ξ_1, \dots, ξ_n – набор из n случайных величин, не обязательно различных, $n \in \mathbb{N}$. Определим совместные моменты как полилинейные функционалы степени n

$$m_n(\xi_1, \dots, \xi_n) := \mathbb{E}(\xi_1 \cdots \xi_n). \quad (1.17)$$

Тогда можно определить и совместные кумулянты, как полилинейные функционалы, $c_k(x_1, \dots, x_k)$, связанные с моментами соотношением, частным случаем, которого является соотношение (1.15),

$$m_n(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_{\pi \in \mathcal{P}(n)} \prod_{I \in \pi} c_{|I|}(\xi_I), \quad (1.18)$$

где $I = (i_1, \dots, i_{|I|})$ – блоки разбиения π и мы ввели обозначение $\xi_I = (\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_{|I|}})$. К этому соотношению можно также прийти, введя производящие функции совместных моментов и совместных кумулянтов для наборов случайных величин, и потребовав, чтобы, так же как и в случае одной случайной величины они были связаны между собой соотношением (1.12). В частности из этой связи следует следующий важный факт: кумулянты вычисленные на наборе случайных величин, среди которых имеется хотя бы одна, независимая от остальных, равны нулю.¹ Позже при обсуждении свободной вероятности мы познакомимся с некоммутативными аналогами этого факта и соотношения (1.18).

Охарактеризуем на языке моментов, кумулянтов и их производящих функций некоторые важнейшие примеры распределений.

Пример 1.4. Пусть случайная величина $\xi = a$ задаётся дельта-мерой Дирака

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \in A \\ 0, & \text{если } a \notin A, \end{cases} \quad (1.19)$$

т.е. $\mathbb{P}(\xi = a) = 1$, а её функция распределения представляет собой функцию Хэвисайда:

$$F_\xi(x) = \theta(x - a) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > a \\ 0, & \text{если } x \leq a. \end{cases} \quad (1.20)$$

¹Эти факты также хорошо известны специалистам по квантовой теории поля и статистической физике, где совместные моменты и кумулянты известны под названием несвязные и связанные корреляционные функции соответственно.

1.2. СХОДИМОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И ПРЕДЕЛЬНЫЕ

Тогда производящие функции моментов и кумулянтов имеют вид

$$M_\xi(x) = e^{xa}, \quad C_\xi(x) = xa.$$

То есть единственный ненулевой кумулянт дельта-распределения — первый: $c_1 = a$.

Пример 1.5. Второй и последний пример распределения, у которого почти все кумулянты равны нулю, а значит, $C_\xi(x)$ — многочлен, это распределение Гаусса. Для нормально распределённой случайной величины $\xi \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, задаваемой плотностью

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (1.21)$$

имеем

$$M_\xi(x) = \exp\left(\mu x + \frac{\sigma^2 x^2}{2}\right), \quad C_\xi(x) = \mu x + \frac{\sigma^2 x^2}{2}. \quad (1.22)$$

В частности, $c_1 = \mu$, $c_2 = \sigma^2$ и $c_k = 0$ при $k > 2$.

Пример 1.6. Ещё одно важное дискретное распределение, распределение Пуассона $\text{Poi}(\lambda)$, выделено тем, что все его кумулянты одинаковы:

$$\mathbb{P}(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \quad (1.23)$$

$$M_\xi(x) = e^{e^{\lambda x}}, \quad C_\xi(x) = e^{\lambda x} \quad (1.24)$$

и $c_k = \lambda$ при всех $k \in \mathbb{N}$.

Упражнение 1.7. Убедитесь в справедливости формул (1.22) и (1.24).

Упражнение 1.8. Докажите, что чётные моменты полукругового распределения Вигнера с плотностью $f_{sc}(x) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4-x^2} \cdot \mathbb{I}_{\{|x| \leq 2\}}$ даются числами Каталана, а нечётные равны нулю:

$$m_{2k} = C_k = \frac{C_{2k}^k}{k+1}, \quad m_{2k+1} = 0. \quad (1.25)$$

1.2 Сходимость последовательностей случайных величин и предельные теоремы.

Определение 1.9. Пусть $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность случайных величин определённых на одном вероятностном пространстве. Говорят, что эта последовательность сходится к случайной величине ξ

- почти наверное (или почти всюду), и пишут

$$\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} \xi,$$

если

$$\mathbb{P}\left(\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \xi\right) = \mathbb{P}\left(\omega: \xi_n(\omega) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \xi(\omega)\right) = 1, \quad (1.26)$$

т.е. имеет место поточечная сходимость везде, кроме, быть может, множества меры нуль;

- по вероятности, и пишут

$$\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \xi,$$

если для любого $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) = \mathbb{P}(\omega: |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0; \quad (1.27)$$

- по распределению или слабо, и пишут

$$\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} \xi,$$

если для любой непрерывной ограниченной функции $g \in C_b$:

$$\mathbb{E}(g(\xi_n)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}(g(\xi)), \quad (1.28)$$

или же, что эквивалентно сказанному выше, если последовательность функций распределения сходится к предельной функции распределения во всех её точках непрерывности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{\xi_n}(t) \rightarrow F_{\xi}(t) \quad \forall t: F_{\xi} \in C(t); \quad (1.29)$$

- в L^p , и пишут

$$\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^p} \xi,$$

если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|\xi_n - \xi|^p) = 0. \quad (1.30)$$

Упражнение 1.10. Докажите эквивалентность определений сходимости по распределению, заданных формулами (1.28) and (1.29).

Упражнение 1.11. Докажите следующие свойства сходимостей:

- если $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} \xi$, то $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \xi$, но обратное, вообще говоря, не верно;
- если $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^p} \xi$ и $p \geq 2$, то $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \xi$, но обратное, вообще говоря, не верно;
- если $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \xi$, то $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} \xi$, но обратное, вообще говоря, не верно;
- если $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} \xi$ и ξ вырожденная случайная величина, т.е. $\mathbb{P}(\xi = a) = 1$, то $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \xi$.

Сходимость по распределению — это частный случай *слабой сходимости мер*; отчасти упражнение 1.11 объясняет последнее название. Заметим, что здесь не обязательно требовать, чтобы члены последовательности и предельная случайная величина были определены на одном вероятностном пространстве. Отметим также, что хотя из сходимости по вероятности сходимость почти наверное не следует, *теорема Рисса* гарантирует нам, что из исходной последовательности можно извлечь подпоследовательность, которая будет сходиться к пределу почти наверное.

Опишем основные инструменты, используемые для доказательства сходимости.

Лемма 1.12. [Неравенство Маркова] Пусть ξ — неотрицательная случайная величина с конечным математическим ожиданием: $\xi \geq 0$ и $\mathbb{E}\xi \leq \infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ справедливо следующее неравенство:

$$\mathbb{P}(\xi > \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}\xi}{\varepsilon}. \quad (1.31)$$

1.2. СХОДИМОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И ПРЕДЕЛЬНЫЕ

В частности, если при некотором $k \in \mathbb{N}$ для случайной величины ξ выполнено неравенство $\mathbb{E}|\xi - \mathbb{E}\xi|^k < \infty$, то

$$\mathbb{P}(|\xi - \mathbb{E}\xi| > \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}|\xi - \mathbb{E}\xi|^k}{\varepsilon^k} \quad (1.32)$$

При $k = 2$ неравенство (1.32) превращается в *неравенство Чебышева* и используется для доказательства сходимости по вероятности: последняя имеет место, когда $\mathbb{D}\xi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Наиболее сложный случай сходимости — сходимости почти наверное, поскольку для его обоснования требуется привлекать утверждения о событиях, включающих бесконечное число членов последовательности. Однако если типичная последовательность сходится достаточно быстро, для доказательства также можно воспользоваться неравенством Маркова в комбинации с леммой Бореля-Контелли.

Лемма 1.13. [*Лемма Бореля-Контелли*] Пусть $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность случайных событий. Обозначим

$$A = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \equiv \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m \right) = \{ \omega : \forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N}, m > n : \omega \in A_m \},$$

т.е. A — это исходы, которые происходят бесконечно часто. Тогда:

I) если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$ сходится, то $\mathbb{P}(A) = 0$;

II) если все события A_n независимы в совокупности и числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$ расходится, то $\mathbb{P}(A) = 1$.

Теперь для обоснования сходимости почти наверное можно действовать следующим образом. Рассмотрим событие $A_n = \{ \omega : |\xi_n - \xi| > \varepsilon \}$. Если при некотором $k > 0$ ряд, составленный из $\mathbb{E}|\xi_n - \xi|^k$, сходится, то первая часть леммы Бореля-Контелли совместно с неравенством Маркова гарантируют сходимости почти наверное.

Вернемся к сходимости по распределению. Незаменимый инструмент для доказательства такой сходимости дает теорема Леви о непрерывности.

Теорема 1.14. [*Теорема Леви о непрерывности*] Пусть $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность случайных величин. Тогда если $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} \xi$, то для любого $t \in \mathbb{R}$:

$$\varphi_{\xi_n}(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \varphi_{\xi}(t).$$

Обратно, если $\varphi(t) \in C(0)$ — функция действительного аргумента, непрерывная в нуле, и для каждого $t \in \mathbb{R}$ имеет место сходимости $\varphi_{\xi_n}(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \varphi(t)$, то $\varphi(t)$ является

характеристической функцией случайной величины ξ , для которой $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} \xi$.

Часто вместо анализа сходимости характеристической функции удобнее исследовать сходимости моментов (кумулянтов) распределения.

Определение 1.15. Пусть для всех $k, n \in \mathbb{N}$ моменты

$$m_n^{(k)} = \mathbb{E}(\xi_k^n) \quad \text{и} \quad m_n = \mathbb{E}(\xi^n)$$

случайных величин ξ_k и ξ соответственно конечны для любого порядка n . Будем говорить, что ξ_n сходится к ξ в смысле моментов, если для каждого $n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m_n^{(k)} = m_n. \quad (1.33)$$

Вообще говоря, сходимости в смысле моментов и по распределению не эквивалентны и ни одна из них не влечет другую.

Упражнение 1.16. На примере меры

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) \delta_0 + \frac{1}{n} \delta_n$$

убедитесь в том, что из сходимости по распределению (и даже по вероятности), сходимость в смысле моментов не следует.

Тем не менее, в некоторых случаях можно утверждать, что из сходимости в смысле моментов следует сходимость по распределению. Так же, как в проблеме моментов, для этого достаточно, чтобы моменты росли не слишком быстро. В частности, если и ξ , и все ξ_n имеют компактный носитель, то сходимость следует из теоремы Вейерштрасса о полиномиальной аппроксимации.

Теорема 1.17. [Теорема Вейерштрасса о полиномиальной аппроксимации] Пусть f — функция, определённая на отрезке $[a, b]$ и непрерывная на этом отрезке. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой многочлен $P \in \mathbb{R}[x]$, что для всех $x \in [a, b]$ выполняется $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$.

В свою очередь, сходимость математических ожиданий многочленов от случайной величины немедленно следует из сходимости моментов.

От требования ограниченности носителя можно избавиться, наложив определённые условия на предельную случайную величину. А именно, достаточно, чтобы моменты предельной случайной величины гарантировали единственность решения проблемы моментов, например, удовлетворяя критерию Карлемана. Мы докажем более слабое утверждение, которое пригодится нам в дальнейшем, потребовав компактности носителя, но лишь для предельной величины.

Лемма 1.18. Пусть последовательность ξ_n сходится в смысле моментов к случайной величине ξ с ограниченным носителем, т.е. $\text{Supp}(\xi) \subset [-a, a]$ для некоторого $a > 0$. Тогда имеет место сходимость по распределению:

$$\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} \xi.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную ограниченную непрерывную функцию $g(x)$, такую, что $|g(x)| < b$ для некоторого $b > 0$. Докажем, что

$$\left| \int_{\mathbb{R}} g dF_{\xi} - \int_{\mathbb{R}} g dF_{\xi_n} \right| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Для этого разобьём область интегрирования на отрезок $A = [-2a, 2a]$ и его дополнение. По теореме Вейерштрасса о полиномиальной аппроксимации (теорема 1.17) для любого $\varepsilon > 0$ можно найти многочлен $P(x)$, для которого верно

$$|g(x) - P(x)| < \frac{\varepsilon}{8} \quad \forall x \in A.$$

1.2. СХОДИМОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И ПРЕДЕЛЬНЫЕ

Кроме того, имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} g dF_{\xi} - \int_{\mathbb{R}} g dF_{\xi_n} \right| &\leq \int_A |g - P| dF_{\xi} + \int_A |g - P| dF_{\xi_n} \\ &+ \left| \int_{\mathbb{R}} P dF_{\xi} - \int_{\mathbb{R}} P dF_{\xi_n} \right| + \int_{\mathbb{R} \setminus A} (|g| + |P|) dF_{\xi_n}, \end{aligned}$$

где в правой части уже опущены два интеграла по dF_{ξ} по области $\mathbb{R} \setminus A$, поскольку там dF_{ξ} равен нулю тождественно. Ясно, что первые два слагаемых правой части в сумме меньше $\varepsilon/4$ в силу выбора многочлена P и вероятностности меры. Выбрав достаточно большое n , можно добиться, чтобы третье слагаемое также не превышало $\varepsilon/4$; здесь мы пользуемся сходимостью моментов и тем, что P — многочлен. Наконец, четвертое слагаемое оценивается с помощью аргумента, использованного при доказательстве неравенства Маркова (лемма 1.12). В самом деле, пусть $2q$ — чётное число, большее или равное степени многочлена P и $p \in \mathbb{N}$ — некоторое натуральное число. Тогда найдётся такая константа c , что $|P(x)| \leq c(1 + |x|^{2q})$, откуда

$$\int_{\mathbb{R} \setminus A} (|g| + |P|) dF_{\xi_n} \leq \int_{\mathbb{R} \setminus A} (b + c(1 + |x|^{2q})) dF_{\xi_n} \leq \left(\frac{b+c}{(2a)^{2(q+p)}} + \frac{c}{(2a)^{2p}} \right) \int_{\mathbb{R}} x^{2(q+p)} dF_{\xi_n}.$$

Интеграл в правой части сходится к $m_{2(q+p)} \leq a^{2(p+q)}$. Поэтому, увеличивая p , можно добиться того, чтобы для достаточно больших n правая часть не превышала $\varepsilon/4$. \square

Наконец, приведём формулировки обещанных выше ЗБЧ и ЦПТ, и докажем их, воспользовавшись теоремой Леви о непрерывности.

Теорема 1.19. [ЗБЧ] Пусть (ξ_n) — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин, обладающих конечным математическим ожиданием $\mathbb{E}(\xi_n) = \mu$. Тогда

$$\bar{\xi}_n = \frac{S_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \mu. \quad (1.34)$$

Теорема 1.20. [ЦПТ] Если же, помимо конечных математических ожиданий, (ξ_n) имеют ещё и конечную дисперсию $\mathbb{D}(\xi_n) = \sigma^2$, то

$$\zeta_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} \eta, \quad (1.35)$$

где случайная величина η имеет стандартное нормальное распределение $\mathcal{N}(0, 1)$.

Доказательство. Прежде всего, заметим, что если все моменты ξ_n существуют, то из независимости и аддитивности кумулянтов мы немедленно устанавливаем, что все кумулянты случайных величин $\bar{\xi}_n$ и ζ_n стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$, за исключением $\mathbb{E}(\bar{\xi}_n) \rightarrow \mu$ в первом случае, и $\mathbb{E}(\zeta_n^2) \rightarrow 1$ во втором. Однако нет надобности ограничивать класс распределений; общий случай следует из предельных переходов для характеристической функции и теоремы Леви (теорема 1.14). Действительно, существование математического ожидания гарантирует существование первой производной $\varphi_{\xi_1}(x)$ в $x = 0$, откуда вытекает, что

$$\varphi_{\xi_1}(x) = 1 + i\mu x + o(x), \quad x \rightarrow 0.$$

В силу линейности (упражнение 1.2) это означает, что

$$\varphi_{\bar{\xi}_n}(x) = \left(\varphi_{\xi_1} \left(\frac{x}{n} \right) \right)^n = \left(1 + i \frac{\mu x}{n} + o \left(\frac{x}{n} \right) \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{i\mu x}.$$

Следовательно, $\bar{\xi}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} \mu$, а значит, в силу упражнения 1.11 мы имеем $\bar{\xi}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \mu$.

Аналогично, поскольку характеристическая функция случайной величины

$$\eta_k = \frac{\xi_k - \mu}{\sigma}$$

имеет вид

$$\varphi_{\eta_1}(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad x \rightarrow 0,$$

для $\zeta_n = \sum_{k=1}^n \frac{\eta_k}{\sqrt{n}}$ мы имеем

$$\varphi_{\zeta_n}(x) = \left(\varphi_{\eta_1} \left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right) \right)^n = \left(1 - \frac{x^2}{2n} + o \left(\frac{x^2}{n} \right) \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right).$$

Следовательно, согласно теореме Леви, $\zeta_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} \eta$, к чему мы и стремились. \square

Замечание 1.21. Существует также усиленный закон больших чисел, гарантирующий сходимость почти наверное при условии совокупной независимости всех членов последовательности и конечности математического ожидания.

На практике ЗБЧ и ЦПТ означают, что при больших n величина S_n детерминистически растёт линейно по n . Случайные отклонения от детерминистического линейного роста, которые могут быть обнаружены с конечной вероятностью, имеют порядок величины $O(\sqrt{n})$ и описываются нормальным распределением, независимо от деталей исходных случайных величин:

$$S_n \sim \mu n + \sigma \sqrt{n} \cdot \mathcal{N}(0, 1). \quad (1.36)$$

1.3 Мартингалы и концентрация меры

ЗБЧ это пример концентрации меры, вокруг неслучайной величины. Этот результат, будучи в большой степени универсальным, тем не менее, ограничен суммами последовательностей независимых случайных величин. Ещё одним классом процессов, в которых наблюдается подобное явление, не основанных на независимости случайных величин, являются мартингалы.

Определение 1.22. Мартингалом (в дискретном времени) относительно последовательности сигма алгебр $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_3 \dots$ называют последовательность случайных величин $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ такую, что для всех $n \in \mathbb{N}$ величина χ_n измерима относительно \mathcal{F}_n , $\mathbb{E}|\chi_n| < \infty$ и

$$\mathbb{E}(\chi_n | \mathcal{F}_{n-1}) = \chi_{n-1} \quad (1.37)$$

Видно, что мартингал это процесс, который в среднем никуда не смещается. Поэтому не удивительно, что приятной особенностью мартингалов являются различные утверждения о их сходимости. Один из инструментов, который позволяет их делать — мартингальные неравенства. Докажем одно такое неравенство, которое будет нам полезно для доказательства свойства концентрации меры.

Лемма 1.23 (Неравенство Азумы). Пусть $(\chi_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ - мартингал с ограниченными приращениями, т.е. для некоторых $a_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$

$$|\chi_{n+1} - \chi_n| \leq a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \quad (1.38)$$

тогда справедлива следующая оценка

$$\mathbb{P}(|\chi_0 - \chi_n| > t) \leq 2e^{-\frac{t^2}{2 \sum_{k=1}^n a_k^2}} \quad (1.39)$$

Доказательство. Запишем экспоненциальное неравенство Маркова для величины $(\chi_0 - \chi_n)$

$$\mathbb{P}(\chi_n - \chi_0 > t) = \mathbb{P}(e^{\lambda(\chi_n - \chi_0)} > e^{\lambda t}) \leq \frac{\mathbb{E}e^{\lambda(\chi_n - \chi_0)}}{e^{\lambda t}}, \quad (1.40)$$

где предполагается, что $\lambda > 0$. Оценим знаменатель в правой части. Для этого введем линейную функцию

$$h_a(x) = \operatorname{ch} a\lambda + \frac{x}{a} \operatorname{sh} a\lambda, \quad a > 0 \quad (1.41)$$

и заметим, что в силу выпуклости экспоненты неравенство

$$e^{\lambda x} \leq h_a(x) \quad (1.42)$$

выполняется при $-a \leq x \leq a$. Тогда

$$\mathbb{E}e^{\lambda(\chi_n - \chi_0)} = \mathbb{E}(\mathbb{E}(e^{\lambda(\chi_n - \chi_{n-1})} | \mathcal{F}_{n-1}) e^{\lambda(\chi_{n-1} - \chi_0)}) \quad (1.43)$$

$$\leq \mathbb{E}(\mathbb{E}(h_{a_n}(\chi_n - \chi_{n-1}) | \mathcal{F}_{n-1}) e^{\lambda(\chi_{n-1} - \chi_0)}) = h_{a_n}(0) \mathbb{E}e^{\lambda(\chi_{n-1} - \chi_0)} \quad (1.44)$$

$$= \operatorname{ch}(\lambda a_n) \mathbb{E}e^{\lambda(\chi_{n-1} - \chi_0)} \leq e^{\frac{\lambda^2 a_n^2}{2}} \mathbb{E}e^{\lambda(\chi_{n-1} - \chi_0)} \leq e^{\frac{\lambda^2 \sum_{k=1}^n a_k^2}{2}} \quad (1.45)$$

где в первом переходе мы воспользовались измеримостью разности $(\chi_{n-1} - \chi_0)$ относительно \mathcal{F}_n , во втором неравенством (1.42), в третьем тем, что χ_n - мартингал, и наконец тем, что гиперболический косинус мажорируется экспонентой от квадратичной функции. Тогда из (1.40) имеем

$$\mathbb{P}(\chi_n - \chi_0 > t) \leq e^{\frac{\lambda^2}{2} \sum_{k=1}^n a_k^2 - \lambda t} \leq e^{-\frac{t^2}{2 \sum_{k=1}^n a_k^2}}, \quad (1.46)$$

где во втором неравенстве мы минимизировали экспоненту по λ . Для $\mathbb{P}(\chi_n - \chi_0 < -t)$ верна такая же оценка, и наконец

$$\mathbb{P}(|\chi_n - \chi_0| > t) \leq \mathbb{P}(\chi_n - \chi_0 < -t) + \mathbb{P}(\chi_n - \chi_0 > t) \leq 2e^{-\frac{t^2}{2 \sum_{k=1}^n a_k^2}}. \quad (1.47)$$

□

Важный пример мартингала — мартингал Дуба.

Определение 1.24. [мартингал Дуба] Пусть $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_3 \dots$ - последовательность сигма-алгебр, а χ - произвольная случайная величина, такая что $\mathbb{E}|\chi| < \infty$. Тогда последовательность случайных величин

$$\chi_n := \mathbb{E}(\chi | \mathcal{F}_n), \quad n \in \mathbb{N} \quad (1.48)$$

образует мартингал по отношению $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Действительно, имеет место цепочка равенств

$$\mathbb{E}(\chi_n | \mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\chi | \mathcal{F}_n) | \mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(\chi | \mathcal{F}_{n-1}) = \chi_{n-1}$$

где во втором равенстве использовано телескопическое свойство условного матожидания по отношению к вложенным сигма-алгебрам и кроме того конечность матожидания модуля χ_n следует из аналогичного свойства величины χ ,

$$\mathbb{E}|\chi_n| = \mathbb{E}|\mathbb{E}(\chi | \mathcal{F}_n)| \leq \mathbb{E}\mathbb{E}(|\chi| | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}|\chi| < \infty.$$

Применение неравенства Азумы к мартингалу Дуба позволяет доказывать свойство концентрации меры.

Пусть $\chi = (\chi_n)_{1 \leq n \leq m}$ - набор независимых случайных величин, а $f(x_1, \dots, x_m)$ - s -липшицева вещественнозначная функция m переменных, что означает, что изменение функции при варьировании одной переменной конечно, т.е.

$$|f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_m) - f(x_1, \dots, x_{k-1}, x'_k, x_{k+1}, \dots, x_m)| \leq a_k. \quad (1.49)$$

для некоторого набора $a_k > 0, k = 1, \dots, m$. Из этого следует, что $\mathbb{E}f(\chi_1, \dots, \chi_m) < \infty$. Покажем также, что выполнено неравенство

$$|\mathbb{E}(f(\chi_1, \dots, \chi_m) | \chi_k, \dots, \chi_m) - \mathbb{E}(f(\chi_1, \dots, \chi_m) | \chi_{k+1}, \dots, \chi_m)| \leq a_k. \quad (1.50)$$

Для этого введем обозначение $\chi^{(i,j)} = \{\chi_i, \dots, \chi_j\}$, где $1 \leq i < j \leq m$ для подмножеств χ состоящих из элементов с номерами от i до j . Тогда

$$|\mathbb{E}(f(\chi) | \chi^{(k,m)}) - \mathbb{E}(f(\chi) | \chi^{(k+1,m)})| = |\mathbb{E}[\mathbb{E}[f(\chi) | \chi \setminus \chi_k] - f(\chi) | \chi^{(k+1,m)}]|. \quad (1.51)$$

Заметим, что в виду независимости χ_1, \dots, χ_k имеет место равенство

$$\mathbb{E}[f(\chi) | \chi \setminus \chi_k] = \int_{\mathbb{R}} f(\chi^{(1,k-1)}, x, \chi^{(k+1,m)}) dF_{\chi_k}(x), \quad (1.52)$$

где $F_{\chi_k}(x)$ - функция распределения χ_k . Используя неравенство Гёльдера, мы приходим к оценке

$$|\mathbb{E}[f(\chi) | \chi \setminus \chi_k] - f(\chi)| = \left| \int_{\mathbb{R}} (f(\chi^{(1,k-1)}, x, \chi^{(k+1,m)}) - f(\chi)) dF_{\chi_k}(x) \right| \leq a_k, \quad (1.53)$$

которая вкупе с (1.51) даёт (1.50). Отсюда, применяя неравенство Азумы, получим неравенство Мак-Диармида

$$\mathbb{P}(|f(\chi_1, \dots, \chi_m) - \mathbb{E}f(\chi_1, \dots, \chi_m)| > t) \leq 2e^{-\frac{t^2}{2 \sum_{k=1}^m a_k^2}}. \quad (1.54)$$

Приведем пример его применения.

Пример 1.25. Пусть $f_m(x_1, \dots, x_m)$, $m \in \mathbb{N}$, - последовательность измеримых s -липшицевых функций, для каждой из которых неравенство (1.50) выполнено с $a_1 = \dots = a_m = a(m) = O(1/\sqrt{m(\ln m)^{(1+\epsilon)}})$ $s \epsilon > 0$ при $m \rightarrow \infty$. Тогда из неравенства Мак-Диармида и леммы Бореля-Контелли следует следующее свойство концентрации меры

$$f_m(\chi_1, \dots, \chi_m) - \mathbb{E}f_m(\chi_1, \dots, \chi_m) \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{n.n.} 0. \quad (1.55)$$

1.4 Слабая сходимость случайных мер

До сих пор мы обсуждали сходимость последовательностей случайных величин, принимающих значения в \mathbb{R} . При этом выяснилось, что случайные величины, построенные как функции большого числа других случайных величин, зачастую демонстрируют универсальное типичное поведение, которое проявляется в их сходимостях к неслучайным или универсальным случайным пределам, определяемым утверждениями типа ЗБЧ и ЦПТ. В более общем случае при рассмотрении многокомпонентных случайных систем, таких как случайные матрицы, уместно ставить вопросы о более детальном описании их типичного поведения в пределе когда число компонент неограниченно растет. Для этого хорошо приспособлен язык случайных мер и сходимости их последовательностей.

Пусть \mathfrak{X} – польское пространство, $\mathcal{B}(\mathfrak{X})$ – борелевская сигма-алгебра его подмножеств, а $\mathcal{P}(\mathfrak{X})$ – пространство вероятностных борелевских мер на $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}(\mathfrak{X}))$. В секции 1 было дано понятие слабой сходимости мер, которое можно определять через сходимость интегралов от ограниченных непрерывных функций. Отметим, что слабая сходимость может быть метризуема, например, при помощи метрики Леви-Прохорова, в случае $\mathfrak{X} = \mathbb{R}$ имеющую вид

$$\ell(\mu, \nu) = \inf \{ \varepsilon > 0: F_\mu(x - \varepsilon) - \varepsilon \leq F_\nu(x) \leq F_\mu(x + \varepsilon) + \varepsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R} \}, \quad (1.56)$$

с которой слабая сходимость превращается в привычную сходимость в метрическом пространстве. С такой метрикой пространство $\mathcal{P}(\mathfrak{X})$ само является польским пространством.

Приведем также определение метрики Леви-Прохорова для случая общих метрических пространств $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}(\mathfrak{X}))$. Пусть $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{X})$ – борелевское множество. Для $\varepsilon > 0$ определим множество

$$A^\varepsilon = \bigcup_{p \in A} B_\varepsilon(p), \quad (1.57)$$

как объединение шаров где $B_\varepsilon(p)$ радиуса ε с центрами в каждой точке множества A . Тогда для мер $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathfrak{X})$

$$\ell(\mu, \nu) = \inf \{ \varepsilon > 0: \mu(A) \leq \nu(A^\varepsilon) + \varepsilon \ \& \ \nu(A) \leq \mu(A^\varepsilon) + \varepsilon, \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathfrak{X}) \}, \quad (1.58)$$

Слабая сходимость² позволяет задать топологию в $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, а следовательно и борелевскую сигма-алгебру $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$. Если $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – некоторое вероятностное пространство, то случайная вероятностная мера – это случайный элемент на этом пространстве, который принимает значения в $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Иными словами, случайная вероятностная мера – это измеримое отображение $(\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathcal{P}(\mathbb{R}), \mathcal{F}_{\mathcal{P}})$, определенное правилом $\omega \mapsto \mu(\omega)$. К таким мерам применимы обычные понятия сходимости, принятые в теории вероятности, с которыми мы имели дело в разделе 1.

Определение 1.26. Пусть $\mu, \mu_1, \mu_2 \dots$ – случайные вероятностные меры, определенные на одном вероятностном пространстве. Будем говорить, что последовательность (μ_n) слабо сходится к μ почти наверное (по вероятности, в среднем), и писать

$$\mu_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}(\mathbb{P}, \mathbb{E})} \mu, \quad (1.59)$$

²С точки зрения функционального анализа слабая сходимость мер – это *-слабая сходимость линейного функционала в двойственном пространстве.

тогда и только тогда, когда

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) d\mu_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.п.}(\mathbb{P}, \mathbb{E})} \int_{\mathbb{R}} g(x) d\mu, \quad \forall g(x) \in C_b(\mathbb{R}).$$

Пример 1.27. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — выборка из некоторого распределения $F_\lambda(x)$ (то есть случайные величины $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — независимы и одинаково распределены как некоторая случайная величина λ распределенная с мерой m_λ). Рассмотрим эмпирическую выборочную меру

$$L_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{\lambda_k}. \quad (1.60)$$

Тогда

$$L_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.п.}} m_\lambda \quad (1.61)$$

Действительно, поскольку $\mathbb{I}_{\lambda < x}$ распределена как бернуллиевская случайная величина, то Усиленный Закон Больших Чисел даёт нам

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{I}_{\{\lambda_k < x\}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.п.}} F_\lambda(x). \quad (1.62)$$

Из поточечной почти наверное сходимости последовательности функций распределения следует слабая сходимость мер почти наверное. Предел (1.61) можно интерпретировать как пример Закона Больших Чисел для эмпирической спектральной меры диагональной матрицы, элементы которой являются одинаково распределёнными случайными величинами.

Глава 2

Метод моментов и закон Вигнера

Обсуждая ЗБЧ и ЦПТ, мы имели дело с независимыми случайными величинами. В дальнейшем мы будем пытаться высказывать подобного рода утверждения, скорее, для наборов зависимых величин. Оказывается, существуют широкие классы систем, демонстрирующих на больших масштабах характерное поведение, которое не зависит от микроскопических подробностей, и первым таким классом, который мы рассмотрим, станут случайные матрицы.

Впервые случайные матрицы возникли в физике при изучении спектров ядер больших атомов. Несмотря на то, что задача диагонализации гамильтонианов больших взаимодействующих систем чрезвычайно сложна и не решается точно, оказалось, что статистически уровни энергии ведут себя как собственные значения некоторого класса случайных матриц. Позже выяснилось, что подобные утверждения справедливы и для других сложных систем, например, таких, как квантовые бильярды, квантовые точки и др. С другой стороны, случайные матрицы представляют интерес и для математиков, например, потому что поведение, подобное собственным значениям случайных матриц, обнаруживается в структуре комплексных нулей ζ -функции Римана, которая, в свою очередь, тесно связана с распределением простых чисел.

Мы начнём с круга вопросов, касающихся изучения спектра случайных матриц. Как уже было упомянуто, изучение случайных матриц было мотивировано вопросом о типичном виде ядерных спектров, которые определяются наборами собственных чисел многомерных самосопряженных операторов. Основная идея состоит в том, что в достаточно общей ситуации типичный вид этого спектра не зависит от деталей отдельных матричных элементов, а определяется лишь симметриями оператора. Поэтому мы будем считать матричные элементы случайными величинами, а цель будет заключаться в том, чтобы попытаться ответить на вопрос, как выглядит типичной спектр очень большой эрмитовой матрицы со случайными матричными элементами. Этот вопрос был впервые поставлен и решен математиком и физиком Юджном Вигнером в 1958 году сначала для матриц со случайными элементами, задаваемыми распределением Бернулли, а потом и для произвольных распределений.

Для простоты мы ограничимся случаем вещественных симметричных матриц, хотя те же утверждения относятся и к комплекснозначным эрмитовым матрицам, а также к вещественно-кватернионным эрмитовым матрицам.

Определение 2.1. *Матрицей Вигнера будем называть вещественную симметричную матрицу $W = (w_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, элементы $w_{ij} = w_{ji}$ которой на главной диагонали и выше являются независимыми случайными величинами, одинаково распределёнными выше*

главной диагонали, а также одинаково (но, возможно, по-другому), распределёнными на главной диагонали:

$$w_{ij} = w_{ji} \sim \xi, \quad 1 \leq i < j \leq n; \quad \mathbb{E}(\xi) = 0, \quad \mathbb{D}(\xi) = \sigma^2 < \infty; \quad (2.1)$$

$$w_{ii} \sim \eta, \quad 1 \leq i \leq n; \quad \mathbb{E}(\eta) = 0, \quad \mathbb{D}(\eta) < \infty. \quad (2.2)$$

Для упрощения технических деталей на протяжении всего этого раздела мы будем также предполагать, что все моменты распределений случайных величин ξ и η конечны.

Вопрос, на который мы хотим ответить в этом разделе, звучит следующим образом: «Как выглядит типичный спектр большой Вигнеровской матрицы?» Ответ оказывается удобно сформулировать в виде Закона Больших Чисел для эмпирической спектральной меры вигнеровской матрицы, отнормированной так, чтобы спектр находился в ограниченной области.

Определение 2.2. Пусть $M = M^\dagger \in \mathbb{C}^{n \times n}$ — эрмитова матрица¹, обладающая собственными значениями $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Всякой такой матрице можно сопоставить эмпирическую спектральную меру (ЭСМ)

$$L_M = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{\lambda_k} \quad (2.3)$$

Поскольку матрицы Вигнера — случайные, их ЭСМ — также случайная мера. Однако если выбрать правильный масштаб, то мы увидим, что чем больше размер матрицы, тем менее вид спектра, а следовательно и ЭСМ, зависит от исходного распределения её матричных элементов, и тем ближе они становятся к единому универсальному закону. В пределе для ЭСМ вигнеровских матриц, перемасштабированных так, чтобы при увеличении размера спектр оставался в ограниченной области, справедлив аналог ЗБЧ, а именно, ЭСМ стремится к полукруговому закону Вигнера.

Теорема 2.3. [Теорема Вигнера]

Пусть $(w_{ij})_{1 \leq i < j}$ и $(w_{ii})_{i \geq 1}$ — последовательности независимых одинаково распределённых случайных величин, определенных на одном вероятностном пространстве, причём

$$\mathbb{E}w_{12} = \mathbb{E}w_{11} = 0, \quad (2.4)$$

$$\mathbb{D}w_{12} = \sigma^2, \quad \mathbb{D}w_{11} < \infty, \quad (2.5)$$

$$\mathbb{E}w_{12}^k < \infty, \quad \mathbb{E}w_{ii}^k < \infty, \quad k \geq 2, \quad (2.6)$$

а $W_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — матрица Вигнера с матричными элементами $w_{ij} = w_{ji}$, $1 \leq i, j \leq n$. Введём перемасштабированную матрицу

$$M_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \cdot W_n. \quad (2.7)$$

Тогда последовательность ЭСМ матриц M_n слабо сходится к полукруговому закону Вигнера почти наверное, то есть

$$L_{M_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} \mu_{sc}, \quad (2.8)$$

¹Знак \dagger означает транспонирование и комплексное сопряжение.

где мера μ_{sc} задаётся плотностью

$$f_{sc}(x) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - x^2} \cdot \mathbb{I}_{\{|x| \leq 2\}}.$$

Доказательство. Для доказательства теоремы Вигнера мы будем использовать *метод моментов*. Суть его заключается в том, чтобы сначала доказать сходимость последовательности моментов ЭСМ к моментам полукругового закона, подобно тому, как мы это делали при доказательстве ЗБЧ в разделе 1. Если имеет место сходимость моментов почти наверное, то в силу ограниченности носителя полукругового распределения и леммы 1.18 мы будем иметь и слабую сходимость ЭСМ с вероятностью единица.

Для произвольной меры μ на \mathbb{R} введём следующее обозначение

$$\langle \mu, f \rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x) \mu(dx). \quad (2.9)$$

В частности $m_k(\mu) = \langle \mu, x^k \rangle$ — это k -ый момент случайной величины, заданной мерой μ . Определим усреднённую меру \bar{L}_{M_n} , которая характеризуется тем свойством, что для любой измеримой функции $f(x)$ выполнено соотношение

$$\langle \bar{L}_{M_n}, f(x) \rangle = \mathbb{E}_W \langle L_{M_n}, f(x) \rangle, \quad (2.10)$$

где нижний индекс W подчеркивает, что матожидание берётся по отношению к мере на матрицах Вигнера.

Стратегия доказательства следующая. Сначала доказывается сходимость моментов в среднем к моментам полукругового распределения. Следом — сходимость моментов почти наверное к своим средним значениям. Таким образом, доказательство сводится к следующим трем утверждениям

(a) $\langle \mu_{sc}, x^{2k} \rangle = C_k$, где $C_k = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}$ — числа Каталана,

(b) $\langle \bar{L}_{M_n}, x^k \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle \mu_{sc}, x^k \rangle$,

(c) $\langle L_{M_n}, x^k \rangle \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} \langle \bar{L}_{M_n}, x^k \rangle$.

Отметим, что доказательство утверждения (a) было сформулировано в разделе 1 в виде упражнения 1.8.

Итак, покажем, что $\langle \bar{L}_{M_n}, x^k \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle \mu_{sc}, x^k \rangle$. Прежде всего, заметим, что моменты ЭСМ — это следы степеней матрицы:

$$\langle L_{M_n}, x^k \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i^k = \frac{1}{n} \cdot \text{Tr } M_n^k = \frac{1}{n(\sigma\sqrt{n})^k} \cdot \text{Tr } W_n^k. \quad (2.11)$$

То же самое справедливо и для моментов усреднённой меры

$$\langle \bar{L}_{M_n}, x^k \rangle = \frac{1}{n^{1+k/2}\sigma^k} \cdot \mathbb{E}_W (\text{Tr } W_n^k), \quad (2.12)$$

с той лишь разницей, что справа стоит матожидание следа, или, в силу линейности следа, след матожидания степеней матрицы W_n .

Выразим следы через матричные элементы и попробуем вычислить матожидания от полученных комбинаций матричных элементов. Чтобы понять, как ведёт себя величина $\langle \bar{L}_{M_n}, x^k \rangle$ в пределе $n \rightarrow \infty$, сначала вычислим следы $\text{Tr } W_n^k$ при малых значениях k .

При $k = 1$, очевидно, получаем $\mathbb{E}_W(\text{Tr } W_n) = \mathbb{E}_W(w_{11}) = 0$ и

$$\langle \bar{L}_{M_n}, x \rangle = 0. \quad (2.13)$$

При $k = 2$ справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_W(\text{Tr } W_n^2) &= \mathbb{E}_W \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n w_{ik} w_{ki} \right) = \\ &= \sum_{i \neq k} \mathbb{E}_W(w_{ik}^2) + \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_W(w_{ii}^2) = n(n-1)\sigma^2 + n \mathbb{D}_W(w_{11}). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Таким образом, при $n \rightarrow \infty$ мы получим

$$\langle \bar{L}_{M_n}, x^2 \rangle = \frac{1}{n} \mathbb{E}_W(\text{Tr } M_n^2) = \frac{n(n-1)\sigma^2 + n \mathbb{D}_W(Y)}{n^2 \sigma^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1. \quad (2.15)$$

При $k = 3$ из независимости случайных величин w_{ik} для различных пар (i, k) имеем

$$\langle \bar{L}_{M_n}, x^3 \rangle = \frac{1}{n^{5/2}} \cdot \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_W(w_{ii}^3) = \frac{n}{n^{5/2}} \cdot \mathbb{E}_W(w_{11}^3) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (2.16)$$

Что получится в общем случае? Как видно из разобранных примеров, для вычисления пределов моментов произвольного порядка нужно просуммировать вклады величин

$$\mathcal{W}(\pi) = \mathbb{E}(w_{i_1 i_2} w_{i_2 i_3} \dots w_{i_k i_1}) \quad (2.17)$$

с соответствующими весами, где $\pi = (i_1, \dots, i_k)$ — набор из k натуральных чисел, принимающих произвольные значения из множества $\{1, \dots, n\}$. Для решения этой задачи удобно использовать язык теории графов. Пусть $G = (V, E)$ — полный граф на n вершинах с петлей в каждой вершине.² Будем считать, что вершины пронумерованы числами от единицы до n , то есть $V = \{1, \dots, n\}$. Тогда каждому выражению вида (2.17) можно сопоставить замкнутый путь

$$\pi = (i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow i_3 \rightarrow \dots \rightarrow i_k \rightarrow i_1) \quad (2.18)$$

с весом $\mathcal{W}(\pi)$ определённым формулой (2.17). Таким образом, выражение для моментов сводится к сумме

$$\langle \bar{L}_{M_n}, x^k \rangle = \frac{1}{n^{k/2+1} \sigma^k} \sum_{\pi(k)} \mathcal{W}(\pi(k)) \quad (2.19)$$

по путям $\pi(k)$ из k шагов на графе G .

Далее, заметим, что различные пути, которые переводятся друг в друга перенумерацией вершин, имеют один и тот же вес. Будем говорить, что пути π и π' принадлежат одному классу эквивалентности, $\pi \sim \pi'$, если $\pi' = \tau(\pi)$, где $\tau \in S_n$. Здесь мы имеем в виду,

²Полным графом называется граф, у которого каждая вершина соединена ребрами со всеми остальными. В нашем случае мы также добавляем в каждую вершину петлю — ребро, соединяющее вершину с самой собой.

что $\pi = (i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow i_3 \rightarrow \dots \rightarrow i_k \rightarrow i_1)$, $\pi' = (\tau(i_1) \rightarrow \tau(i_2) \rightarrow \tau(i_3) \rightarrow \dots \rightarrow \tau(i_k) \rightarrow \tau(i_1))$, и, как следствие, $\mathcal{W}(\pi') = \mathcal{W}(\pi)$. Таким образом, суммирование по путям, сводится к суммированию по множеству классов эквивалентности $\mathcal{P} = \{\pi\} / \sim$:

$$\langle \bar{L}_{M_n}, x^k \rangle = \frac{1}{n^{k/2+1} \sigma^k} \sum_{\pi(k) \in \mathcal{P}} \|\pi(k)\| \cdot \mathcal{W}(\pi(k)), \quad (2.20)$$

где $\|\pi(k)\|$ — число путей в классе эквивалентности. Правда, пока остаётся вопрос, как пересчитать пути каждом таком классе. Оказывается, это легко сделать, если явно выделить классы эквивалентности путей, проходящих через фиксированное число вершин.

Обозначим через $\pi(k, m)$ путь из k шагов, проходящих в точности через m вершин, $\|\pi(k, m)\|$ — число элементов в его классе эквивалентности. Очевидно, что выполняется равенство $\|\pi(k, m)\| = n(n-1) \dots (n-m+1) = A_n^m$. Поэтому имеет место соотношение

$$\langle \bar{L}_{M_n}, x^k \rangle = \frac{1}{n^{k/2+1} \sigma^k} \sum_{m=1}^k \sum_{\pi(k, m) \in \mathcal{P}} A_n^m \cdot \mathcal{W}(\pi(k, m)). \quad (2.21)$$

Замечательной особенностью выражения, стоящего под знаком суммы, является тот факт, что общее число вершин в графе G влияет лишь на известный коэффициент A_n^m , а всё остальное зависит только от k и m , то есть остается конечным в пределе $n \rightarrow \infty$.

Какие пути вносят вклад в эту сумму? Прежде всего, заметим, что в силу условия (2.4) ненулевой вклад дают только те пути, в которых каждое пройденное ребро встречается не менее двух раз. Следовательно, учитывать имеет смысл лишь те пути, в которых число использованных рёбер не превышает $[k/2]$. Пусть $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ — подграф графа G , для которого $\|\tilde{E}\| \leq [k/2]$ и $|\tilde{V}| = m$, а через рёбра и вершины которого проходит путь $\pi(k, m)$. Сколько в таком графе может быть вершин, то есть каково число m ? Чтобы ответить на этот вопрос, сформулируем следующее известное из теории графов утверждение.

Лемма 2.4. Пусть $G = (V, E)$ конечный связный граф. Тогда $\|V\| \leq \|E\| + 1$, причём равенство имеет место тогда и только тогда, когда G — дерево.

Следовательно, число рёбер удовлетворяет неравенству $m \leq [k/2] + 1$, откуда

$$\langle \bar{L}_{M_n}, x^k \rangle = \frac{1}{n^{k/2+1} \sigma^k} \sum_{m=1}^{[k/2]+1} \sum_{\pi(k, m) \in \mathcal{P}} A_n^m \cdot \mathcal{W}(\pi(k, m)). \quad (2.22)$$

При $n \rightarrow \infty$ величина A_n^m растёт как $A_n^m \asymp n^m$. В случае нечётных k это означает, что моменты стремятся к нулю. Если же k — чётное число, то в пределе выживают только слагаемые, соответствующие $m = k/2 + 1$. Как следует из леммы 2.4, подграф \tilde{G} в этом случае является деревом, причём пути $\pi(k, k/2 + 1)$ проходят по каждому ребру ровно два раза. Вес таких путей не зависит от класса эквивалентности и равен

$$\mathcal{W}(\pi(k, k/2 + 1)) = \sigma^k. \quad (2.23)$$

Таким образом, предельное выражение для чётных моментов равно числу классов эквивалентности путей $\pi(k, k/2 + 1)$, то есть

$$\langle \bar{L}_{M_n}, x^k \rangle = \begin{cases} \|\{\pi(k, k/2 + 1) \in \mathcal{P}\}\|, & k \in 2\mathbb{N} \\ 0, & k \in 2\mathbb{N} + 1 \end{cases} \quad (2.24)$$

Остается предъявить процедуру построения неэквивалентных путей из k шагов, обходящих дерева с $(k/2 + 1)$ вершинами так, что каждое ребро проходится два раза. Будем считать, что мы обходим вершины $\tilde{V} = (1, \dots, k/2 + 1)$, а итоговый результат представляет собой последовательность вершин $(v(0), \dots, v(k))$. Без ограничения общности можно положить $v(0) = 1$ и $v(1) = 2$, то есть первый шаг делается вдоль ребра $1 \rightarrow 2$. В дальнейшем, поскольку пройденные ребра не должны образовывать циклов, на каждом шаге мы можем либо перейти в ещё не посещённую вершину, либо вернуться в вершину, в которой были на предыдущем шаге. То есть имеется две возможности:

- (i) $v(i) \rightarrow v(i + 1) = \max(v(0), \dots, v(i)) + 1$,
- (ii) $v(i) \rightarrow v(i - 1)$.

Путь заканчивается возвращением на шаге k в исходную вершину: $v(k) = v(0) = 1$.

Далее, сопоставим последовательности $(v(0), \dots, v(k))$ последовательность из плюс-минус единиц $u = (u_1, \dots, u_k)$, заданную следующим правилом: для всех $j = 1, \dots, k$ шагу $v(j) \rightarrow v(j + 1)$ типа (i) — переход в новую вершину — ставим в соответствие $u_{j+1} = 1$, а с шагом типа (ii) — возвращение — соотносим $u_{j+1} = -1$. Ясно, что сумма членов такой последовательности на каждом шаге неотрицательна, то есть

$$\sum_{i=1}^l u_i \geq 0, \quad 1 \leq l \leq k,$$

а полная сумма равна нулю: $u_1 + \dots + u_k = 0$. Поэтому при замене единиц на левые скобки, а минус единиц — на правые получается *правильная скобочная последовательность*, в которой каждой левой сколке соответствует правая, а любой начальный кусок содержит не меньше левых скобок, чем правых. Также, по последовательности u можно построить *путь Дика* — ломаную линию на плоскости, представляющую собой путь из точки $(0, 0)$ в точку $(2k, 0)$, составленный из векторов $(1, u_i)$, а потому не опускающийся ниже оси абсцисс Ox (рис. 2.1).

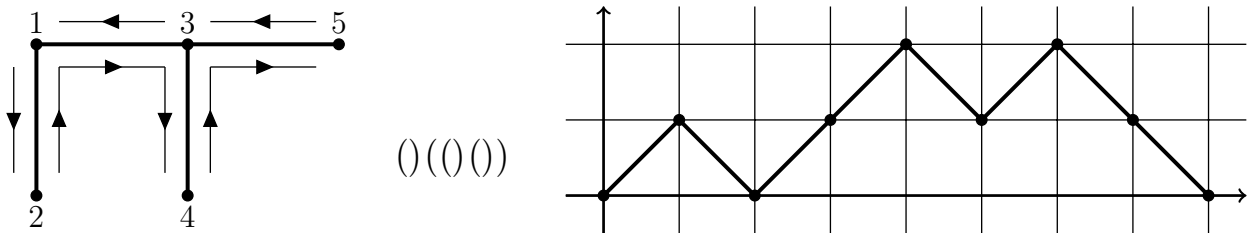


Рис. 2.1:

Итак, каждому обходу дерева можно сопоставить правильную скобочную последовательность или путь Дика. Очевидно и обратное: по каждому пути Дика можно построить представитель класса эквивалентности замкнутых путей из k шагов, проходящих ровно два раза по каждому ребру некоторого дерева \tilde{G} с $\|\tilde{V}\| = k/2 + 1$ вершинами. Хорошо известно, что количество путей Дика, а следовательно, и выражение для моментов чётного порядка k даётся числом Каталана $C_{k/2}$. Таким образом, сходимость моментов в среднем, то есть утверждение (b), доказана.

Доказательство утверждения (c) мы оставляем читателю в виде упражнения. Отметим лишь общий план действий. Чтобы убедиться, что имеет место сходимость почти

наверное, достаточно исследовать поведение дисперсии $\mathbb{D}\langle L_{M_n}, x^k \rangle$. Доказательство снова проводится методом моментов, но на этот раз необходимо провести суммирование по парам путей из k шагов. Сначала имеет смысл удостовериться в том, что пары путей, не имеющих общих рёбер, не дают вклада в дисперсию. Этот факт помогает установить, что дисперсия стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, откуда с помощью неравенства Чебышёва следует сходимость по вероятности. Если же явно выделить пары путей, ответственных за ведущий ненулевой вклад, то можно показать, что дисперсия убывает достаточно быстро, а потому можно воспользоваться неравенством Маркова и леммой Бореля-Кантелли для доказательства сходимости почти наверное. \square

Упражнение 2.5. Докажите, что число правильных скобочных последовательностей из $2k$ скобок совпадает с количеством путей Дика длины $2k$ и равно k -ому числу Каталана C_k .

Упражнение 2.6. Проведите соответствующие вычисления и убедитесь, что в условиях теоремы Вигнера имеет место сходимость $\langle L_{M_n}, x^k \rangle \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.п.}} \langle \bar{L}_{M_n}, x^k \rangle$.

В приведённом доказательстве мы построили биекцию между классами эквивалентности обходов деревьев и путями Дика или правильными скобочными последовательностями. Дадим ещё пару комбинаторных интерпретаций этого результата.

Определение 2.7. Дерево с помеченной вершиной — корнем — называется корневым деревом или ориентированным деревом. Потомками данной вершины дерева, называются те вершины, для которых любой путь, соединяющий их с корнем, проходит через данную вершину. Упорядоченным называется дерево, у которого множество сыновей (ближайших потомков) каждой вершины упорядочено. Эквивалентно можно говорить о планарном дереве: ориентация дерева на плоскости задаёт естественный порядок его вершин.

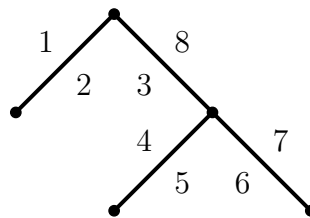


Рис. 2.2:

Заметим, что любое дерево в совокупности с порядком обхода его вершин задаёт упорядоченное корневое дерево или, эквивалентно, планарное дерево (рис. 2.2). Планарные деревья, таким образом, состоят в биекции с путями Дика (ср. с рис. 2.1).

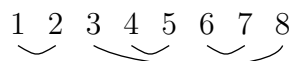


Рис. 2.3:

;

Ещё один важный комбинаторный объект, для которого можно установить биективное соответствие с путями Дика, правильными скобочными последовательностями

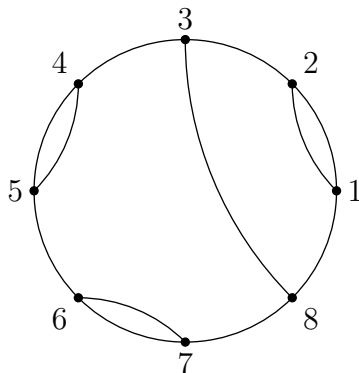


Рис. 2.4:

и планарными корневыми деревьями — это так называемое неперекрёстное разбиение. Оно может быть построено следующим образом. Перенумеруем шаги обходящего дерева пути числами от 1 до k . Выпишем эти числа подряд и соединим снизу дугами пары чисел, которые соответствуют шагам вдоль одного и того же ребра, сделанным с разных сторон (рис. 2.3). Ясно, что так как эта конструкция построена по обходу планарного дерева, дуги можно провести так, чтобы они не пересекались.

Определение 2.8. Разбиение упорядоченного множества $\{1, \dots, k\}$ на подмножества называется неперекрёстным разбиением, если для любых четырёх его элементов $1 \leq a < b < c < d \leq k$, а также для любых двух подмножеств разбиения A и B из условия $a, c \in A$ и $b, d \in B$ следует, что $A = B$. Неперекрёстное разбиение на множества из двух элементов будем называть попарным неперекрёстным разбиением или неперекрёстным парасочитанием.

Очевидно, разбиение будет неперекрёстным, если его можно изобразить, соединив между собой элементы каждого подмножества непересекающимися дугами, нарисованными под строчной записью множества $\{1, \dots, 2k\}$, как это было сделано на рис. 2.3. Эквивалентно, можно расположить элементы множества на окружности; в этом случае неперекрёстное разбиение изображается непересекающимися хордами, соединяющими элементы подмножеств (рис. 2.4). Как видно из рассуждения выше, моменты полукругового распределения определяются числом попарных неперекрёстных разбиений множества из $2k$ элементов.

Напомним, что суммирование по разбиениям уже встречалось нам в разделе 1 при обсуждении связи между моментами и кумулянтами в обычной теории вероятности. В частности, в силу того, что у стандартного нормального распределения $\mathcal{N}(0, 1)$ лишь один кумулянт $c_2 = 1$ не равен нулю, момент порядка $2k$ равен числу парных разбиений (парасочитаний) в множестве из $2n$ элементов. Поэтому в некотором смысле закон Вигнера аналог распределения Гаусса. В дальнейшем мы увидим, что теории свободной вероятности суммирование по неперекрёстным разбиениям играет ту же роль, что суммирование по любым разбиениям, которое возникало выше в связи с переходом от моментов к кумулянтам.

Глава 3

Метод преобразования Стилтъяеса и закон Марченко-Пастура

В этом разделе мы изучим спектр случайных матриц другого типа, выборочных ковариационных матриц, построенных по случайной выборке из некоторого многомерного распределения. Такие матрицы возникают приложениях к задачам математической статистики, и вопрос о виде их спектра был впервые поставлен задолго до того, как Ю. Вигнером были введены в рассмотрение случайные эрмитовы матрицы. Впервые задача о точном распределении спектра выборочной ковариационной матрицы, построенной по выборке из многомерного нормального распределения, была решена Джоном Вишертом в 1928 году. В этом разделе мы обсудим более поздний результат, о асимптотическом виде спектра больших выборочных ковариационных матриц, построенных по выборке из многомерных распределений широкого класса. Эта задача была решена советскими математиками А. В. Марченко и Л.А. Пастуром в 1967-ом году. Мы увидим, что как и в случае закона Вигнера, асимптотический вид спектра не зависит от деталей распределения матричных элементов.

3.1 Статистики многокомпонентных выборок и сингулярные числа матриц.

Пусть $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ — n -компонентная случайная величина, заданная некоторым n -мерным распределением, и пусть имеется случайная выборка

$$X_m = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m) = \begin{pmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,m} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,m} \end{pmatrix}$$

размера m из такого распределения. Основными статистиками, традиционно характеризующими выборку, являются вектор выборочного среднего

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} = \frac{1}{m}(\mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_m),$$

и выборочная ковариационная матрица с матричными элементами

$$q_{ij} = \frac{1}{m-1} \sum_{k=1}^m (x_{i,k} - \bar{x}_i)(x_{j,k} - \bar{x}_j).$$

Эти статистики можно использовать для оценки параметров исходного распределения, в частности анализируя их собственные значения. Существуют также много других различных статистик. В дальнейшем мы будем интересоваться задачей о спектре похожей матрицы

$$R_m = \frac{1}{m} X_m X_m^\dagger, \quad (3.1)$$

которую мы также будем называть ковариационной выборочной матрицей, построенной по n -мерному распределению, в котором все n компонент независимы и одинаково распределены. Её матричные элементы

$$r_{ij} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_{i,k} x_{j,k}^*,$$

которые для простоты определены без сдвига элементов выборки на выборочное среднее. Как, будет замечено ниже, такой сдвиг не меняет асимптотического вида спектра. Звездочка над матричным элементом означает комплексное сопряжение, а знак \dagger над матрицей — эрмитово сопряжение, полученное транспонированием и комплексным сопряжением матрицы. Здесь мы имеем в виду, что мы будем рассматривать не только вещественные, но и комплекснозначные случайные матрицы X . Тогда матрица определенная в (3.1) будет эрмитовой, и следовательно имеющей чисто вещественный спектр. Нетрудно проверить, что она также будет неотрицательно определена, т.е.

$$(\mathbf{v}, X X^\dagger \mathbf{v}) \geq 0 \quad (3.2)$$

для любых векторов \mathbf{v} , где под скалярным произведением понимается эрмитово скалярное произведение

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n u_i^* v_i. \quad (3.3)$$

Все собственные значения такой матрицы неотрицательны.

В этом разделе мы попробуем ответить на вопрос, каков типичный вид спектра такой матрицы, когда она очень большая. Также, об этой задаче можно думать, как о задаче о распределении квадратов сингулярных чисел прямоугольной матрицы с независимыми одинаково распределенными матричными элементами. Пусть X прямоугольная матрица. Для любой прямоугольной матрицы можно построить полярное разложение

$$X = |X|U,$$

где U унитарная матрица, $UU^\dagger = I$, а матрица $|X| = \sqrt{X X^\dagger}$ — неотрицательная эрмитова матрица (эрмитова матрица с неотрицательными собственными значениями). Собственные числа матрицы $|X|$ называются сингулярными числами матрицы X . Следовательно собственные числа матрицы $R = X X^\dagger$ ни что иное, как квадраты сингулярных чисел.

Упражнение 3.1. Пользуясь результатами предыдущего раздела найдите асимптотическую спектральную плотность квадратов сингулярных чисел вигнеровских матриц. Хотя хотя матричные элементы матрицы Вигнера сверху и снизу от главной диагонали не независимы, как мы увидим ниже, асимптотическое распределение ее сингулярных чисел точно такое же как для квадратной матрицы с независимыми одинаково распределенными элементами.

Прежде чем обратиться к решению намеченной задачи, нам потребуется ввести несколько новых инструментов.

3.2 Преобразование Стилттьеса

Мощный инструмент для работы с вероятностными мерами, особенно эффективный для работы с ЭСМ случайных матриц, — преобразование Стилттьеса.

Определение 3.2. Пусть ξ — случайная величина, обладающая функцией распределения $F_\xi(x)$. Тогда на комплексной области $\mathbb{C} \setminus \text{Supp}(dF_\xi(x))$ мы можем определить функцию

$$s_\xi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda - z} dF_\xi(\lambda), \quad (3.4)$$

которая называется преобразованием Стилттьеса меры $dF_\xi(x)$.

Из определения преобразования Стилттьеса следуют его следующие простые свойства

1. Функция $s_\xi(z)$ аналитична в верхней полуплоскости \mathbb{C}^+ .
2. Поведение на бесконечности: $\lim_{z \rightarrow \infty} e^{i\epsilon} z s_\xi(e^{i\epsilon} z) = -1$, $\epsilon \neq 0$.
3. Знакопостоянная мнимая часть: $\Im s_\xi(z) > 0$ при $z \in \mathbb{C}^+$,
4. Ограниченность: $|s_\xi(z)| \leq 1/\Im z$, $z \in \mathbb{C}^+$
5. Симметрия относительно отражения: $s_\xi(\bar{z}) = \overline{s_\xi(z)}$.

Справедливо и обратное утверждение.

Утверждение 3.3. Если функция $s(z)$ имеет свойства 1-5, то существует случайная величина ξ , такая что $s(z) = s_\xi(z)$ — преобразование Стилттьеса ее распределения.

Чтобы восстановить распределение по преобразованию Стилттьеса, можно воспользоваться следующей формулой обращения.

Утверждение 3.4. Пусть x — точка непрерывности функции распределения $F_\xi(x)$. Тогда имеет место обратное преобразование Стилттьеса:

$$F_\xi(x) = \pm \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^x \text{Im}(s_\xi(z \pm iy)) dz. \quad (3.5)$$

Доказательство. Чтобы убедиться в справедливости формулы (3.5), заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_a^b \operatorname{Im}(s_\xi(z + iy)) dz &= \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{dz}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\lambda - (z + iy)} - \frac{1}{\lambda - (z - iy)} \right) dF_\xi(\lambda) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_a^b dz \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{(\lambda - z)^2 + y^2} dF_\xi(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dF_\xi(\lambda) \int_a^b \frac{y dz}{(\lambda - z)^2 + y^2} = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{b - \lambda}{y} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{a - \lambda}{y} \right) \right) dF_\xi(\lambda). \end{aligned}$$

Воспользовавшись свойством $\lim_{y \rightarrow 0^+} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{y} \right) = \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sign}(x)$, получаем

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b \operatorname{Im}(s_\xi(z + iy)) dz \xrightarrow{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\pi}{2} (\operatorname{sign}(b - \lambda) - \operatorname{sign}(a - \lambda)) dF_\xi(\lambda) = F(b) - F(a).$$

Остаётся устремить a к $-\infty$. Аналогично доказывается второе равенство. \square

Замечание 3.5. Из доказательства также не трудно видеть, что если x - точка разрыва,

$$F_\xi(x) - F_\xi(x^-) = \mu_\xi(x) \neq 0,$$

то формула обратного преобразования Стилтjеса принимает вид

$$F_\xi(x) - \frac{1}{2} \mu_\xi(x) = \pm \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^x \operatorname{Im}(s_\xi(z \pm iy)) dz \quad (3.6)$$

Следствие 3.6. Из этого утверждения в частности следует, что если случайная величина ξ обладает плотностью $f_\xi(x)$, формула обращения сводится к вычислению мнимой части преобразования Стилтjеса.

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{y \rightarrow 0^+} \Im s_\xi(x + iy) \quad (3.7)$$

Если предел в правой части существует, то функция распределения дифференцируема в точке x и дается пределом мнимой части преобразования Стилтjеса из верхней полуплоскости. Эта формула есть частный случай одной из формул Племелья-Сохочкокого (см. приложение 8.1).

Следствие 3.7.

Подобно тому, как преобразование Лапласа распределения вероятности играет роль экспоненциальной производящей функции моментов, преобразование Стилтjеса — обычная производящая функция моментов.

Утверждение 3.8. Пусть случайная величина ξ имеет компактный носитель, $\operatorname{Supp}(dF_\xi(x)) \subset [a; b]$, где $-\infty < a < b < \infty$. Тогда для $z \in \mathbb{C}$, удовлетворяющих условию $|z| > \max(|a|, |b|)$, справедливо соотношение

$$s_\xi(z) = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n(\xi)}{z^n}. \quad (3.8)$$

Так же как преобразование Фурье, оно же характеристическая функция, преобразование Стилтjеса представляет собой удобный инструмент для доказательства слабой сходимости вероятностных мер.

Теорема 3.9. [Теорема о непрерывности преобразования Стилтjеса]

Пусть μ, μ_1, μ_2, \dots — вероятностные меры на \mathbb{R} . Для того, чтобы слабая сходимость $\mu_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mu$ имела место необходимо и достаточно, чтобы имела место сходимость $s_{\mu_n}(z) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} s_{\mu}(z)$.¹

Это утверждение можно распространить и на слабую сходимость случайных мер почти наверное. Однако имеется небольшая тонкость, которая требует некоторых дополнительных рассуждений. Дело в том, что даже если доказана поточечная сходимость преобразований Стилтjеса почти наверное, т.е.

$$\mathbb{P}\{\omega \in \Omega : s_{\mu_n}(z, \omega) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} s_{\mu}(z, \omega)\} = 1, \quad \forall z \in \mathbb{C}^+, \quad (3.9)$$

для каждой точки z все еще имеется множество меры ноль, где сходимость не гарантирована. Таких точек континуум, а мера множества, полученного объединением континуума множеств меры ноль, вообще говоря не обязана быть нулем. Для разрешения этой проблемы достаточно воспользоваться свойством аналитичности преобразования Стилтjеса и теоремой Витали о сходимости.

Теорема 3.10 (Витали). Пусть f_1, f_2, \dots — последовательность функций, равномерно ограниченных и аналитических в некотором связном открытом подмножестве D комплексной плоскости \mathbb{C} , и последовательности $(f_n(z))$ сходятся поточечно в некотором подмножестве множества D , содержащем хотя бы одну предельную точку в D . Тогда существует функция $f(z)$, аналитическая в D , такая что

$$f_n(z) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(z), \quad \forall z \in D.$$

Для понимания формулировки теоремы напомним определения использованных понятий

Определение 3.11. Напомним, что предельной точкой множества E называется точка z_0 , в любой окрестности которой содержится бесконечное число точек E или, что, то же самое, хотя бы одна точка множества E , отличная от z_0 .

Определение 3.12. Равномерно ограниченной в области D называется такая функция $f(z)$, что для любого компакта $K \subset D$ существует число $M_K > 0$, такое что $|f(z)| < M_K$ для всех $z \in K$.

¹Так же как и в случае теоремы Леви, в утверждении о достаточности важен тот факт, что предельная функция есть преобразование Стилтjеса именно вероятностной меры. В общем случае сходимость преобразований Стилтjеса влечет за собой не слабую, а так называемую грубую сходимость (vague convergence), которая также как в (1.28) определяется через сходимость интегралов, в которых, однако, в качестве пробных функций вместо непрерывных ограниченных функций используются непрерывные функции с компактным носителем. При грубой сходимости предел последовательности вероятностных мер не обязан быть вероятностной мерой, так как часть массы может уйти на бесконечность. Однако если известно, что предел — это также вероятностная мера, слабая равносильна грубой.

Предположим, что (3.9) доказано. Возьмем в качестве множества D подмножество верхней полуплоскости $\{z \in \mathbb{C}^+ : \Im z > 1/a\}$, где $|s_{\mu_n}(z, \omega)| \leq a$. Выберем в нем последовательность $(z_m)_{m \in \mathbb{N}}$, сходящуюся в некоторой к некоторой точке в D . Каждая из последовательностей $(s_{\mu_n}(z_m, \omega))_{n \in \mathbb{N}}$ сходится для всех ω кроме быть может множеств меры ноль. Множество событий где расходится хотя бы одна из последовательностей при при каком-то $m = 1, 2, \dots$, будучи счетным объединением множеств нулевой меры, также имеет нулевую меру. Значит последовательность преобразований Стилтеса сходится с вероятностью единица для всех z_m одновременно, что в силу теоремы Витали гарантирует одновременную сходимость почти наверное во всех точках верхней полуплоскости, откуда имеем

Теорема 3.13. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – вероятностное пространство, а $\mu(\omega), \mu_1(\omega), \mu_2(\omega), \dots$ – случайные вероятностные меры на \mathbb{R} , т.е. измеримые отображения из Ω в пространство борелевских вероятностных мер на \mathbb{R} . Для слабой сходимости почти наверное

$$\mu_n(\omega) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} \mu(\omega)$$

необходима и достаточна сходимость

$$s_{\mu_n}(z, \omega) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} s_{\mu}(z, \omega).$$

для всех $z \in \mathbb{C}^+$.

3.3 Преобразование Стилтеса эмпирической спектральной меры.

Перейдём теперь к вопросу о том, как преобразование Стилтеса может быть использовано применительно к матрицам. Рассмотрим произвольную эрмитову матрицу $R \in \mathbb{C}^{n \times n}$, то есть матрицу, удовлетворяющую соотношению $R = R^\dagger$. Такую матрицу можно диагонализировать с помощью некоторой унитарной матрицы U ,

$$R \rightarrow URU^\dagger = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – собственные значения матрицы R . Введём соответствующие им эмпирическую спектральную меру и эмпирическую функцию распределения:

$$L_R = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{\lambda_k}, \quad F_R(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{I}_{x \geq \lambda_k}. \quad (3.10)$$

Тогда соответствующее мере L_R преобразование Стилтеса имеет вид

$$s_R(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda - z} dF_R(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k - z} = \frac{1}{n} \text{Tr}(R - zI_n)^{-1}, \quad (3.11)$$

где $I_n \in \mathbb{C}^{n \times n}$ – единичная матрица размера n .

Рассмотрим теперь квадратные матрицы, полученные как произведение двух прямоугольных матриц. Очевидно, что размер такой квадратной матрицы зависит от того, в каком порядке стоят сомножители. В то же время при перестановке сомножителей ранг произведения не меняется. Что можно сказать о собственных значениях в этом случае?

Лемма 3.14. Пусть $m \leq n$, а матрицы $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ и $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$ таковы, что их произведения являются эрмитовыми матрицами: $(AB)^\dagger = AB$, $(BA)^\dagger = BA$. Тогда n собственных значений матрицы AB содержат m собственных значений матрицы BA и $n - m$ нулевых собственных значений.

Доказательство. Заметим, сначала, что если $m = n$, то есть матрицы A и B квадратные и A — обратимая матрица, то выполняется равенство $BA = A^{-1}(AB)A$, то есть одно произведение получается из другого сопряжением, и следовательно их собственные значения совпадают.

Если обе матрицы вырождены, можно немного изменить некоторые их матричные элементы на малую величину ϵ , чтобы сделать их невырожденными, и использовать предыдущий аргумент. Поскольку собственные значения, это корни характеристического многочлена, равенство двух многочленов сохранится и в пределе $\epsilon \rightarrow 0$, некоторые собственные значения обратятся в ноль. Таким образом утверждение доказано для квадратных матриц.

Пусть теперь $m < n$. Можно достроить матрицы A и B до квадратных матриц \tilde{A} и \tilde{B} размера $n \times n$, добавив в них нули, и воспользоваться утверждением, доказанным для квадратных матриц. Действительно, матрица $\tilde{A}\tilde{B}$ совпадает с матрицей AB , а матрица $\tilde{B}\tilde{A}$ имеет блочный вид

$$\tilde{B}\tilde{A} = \begin{pmatrix} BA & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку собственные значения квадратных матриц $\tilde{A}\tilde{B}$ и $\tilde{B}\tilde{A}$ совпадают, получим требуемое утверждение. \square

Два важных следствия будут использоваться далее.

Следствие 3.15. Имеет место соотношение для определителей

$$\det(\lambda I_n - AB) = \lambda^{n-m} \det(\lambda I_m - BA) \quad (3.12)$$

Его важный частный случай при $\lambda = 1$ справедлив не только для матриц но и для бесконечномерных операторов в гильбертовых пространствах.

Следствие 3.16. Для всех $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ справедливо соотношение

$$\frac{m}{n} \cdot s_{BA}(z) = s_{AB}(z) + \frac{n-m}{n} \cdot \frac{1}{z}. \quad (3.13)$$

Это соотношение справедливо независимо от того, какое из чисел n, m больше.

Доказательство. Поскольку собственные значения для AB — это собственные значения для BA , а также ещё $n - m$ нулевых собственных значений, то добавляя соответствующее им слагаемое $(n - m)\delta_0$ к мере L_{BA} , получаем требуемое утверждение. Равенство не изменится, если одновременно поменять местами n с m и AB с BA . \square

Теперь мы готовы сформулировать теорему Марченко-Пастура.

Теорема 3.17. [Закон Марченко-Пастура] Пусть $(x_{ij})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ — двойная последовательность независимых одинаково распределенных комплексных случайных величин, определенных на одном вероятностном пространстве, с независимыми мнимыми и вещественными частями, таких что

$$\mathbb{E}x_{11} = 0, \quad \mathbb{E}|x_{11}|^2 = \mathbb{E}(\Im x_{11})^2 + \mathbb{E}(\Re x_{11})^2 = 1, \quad \mathbb{E}|x_{11}|^s < \infty, \quad s \leq 8,$$

а $X^{(n,m)} \in \mathbb{C}^{n \times m}$ составленные из $n \times m$ первых из них прямоугольные матрицы

$$X^{(n,m)} = \frac{1}{\sqrt{m}} \{x_{ij} : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\},$$

нормированные таким образом, чтобы дисперсия матричных элементов была $\mathbb{D}(X_{ij}^{n \times m}) = 1/m$.

Пусть $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$ и $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ – последовательности натуральных чисел, такие что $n_k, m_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty$, так что $n_k/m_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} c \in (0; \infty)$. Тогда, последовательность ЭСМ $(L_{R_k})_{k \in \mathbb{N}}$ случайных эмпирических спектральных мер матриц $R_k = X^{(n_k, m_k)} \cdot (X^{(n_k, m_k)})^\dagger$ сходится слабо почти наверное,

$$L_{R_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} \mu_{MP}, \quad (3.14)$$

к закону Марченко-Пастура

$$\mu_{MP} = \mu_{MP}^{\text{ac}} + (1 - c^{-1})\delta_0(x)\mathbb{I}_{\{c > 1\}}, \quad (3.15)$$

где μ_{MP}^{ac} – абсолютно непрерывная относительно меры Лебега часть, задаваемая плотностью

$$f_{MP}(x) = \frac{\sqrt{(a_+ - x)(x - a_-)}}{2\pi x c} \mathbb{I}_{\{a_- < x < a_+\}}, \quad a_\pm = (1 \pm \sqrt{c})^2. \quad (3.16)$$

Упражнение 3.18. Используя утверждение теоремы 3.17, покажите, что последовательность эмпирических случайных мер, построенных по сингулярным числам случайных комплексных квадратных матриц с независимыми одинаково распределенными матричными элементами, при увеличении размера матриц почти наверное слабо сходится к половине полукругового закон Вигнера.

Согласно теореме 3.13 для доказательства слабой сходимости ЭСМ достаточно доказать поточечную сходимость её преобразования Стилтеса. Это доказательство состоит из двух шагов.

1. Для любого фиксированного $z \in \mathbb{C}^+$, $s_{R_k}(z) - \mathbb{E}s_{R_k}(z) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} 0$.
2. Для любого фиксированного $z \in \mathbb{C}^+$, $\mathbb{E}s_{R_k}(z) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} s_{MP}(z)$, где

$$s_{MP}(z) = \frac{1 - c - z + \sqrt{(z - a_+)(z - a_-)}}{2cz}, \quad a_\pm = (1 \pm \sqrt{c})^2, \quad (3.17)$$

преобразование Стилтеса распределения Марченко-Пастура.

Упражнение 3.19. Докажите, что преобразование Стилтеса распределения Марченко-Пастура (3.15, 3.16) дается формулой (3.17).

Первый шаг, доказательство сходимости $s_{R_k}(z)$ к своему среднему, можно можно провести так же, как с использованием неравенства Мак Диармида доказывалась сходимость в примере 1.25. А именно, сходимость преобразования Стилтеса ЭСМ матриц R_k следствие того факта, что при изменении ЭСМ вызванное изменением любого из столбцов матрицы $X^{(n_k, m_k)} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$ мало. Это общее важное свойство устойчивости собственных значений матрицы по отношению к возмущениям малого ранга. Обсудим его детальнее перед тем, как перейти к техническим деталям доказательства сходимости.

3.4 Теорема о перемежаемости и возмущение спектра

Теорема 3.20 (Теорема Коши о перемежаемости.). Пусть $A = A^\dagger \in \mathbb{C}^{n \times n}$ — эрмитова матрица, а матрица $A^{(1)}$ получена из матрицы A вычёркиванием первой строки и первого столбца. Пусть, далее, $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ — собственные значения матрицы A , а $\lambda_1^{(1)} \leq \dots \leq \lambda_{n-1}^{(1)}$ — собственные значения матрицы $A^{(1)}$. Тогда справедливы неравенства

$$\lambda_1 \leq \lambda_1^{(1)} \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{n-1} \leq \lambda_{n-1}^{(1)} \leq \lambda_n. \quad (3.18)$$

Доказательство. Проведем доказательство для случая общего положения, когда собственные значения матрицы $A^{(1)}$ строго упорядочены, $\lambda_1^{(1)} < \dots < \lambda_{n-1}^{(1)}$. Считая что они известны, решим задачу на собственные значения матрицы A . Пусть \bar{v} — собственный вектор матрицы A , отвечающий собственному значению λ , $\bar{v}^{(1)}$ — он же, но без первого элемента, то есть $\bar{v}^\dagger = (v_1, \dots, v_n)$, $(\bar{v}^{(1)})^\dagger = (v_2, \dots, v_n)$. Представив матрицу A как

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \bar{a}^\dagger \\ \bar{a} & A^{(1)} \end{pmatrix},$$

мы можем переписать условие $A\bar{v} = \lambda\bar{v}$ в виде системы уравнений

$$\begin{cases} \alpha v_1 + \bar{a}^\dagger \bar{v}^{(1)} = \lambda v_1 \\ \bar{a} v_1 + A^{(1)} \bar{v}^{(1)} = \lambda \bar{v}^{(1)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\lambda - \alpha) v_1 = \bar{a}^\dagger \bar{v}^{(1)} \\ \bar{a} v_1 = (\lambda I_{n-1} - A^{(1)}) \bar{v}^{(1)}. \end{cases}$$

Таким образом, $\bar{v}^{(1)} = (\lambda I_{n-1} - A^{(1)})^{-1} \bar{a} v_1$. Подставляя это выражение в первое уравнение и сокращая на v_1 (в предположении $v_1 \neq 0$ в ситуации общего положения), получим

$$\lambda - \alpha = \bar{a}^\dagger (\lambda I_{n-1} - A^{(1)})^{-1} \bar{a}. \quad (3.19)$$

Пусть теперь $\bar{v}_k^{(1)}$ — собственный вектор матрицы $A^{(1)}$, отвечающий собственному значению $\lambda_k^{(1)}$, то есть $A^{(1)} \bar{v}_k^{(1)} = \lambda_k^{(1)} \bar{v}_k^{(1)}$. Разложим вектор \bar{a} по базису $\bar{v}_1^{(1)}, \dots, \bar{v}_{n-1}^{(1)}$,

$$\bar{a} = \sum_{k=1}^{n-1} (\bar{a}, \bar{v}_k^{(1)}) \cdot \bar{v}_k^{(1)},$$

после чего подставим это разложение в формулу (3.19). Получим

$$\lambda - \alpha = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{n-1} (\bar{a}, \bar{v}_k^{(1)}) \cdot (\bar{v}_k^{(1)})^\dagger (\lambda I_{n-1} - A^{(1)})^{-1} \bar{v}_l^{(1)} \cdot (\bar{a}, \bar{v}_l^{(1)})$$

или

$$\lambda - \alpha = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\left| (\bar{a}, \bar{v}_k^{(1)}) \right|^2}{\lambda - \lambda_k^{(1)}}. \quad (3.20)$$

На формулу (3.20) можно смотреть как на уравнение относительно переменной λ . Левая часть этого уравнения монотонно возрастает на всей числовой прямой. Правая, напротив, на каждом промежутке вида $(\lambda_{k-1}^{(1)}; \lambda_k^{(1)})$ является убывающей функцией, которая при этом принимает все действительные значения, а на лучах $(-\infty; \lambda_1^{(1)})$ и $(\lambda_{n-1}^{(1)}; +\infty)$ она монотонно убывает, принимая значения $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ соответственно (рис. 3.1).

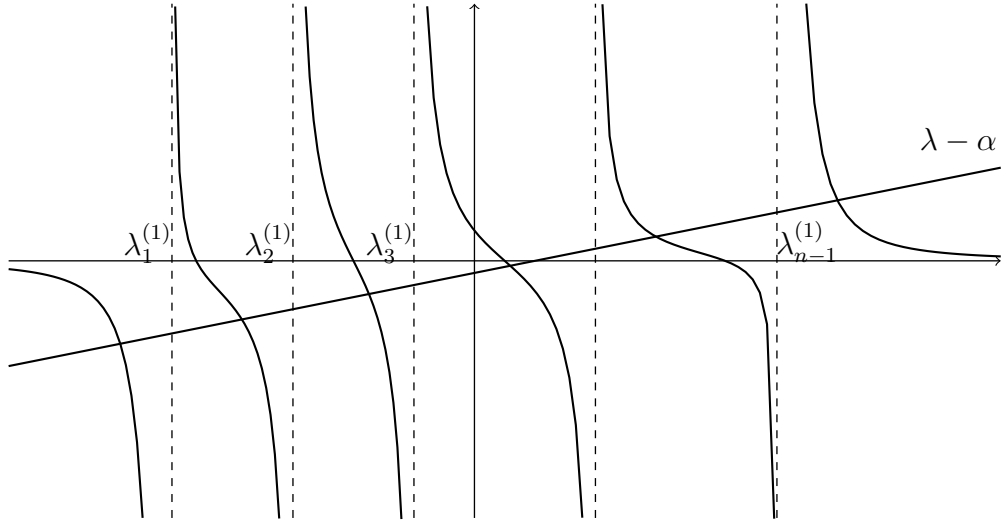


Рис. 3.1:

Следовательно, уравнение (3.20) имеет ровно n решений, которые удовлетворяют неравенству $\lambda_1 < \lambda_1^{(1)} < \lambda_2 < \dots < \lambda_{n-1} < \lambda_{n-1}^{(1)} < \lambda_n$.

В случае матрицы не общего положения можно изменить матричные элементы на малые добавки, чтобы вернуться в ситуацию общего положения. Поскольку собственные значения являются корнями соответствующих характеристических многочленов, при стремлении малых добавок к нулю свойство их перемежаемости сохранится, быть может с заменой строгих неравенств на нестрогие. \square

Перемежаемость собственных значений приводит к нескольким важным следствиям, в частности к тому, что преобразования Стилтеса ЭСМ матриц A и $A^{(1)}$ отличаются не слишком сильно.

Следствие 3.21. В условиях леммы 3.20 для любого $z \in \mathbb{C}^*$ имеет неравенство

$$|s_A(z) - s_{A^{(1)}}(z)| \leq \frac{\pi}{n \cdot \operatorname{Im} z}. \quad (3.21)$$

Доказательство. Заметим, что согласно лемме 3.20 эмпирические функции распределения $F_A(x)$ и $F_{A^{(1)}}(x)$ отличаются друг от друга не слишком сильно:

$$|F_A(x) - F_{A^{(1)}}(x)| \leq \frac{1}{n}. \quad (3.22)$$

Поэтому, используя это неравенство и интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} |s_A(z) - s_{A^{(1)}}(z)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dF_A(\lambda)}{\lambda - z} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dF_{A^{(1)}}(\lambda)}{\lambda - z} \right| = \\ &= \left| \frac{F_A(\lambda) - F_{A^{(1)}}(\lambda)}{\lambda - z} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_A(\lambda) - F_{A^{(1)}}(\lambda)}{(\lambda - z)^2} d\lambda \right| \leq \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\lambda}{(\lambda - z)^2} = \\ &= \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\lambda}{(\lambda - \operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\operatorname{Im} z} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{\lambda - \operatorname{Re} z}{\operatorname{Im} z} \right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{n \cdot \operatorname{Im} z}. \end{aligned}$$

□

Применяя теорему о перемежаемости несколько раз можно обобщить её на матрицы $A^{(k)}$, полученные из A стиранием нескольких столбцов и строк с одинаковыми номерами. При этом условие перемежаемости заменится на (3.18) неравенства

$$\lambda_i \leq \lambda_i^{(k)} \leq \lambda_{i+k}, \quad i = 1, \dots, n - k, \quad (3.23)$$

что в свою очередь приведет к появлению множителя k в числителе а в правой части аналогов формул (3.21,3.22). В свою очередь все эти неравенства есть частный случай более общего неравенства для любых эрмитовых матриц.

Следствие 3.22. Пусть $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ – эрмитовы матрицы. Для любого $z \in \mathbb{C}^+$ имеет неравенство

$$|s_A(z) - s_B(z)| \leq \frac{\pi \cdot \text{rank}(A - B)}{n \cdot \text{Im } z}. \quad (3.24)$$

Доказательство. Пусть $k = \text{rank}(A - B) > 0$. Заметим, что обе стороны неравенства 3.24 инвариантны относительно унитарных преобразований. Найдется унитарное преобразование U , приводящее матрицу $C = A - B$ к следующему блочному виду

$$UCU^\dagger = \begin{pmatrix} \tilde{C} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad UAU^\dagger = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad UBU^\dagger = \begin{pmatrix} B_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

где $\tilde{C} = A_{11} - B_{11} \in \mathbb{C}^{k \times k}$ – эрмитова матрица полного ранга k , Согласно теореме о перемежаемости и, в частности, формуле (3.23), собственные значения матриц A, B и A_{22} связаны неравенствами

$$\max\{\lambda_j(A), \lambda_j(B)\} \leq \lambda_j(A_{22}) \leq \min\{\lambda_{j+k}(A), \lambda_{j+k}(B)\}, \quad j = 1, \dots, n - k, \quad (3.26)$$

откуда следует, что для $x \in [\lambda_{j-1}(A_{22}), \lambda_j(A_{22})]$ мы имеем

$$\max\{\lambda_{j-1}(A), \lambda_{j-1}(B)\} \leq x < \min\{\lambda_{j+k}(A), \lambda_{j+k}(B)\}, \quad (3.27)$$

т.е.

$$\frac{j-1}{n} \leq F_A(x), F_B(x) < \frac{j+k}{n}, \quad (3.28)$$

и мы приходим к (3.24). □

Можно сделать похожее утверждение о том, что разность преобразований Стильтеса ЭСМ ковариационных выборочных матриц ограничена рангом разности исходных прямоугольных матриц.

Следствие 3.23. Пусть $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ – прямоугольные комплексные матрицы. Для любого $z \in \mathbb{C}^+$ имеет место неравенство

$$|s_{AA^\dagger}(z) - s_{BB^\dagger}(z)| \leq \frac{\pi \cdot \text{rank}(A - B)}{\min\{n, m\}(\text{Im } \sqrt{z})^2}. \quad (3.29)$$

Доказательство. Сначала предположим, что $n < m$. Заметим, что собственные значения положительно определенной матрицы AA^\dagger , они же квадраты сингулярных чисел матрицы A , так же дают квадраты собственных значений эрмитовой матрицы $(n+m) \times (n+m)$ вида

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & A^\dagger \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

имеющей симметричный относительно нуля спектр. Кроме того у матрицы \tilde{A} есть еще $(m-n)$ нулевых собственных значений. Следовательно, преобразование Стилтеса спектральной меры матрицы \tilde{A} следующим образом выражается через преобразование Стилтеса спектральной меры матрицы AA^\dagger

$$s_{\tilde{A}}(z) = \frac{1}{n+m} \left(-\frac{m-n}{z} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\lambda_k - z} - \frac{1}{\lambda_k + z} \right) \right) = \frac{2nz}{n+m} s_{AA^\dagger}(z^2) - \frac{1}{z} \frac{m-n}{m+n} \quad (3.30)$$

Применим теорему о перемежаемости к квадратной матрице \tilde{A} , и, заметив, что

$$\text{Rank}(\tilde{A}) = 2\text{Rank}(AA^\dagger), \quad (3.31)$$

придем к сделанному утверждению. Случай $m < n$ рассматривается аналогично. \square

3.5 Доказательство теоремы Марченко-Пастура

Зафиксируем $z \in \mathbb{C}^+$.

Шаг 1.

Рассмотрим преобразования Стилтеса ЭСМ двух матриц XX^\dagger и $X'X'^\dagger$, построенных из матриц $X, X' \in \mathbb{C}^{n \times n}$, отличающихся одним столбцом,

$$X = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_m), \quad X' = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}'_k, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_m).$$

Согласно следствию 3.23 для любого $z \in \mathbb{C}^+$ разность их преобразований Стилтеса ограничена.

$$|s_{XX^\dagger}(z) - s_{X'X'^\dagger}(z)| \leq \frac{\pi}{n \cdot \text{Im } z}. \quad (3.32)$$

Поэтому, также как в примере 1.25, воспользовавшись неравенством Мак Диармида, неравенством Маркова и леммой Бореля-Контелли, мы приходим к следующему утверждению

Лемма 3.24. *В условиях теоремы 3.17 для любого фиксированного $z \in \mathbb{C}^+$ имеет место сходимость*

$$s_{R_k}(z) - \mathbb{E} s_{R_k}(z) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{n.n.} 0. \quad (3.33)$$

Шаг 2.

Идея второго шага доказательства – построить рекуррентную процедуру вычисления преобразования Стилтеса искомой ЭСМ, связав выражения для матриц разных размеров.

Лемма 3.25. Пусть $X \in \mathbb{C}^{n \times m}$ – комплексная матрица. Запишем ее в виде

$$X = (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n)^\dagger, \quad (3.34)$$

где $\mathbf{y}_i \in \mathbb{C}^m$ соответствующие столбцы (а после транспонирования \mathbf{y}_i^\dagger – строки), и пусть

$$Y_i = (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{i-1}, \mathbf{y}_{i+1}, \dots, \mathbf{y}_n)^\dagger, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.35)$$

подматрицы полученные из X вычеркиванием строки с номером $i = 1, \dots, n$. Тогда

$$\left[(XX^\dagger - zI_n)^{-1} \right]_{ii} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 + \mathbf{y}_i^\dagger (Y_i^\dagger Y_i - zI_m)^{-1} \mathbf{y}_i}. \quad (3.36)$$

Доказательство. Докажем утверждение для $i = 1$. Мы воспользуемся леммой 8.5 о дополнении Шура, доказанной в приложении 8.2. Эта лемма дает формулу обращения блочной матрицы вида

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

также в виде блочной матрицы. В частности, при размере $k \times k$ верхнего диагонального блока A матричные элементы такого же верхнего диагонального блока имеют вид

$$\left[M^{-1} \right]_{ij} = \left[(A - BD^{-1}C)^{-1} \right]_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq k. \quad (3.37)$$

Пусть $X \in \mathbb{C}^{n \times m}$. Тогда можем записать

$$X = \begin{pmatrix} \mathbf{y}^\dagger \\ Y \end{pmatrix}, \quad X^\dagger = (\mathbf{y} \quad Y^\dagger), \quad XX^\dagger = \begin{pmatrix} \mathbf{y}^\dagger \mathbf{y} & \mathbf{y}^\dagger Y^\dagger \\ Y \mathbf{y} & Y Y^\dagger \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

Формула (3.37) с $k = 1$, примененная к матрице

$$M = XX^\dagger - zI_n = \begin{pmatrix} \mathbf{y}^\dagger \mathbf{y} - z & \mathbf{y}^\dagger Y^\dagger \\ Y \mathbf{y} & Y Y^\dagger - zI_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

даёт

$$\begin{aligned} \left[(XX^\dagger - zI_n)^{-1} \right]_{11} &= \frac{1}{(\mathbf{y}^\dagger \mathbf{y} - z) - \mathbf{y}^\dagger Y^\dagger (Y Y^\dagger - zI_{n-1})^{-1} Y \mathbf{y}} = \\ &= \frac{1}{-z + \mathbf{y}^\dagger (I_m - Y^\dagger (Y Y^\dagger - zI_{n-1})^{-1} Y) \mathbf{y}} = \frac{1}{-z - z \cdot \mathbf{y}^\dagger (Y^\dagger Y - zI_m)^{-1} \mathbf{y}}, \end{aligned}$$

что соответствует формуле (3.37). \square

Упражнение 3.26. Проверьте, что в указанных выше условиях выполняется равенство:

$$I_m - Y^\dagger (Y Y^\dagger - zI_{n-1})^{-1} Y = z(zI_m - Y^\dagger Y)^{-1}. \quad (3.40)$$

Просуммировав обе части (3.37) и разделив на n , получим преобразование Стильтеса матрицы XX^\dagger в левой части

$$s_{XX^\dagger}(z) = \frac{1}{n} \text{Tr} \left[(XX^\dagger - zI_n)^{-1} \right] = -\frac{1}{nz} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \mathbf{y}_i^\dagger (Y_i^\dagger Y_i - zI_m)^{-1} \mathbf{y}_i}. \quad (3.41)$$

Покажем что, если в качестве матрицы X брать матрицы X_k из условия, то правую часть можно с любой точностью выразить через неё же. Во первых убедимся, что присутствующее в знаменателе произведение $\mathbf{y}_i^\dagger (Y_i^\dagger Y_i - zI_m)^{-1} \mathbf{y}_i$ близко к преобразованию Стильтеса ЭСМ матрицы $Y_i^\dagger Y_i$.

Лемма 3.27. Пусть $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, определенных на одном вероятностном пространстве, таких что $\mathbb{E}x_1 = 0$, $\mathbb{D}|x_1| = 1$ и $\mathbb{E}|x_1|^8 < \infty$, а

$$\mathbf{y}_m = \frac{1}{\sqrt{m}}(x_1, \dots, x_m)^T \in \mathbb{C}^m, \quad m \in \mathbb{N}$$

столбцы из m таких переменных, нормированные так, чтобы дисперсия компонент была равна $1/m$. Пусть, кроме того, $\{A_n \in \mathbb{C}^{n \times n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ – последовательность независимых от $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ комплексных квадратных матриц с ограниченной спектральной нормой. Тогда

$$\mathbf{y}_m^\dagger A_m \mathbf{y}_m - \frac{1}{m} \operatorname{Tr} A_m \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{\text{п.п.}} \quad (3.42)$$

Доказательство. Сходимость в среднем (а точнее тождественное зануление матожидания всех членов последовательности) обеспечивается независимостью компонент векторов \mathbf{y}_m , из которой следует, что

$$\mathbb{E}(y_{m,i}^\dagger y_{m,j}) = \frac{\delta_{ij}}{m},$$

откуда имеем

$$\mathbb{E}(\mathbf{y}_m^\dagger A_m \mathbf{y}_m) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \mathbb{E}((A_m)_{ij} y_i^\dagger y_j) = \frac{1}{m} \mathbb{E} \operatorname{Tr} A_m. \quad (3.43)$$

Для доказательства сходимости почти наверное достаточно убедиться в том, что для некоторого $k \in \mathbb{N}$, $C > 0$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\mathbb{E} \left(\left| \mathbf{y}^\dagger A_m \mathbf{y} - \frac{1}{m} \operatorname{Tr} A_m \right|^k \right) \leq \frac{C}{m^{1+\varepsilon}}, \quad (3.44)$$

после чего достаточно будет воспользоваться леммой 1.13 Бореля-Кантелли.

Проверку неравенства (3.44) для $k = 4$ оформим в виде нижеследующей леммы.

Лемма 3.28. В условиях леммы 3.27 справедлива оценка

$$\mathbb{E} \left(\left| \mathbf{y}^\dagger A_m \mathbf{y} - \frac{1}{m} \operatorname{Tr} A_m \right|^4 \right) = O \left(\frac{1}{m^2} \right), \quad m \rightarrow \infty.$$

Доказательство этой леммы мы оставляем читателю, заметив лишь, что её методика воспроизводит аргументы, использованные при доказательстве теоремы Вигнера методом моментов, с той разницей, что здесь требуется анализ моментов лишь до четвертого порядка включительно. \square

Упражнение 3.29. Докажите лемму 3.28.

Обозначим через $Y_{k,i}$ матрицу, полученную из матрицы $X_k = X^{(n_k, m_k)}$ вычеркиванием строки с номером i , а соответствующую строку $\mathbf{y}_{k,i}^\dagger$. Поскольку для любой эрмитовой матрицы $M \in \mathbb{C}^{m \times m}$ спектральная норма матрицы $(M - zI_m)^{-1}$ ограничена величиной $1/|\Im z|$, из доказанной леммы следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{k,i}^\dagger (Y_{k,i}^\dagger Y_{k,i} - zI_m)^{-1} \mathbf{y}_{k,i} &= s_{Y_{k,i}^\dagger Y_{k,i}}(z) + \delta_{k,i} \\ &= c_k s_{Y_{k,i}^\dagger Y_{k,i}}(z) + (c_k - 1)/z + \delta_{k,i} \\ &= c_k \mathbb{E} s_{X_k X_k^\dagger}(z) + (c_k - 1)/z + \delta'_{k,i}, \end{aligned} \quad (3.45)$$

где $c_k = n_k/m_k$, а $\delta_{k,i}, \delta'_{k,i}$ – последовательности случайных величин сходящихся к нулю почти наверное при $k \rightarrow \infty$ для каждого i . Здесь в первом равенстве мы воспользовались утверждением леммы 3.27, во втором формулой (3.13), связывающей преобразования Стилтеса ЭСМ произведения матриц и переставленных матриц, а в третьем тем, что $s_{Y_{k,i}Y_{k,i}^\dagger}(z)$ и $s_{X_kX_k^\dagger}(z)$ отличаются на $O(1/n_k)$ согласно следствию 3.23, тем что $c_k \rightarrow_{k \rightarrow \infty} c$, и леммой 3.24 о сходимости преобразования Стилтеса к своему матожиданию.

Подставляя X_k вместо X в формулу (3.41), и вычисляя матожидание от обеих частей мы получаем

$$\bar{s}_{R_k}(z) = \frac{1}{1 - c_k - z - c_k z \bar{s}_{R_k}(z)} + \epsilon_k(z), \quad (3.46)$$

где мы ввели обозначения $\mathbb{E}s_{R_k}(z) = \bar{s}_{R_k}(z)$ и

$$\epsilon_k(z) = \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} \mathbb{E} \left(\frac{1}{1 - c_k - z - c_k z \bar{s}_{R_k}(z)} - \frac{1}{1 - c_k - z - c_k z \bar{s}_{R_k}(z) - z \delta'_{k,i}} \right). \quad (3.47)$$

Несложно проверить, что $\epsilon_k(z) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Это следует из того, что $\delta'_{k,i} \rightarrow 0$, т.е. разность знаменателей дробей под знаком суммы стремится к нулю почти наверное и, следовательно, в среднем, тогда как сами знаменатели отделены от нуля при $z \in \mathbb{C}^+$. Действительно, можно сделать следующие оценки

$$|1 - c_k - z - c_k z \bar{s}_{R_k}(z)| \geq |\Im(1 - c_k - z - c_k z \bar{s}_{R_k}(z))| \quad (3.48)$$

и

$$\begin{aligned} \Im(1 - c_k - z - c_k z \bar{s}_{R_k}(z)) &= -\Im(z + c_k z \bar{s}_{R_k}(z)) \\ &= -\Im \left(1 + c_k \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}} \frac{x dF_{L_{R_k}}(x)}{|x - z|^2} \right) \leq -\Im z, \end{aligned} \quad (3.49)$$

где последнее неравенство следует из того факта, что $\text{Supp}(dF_{R_k}) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Уравнение (3.46) имеет два решения

$$s_k^\pm(z) = \frac{1 - c_k - z + c_k z \epsilon_k(z) \pm \sqrt{(1 - c_k - z - c_k z \epsilon_k(z))^2 - 4c_k z}}{2c_k z}. \quad (3.50)$$

Нам осталось доказать, что истинным является решение $s_k^+(z)$, которое очевидно сходится к (3.17) в пределе $k \rightarrow \infty$. Для этого заметим, что из свойств преобразования Стилтеса следует, что $\bar{s}_{R_k}(z) \rightarrow 0$ в пределе $\Im z \rightarrow \infty$ при фиксированном $\Re z$. Из уравнения (3.46) видно, что при этом также $\epsilon_k(z) \rightarrow 0$. Поскольку этому условию удовлетворяет только функция $s^+(z)$, существует некоторая область в \mathbb{C}^+ , в которой $\Im z$ достаточно велико, где равенство $\bar{s}_{R_k}(z) = s_k^+(z)$ точно имеет место. Предположим, что это верно не всюду в \mathbb{C}^+ . Тогда, в силу непрерывности преобразования Стилтеса существует точка $z_0 \in \mathbb{C}^+$, в которой выполнено равенство $s_k^+(z_0) = s_k^-(z_0)$. Из этого равенства следует равенство нулю подкоренного выражения в (3.50), которое имеет место если

$$\epsilon_k(z_0) = \frac{1 - c_k - z_0 \pm 2\sqrt{c_k z_0}}{c_k z_0}. \quad (3.51)$$

Если подставить это выражение назад в (3.50), мы увидим, что из неравенства (3.49) следует, что в (3.51) должен быть выбран знак плюс, откуда имеем

$$\bar{s}_{R_k}(z_0) = \frac{1 - c_k - z_0 + \sqrt{c_k z_0}}{c_k z_0} \quad (3.52)$$

Наконец заметим, что согласно следствию 3.16 преобразование Стилтъяеса $s_{R'_k}$ ЭСМ матрицы $R'_k = X_k^\dagger X_k$, полученной из R_k перестановкой сомножителей, связана $s_{R_k}(z)$ соотношением 3.13. То же самое справедливо для их матожиданий, т.е.

$$\bar{s}_{R'_k}(z_0) = c_k \bar{s}_{R_k}(z_0) + \frac{c_k - 1}{z_0}. \quad (3.53)$$

Подставляя сюда (3.52), приходим к соотношению

$$1 + \bar{s}_{R'_k}(z_0) = \frac{1}{\sqrt{c_k z_0}}, \quad (3.54)$$

которое очевидно не может быть верным, поскольку мнимая часть левой части положительна, а правой отрицательна. Таким образом мы показали, что $\bar{s}_{R_k}(z) = s_k^+(z)$ для всех $z \in \mathbb{C}^+$, а следовательно.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{s}_{R_k}(z) = \frac{1 - c - z + \sqrt{(z - a_+)(z - a_-)}}{2cz}, \quad \forall z \in \mathbb{C}^+, \quad (3.55)$$

где, $a_\pm = (1 \pm \sqrt{c})^2$. Таким образом мы доказали сходимость матожидания преобразования Стилтъяеса ЭСМ матрицы R_k к правой части (3.55), а с учетом леммы 3.24 и сходимость почти наверное самого преобразования Стилтъяеса.

В правой части (3.55) мы видим формулу (3.17) преобразования Стилтъяеса $s_{MP}(z)$ распределения Марченко-Пастура. Действительно, при $0 < c < 1$ функция аналитична на комплексной плоскости с разрезом на отрезке $[a_-, a_+]$ соединяющим две точки ветвления квадратного корня. В этом случае плотность распределения может быть найдена с помощью формул Сохоцкого-Племеля

$$f_{MP}(z) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} s_{MP}(z + iy) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{(a_+ - x)(x - a_-)}}{2cx}$$

При $c > 1$ функция $s_{MP}(z)$ имеет полюс $z = 0$,

$$s_{MP}(z) \sim -\frac{1 - c^{-1}}{z},$$

который говорит о том, что в точке $x = 0$ имеется атом, с вероятностью $1 - c^{-1}$.

Глава 4

Инвариантные β -ансамбли Дайсона

Инструменты исследования больших случайных матриц, обсуждавшиеся выше, позволяют описывать предельные формы спектров этих матриц при достаточно общих предположениях о исходных распределениях матричных элементов. Гораздо сложнее описывать более тонкие характеристики спектров, такие как флуктуации плотности собственных значений вблизи предельных форм, поведение отдельных собственных значений и т.д.

Для ответов на такие вопросы мы рассмотрим более узкие классы случайных матриц, распределенных по мере, характеризуемой наличием большого количества симметрий. Симметрии дают новые возможности, например, развить явные инструменты интегрирования по мерам на случайных матрицах, которые позволяют выписывать точные распределения собственных значений.

Мы уже упоминали выше, что исследования случайных матриц были инициированы попытками выяснить особенности спектров энергий многокомпонентных квантовомеханических систем. В квантовом мире состояния физических систем задаются векторами в гильбертовом пространстве, а физическим наблюдаемым сопоставляются самосопряженные линейные операторы в таких пространствах. Спектр этих операторов даёт возможные значения наблюдаемых, которые могут в принципе могут быть измерены. В частности изучавшиеся Вигнером эрмитовы матрицы служили случайными аналогами гамильтонианов (операторов энергии), типичные (локальные) свойства спектра которых по предположению должны были воспроизводить свойства спектров энергии ядер тяжелых элементов таблицы Менделеева.

Следующий шаг на этом пути, рассматривать Гильбертово пространство вместе с группой симметрий соответствующей физической системы. Действие таких групп реализуется на гильбертовом пространстве унитарными и антиунитарными операторами. В квантовой механике первые связаны с такими преобразованиями, как вращения, а вторые с преобразованиями содержащими обращение времени. Унитарный оператор $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ в гильбертовом пространстве \mathcal{H} – это оператор сохраняющий полуторалинейную форму $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$

$$\langle U\phi, U\psi \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \phi, \psi \rangle_{\mathcal{H}}, \quad \psi, \phi \in \mathcal{H} \quad (4.1)$$

а антиунитарный оператор $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ меняет местами начальное и конечное состояние

$$\langle A\phi, A\psi \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \psi, \phi \rangle_{\mathcal{H}}, \quad \psi, \phi \in \mathcal{H}. \quad (4.2)$$

В случае конечномерных пространств, которые мы будем рассматривать, унитарные операторы представляются унитарными матрицами, а антиунитарные произведением

унитарных матриц и антилинейного оператора комплексного сопряжения. Тот факт, что физическая система инвариантна относительно некоторой группы преобразований, означает, что ее гамильтониан (или другие самосопряженные операторы, представляющие другие наблюдаемые) коммутирует с представлением этой группы в \mathcal{H} .

Какова общая структура представлений групп состоящих из унитарных и антиунитарных операторов,¹ и как устроены пространства эрмитовых матриц, коммутирующих с этими представлениями, или, другими словами, лежащими в их централизаторе?

Не вдаваясь в детали, которые можно найти в статье Дайсона «The Threefold Way. Algebraic Structure of Symmetry Groups and Ensembles in Quantum Mechanics», обрисуем в общих чертах ответ. Соответствующие представления можно реализовать в виде унитарных блочных матриц матричные элементы которых – элементы алгебр с делением над вещественным полем, а коммутирующие с ним Гамильтонианы в виде эрмитовых матриц с матричными элементами из таких же алгебр.

По теореме Фробениуса таких алгебр всего три, и они изоморфны \mathbb{R} , \mathbb{C} и \mathbb{H} , полям действительных чисел, комплексных чисел или телу кватернионов соответственно. Идея настоящего раздела состоит в том, чтобы ввести естественные вероятностные меры на пространствах таких матриц и исследовать статистику их спектра.

4.1 Симметрические пространства и группы Ли

Обратимся сначала к эрмитовым матрицам. Для $n \in \mathbb{N}$ образом мы рассмотрим три пространства матриц размера $n \times n$.

Некомпактные симметрические пространства:

$$\beta = 1 : \quad \text{Symm}(n) := \{M \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid M^T = M\}, \quad (4.3)$$

$$\beta = 2 : \quad \text{Her}(n) := \{M \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid M^\dagger = M\}, \quad (4.4)$$

$$\beta = 4 : \quad \text{Quart}(n) := \{M \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{n \times n} \mid M = M^\dagger = M^R\}. \quad (4.5)$$

По причине, которая станет понятна в дальнейшем, каждому из пространств мы будем сопоставлять одно из значений параметра $\beta = 1, 2, 4$. Первые два пространства это пространства вещественных симметрических матриц и комплекснозначных эрмитовых матриц размера $n \times n$, а третье – самодуальные эрмитовы матрицы размера $n \times n$ с матричными элементами, принимающими значения в алгебре вещественных кватернионов, либо эквивалентные им комплекснозначные матрицы размера $2n \times 2n$. Необходимые сведения о кватернианах можно найти в приложении 8.3.

Все указанные множества являются некомпактными гладкими многообразиями изоморфными $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$, \mathbb{R}^{n^2} , $\mathbb{R}^{n(2n-1)}$ соответственно. Напомним, мы используем эрмитовы матрицы в качестве аналога квантового гамильтониана H . Важную роль, в квантовой механике играет также связанный с гамильтонианом оператор эволюции $U_t = e^{iHt}$. Руководствуясь этой аналогией введем ещё три пространства унитарных матриц

¹Строго говоря, бессмысленно говорить о линейных представлениях антиунитарных операторов и для работы с ними Вигнер использовал понятие копредставления, на котором мы не будем останавливаться.

Компактные симметрические пространства:

$$\beta = 1 : \quad \text{USymm}(n) := \{M \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid M = M^T, MM^\dagger = I_n\}, \quad (4.6)$$

$$\beta = 2 : \quad \text{U}(n) := \{M \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid M^\dagger M = I_n\}, \quad (4.7)$$

$$\beta = 4 : \quad \text{UQuart}(n) := \{M \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{n \times n} \mid M^R = M, MM^\dagger = I_n\}, \quad (4.8)$$

являющихся компактными аналогами многообразий (4.3–4.5). Это пространства симметрических унитарных матриц, произвольных унитарных матриц, образующих унитарную группу $\text{U}(n)$, и пространство самодуальных, унитарных матриц, с матричными элементами, принимающих значения в алгебре комплексных кватернионов $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$, либо соответствующих им комплексных матриц размера $2n \times 2n$.

Упражнение 4.1. *Докажите, что $\text{USymm}(n)$, $\text{U}(n)$ и $\text{UQuart}(n)$ – дифференцируемые многообразия.*

На всех шести многообразиях задано действие групп Ли унитарных матриц с вещественными, комплексными и вещественно кватернионными матричными элементами соответственно, т.е. ортогональной, унитарной и унитарной симплектической групп

Группы Ли:

$$\beta = 1 : \quad \text{O}(n) := \{M \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid M^T M = I_n\}, \quad (4.9)$$

$$\beta = 2 : \quad \text{U}(n) := \{M \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid M^\dagger M = I_n\}, \quad (4.10)$$

$$\beta = 4 : \quad \text{Sp}(n) := \{M \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{n \times n} \mid MM^\dagger = I_n\}. \quad (4.11)$$

Последняя также обозначается $USp(2n)$, где число $2n$ относится к размеру комплексных унитарных матриц, представляющих кватернионные матрицы размера $n \times n$. Группы действуют на многообразиях сопряжением (присоединенное действие),

$$U : M \rightarrow U^\dagger M U \quad (4.12)$$

Заметим, что унитарные преобразования линейных пространств \mathbb{R}^n , \mathbb{C}^n , $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$, задаваемые матрицами из соответствующих групп Ли, сохраняют соответственно вещественную билинейную форму

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \quad (4.13)$$

комплексную полуторалинейную эрмитову форму

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^* y_i, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n, \quad (4.14)$$

и кватернионную эрмитову форму

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n. \quad (4.15)$$

Пространства $\text{USymm}(n)$, $\text{U}(n)$, $\text{UQuart}(n)$ – это подмногообразия групп Ли. Будучи симметрическим пространством, они представимы как факторпространства группы Ли

по её подгруппе. При этом $U(n)$ сама является группой Ли, тогда как в случаях $USymm(n)$ и $UQuart(n)$ это не так.

Действительно, заметим, что в случае $\beta = 1$ для любой симметрической унитарной матрицы $U \in USymm(n)$ существует унитарная матрица $V \in U(n)$, такая что матрица M представляется в виде

$$U = VV^T. \quad (4.16)$$

Выбор матрицы V не единственный. Матрица M не изменится, при любом сдвиге $V \rightarrow VO$ матрицы V ортогональной матрицей $O \in O(n)$. Верно и обратное для любых двух матриц $V \neq \tilde{V} \in U(n)$, таких что $VV^T = \tilde{V}\tilde{V}^T = M$ существует единственная ортогональная матрица $O = V^T\tilde{V}^{-T}$, такая что $\tilde{V} = VO$. Таким образом, каждый элемент $USymm(n)$ задает единственную орбиту действия группы $O(n)$ сдвигами $V \rightarrow VO$ на многообразии группы $U(n)$, т.е.

$$USymm(n) \cong U(n)/O(n). \quad (4.17)$$

Аналогично, для $\beta = 2$ используя тот факт, что матрица $U \in U(n)$ представима в виде

$$U = V_1V_2^\dagger, \quad (4.18)$$

где $V_1, V_2 \in U(n)$ — две другие унитарные матрицы определенные с точностью до умножения на произвольную унитарную матрицу,

$$U(n) \cong (U(n) \times U(n))/U(n). \quad (4.19)$$

Наконец, для $\beta = 4$ любая унитарная самодуальная матрица $U \in UQuart(n)$, определенная с точностью до умножения на произвольную матрицу из $Sp(n)$, представима в виде

$$U = VV^R, \quad (4.20)$$

где $V \in U(2n)$, откуда имеем

$$UQuart(n) \cong U(2n)/Sp(n). \quad (4.21)$$

Упражнение 4.2. Докажите, что унитарная симметрическая матрица имеет представление (4.16), а унитарная самодуальная — представление (4.20).

Что касается некомпактных многообразий, то они изоморфны касательным пространствам своих компактных аналогов в единице.

$$Symm(n) \cong T_{I_n} USymm(n), \quad Her(n) \cong T_{I_n} U(n), \quad Quart(n) \cong T_{I_n} UQuart(n) \quad (4.22)$$

Упражнение 4.3. Докажите соотношения (4.22).

4.2 Интегрирование по пространствам матриц

Наша дальнейшая задача

1. задать на многообразиях (4.3–4.8) меры, инвариантные относительно действия групп Ли;

2. сделать замену координат, чтобы разделить интегрирование по собственным значениям и собственным векторам.

Задав инвариантную меру, мы будем строить вероятностные меры на матрицах, которые порождают инвариантные распределения спектров матриц, а выделив зависимость от собственных значений, мы сможем проинтегрировать по собственным векторам и найти распределения собственных значений в явном виде.

4.2.1 Некомпактные матричные многообразия

Основной результат, который мы докажем, выглядит следующим образом:

Теорема 4.4. Формула Вейля Пусть $\beta = 1, 2, 4$ и

$$\beta = 1 : \quad DM = \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} dM_{ij} \quad (4.23)$$

$$\beta = 2 : \quad DM = \prod_{1 \leq i \leq n} dM_{ii} \prod_{1 \leq i < j \leq n} d\Re M_{ij} d\Im M_{ij} \quad (4.24)$$

$$\beta = 4 : \quad DM = \prod_{1 \leq i \leq n} dM_{ii}^0 \prod_{1 \leq i < j \leq n} \prod_{k=0}^4 dM_{ij}^k \quad (4.25)$$

элементы объема, задающие меры Лебега на $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$, \mathbb{R}^{n^2} , $\mathbb{R}^{n(2n-1)}$, которые в свою очередь задают меры на матрицах $M \in \text{Symm}(n)$, $\text{Her}(n)$, $\text{Quart}(n)$ соответственно. Справедливо соотношение

$$DM = |\Delta(\Lambda)|^\beta d\Lambda d_H U. \quad (4.26)$$

где

$$\Delta(\Lambda) = \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)$$

определитель Вандермонда от собственных значений матрицы M , $d\Lambda = \prod_{i < j} d\lambda_i$ — мера Лебега на \mathbb{R}^n , $d_H U$ — мера Хаара соответствующей группы Ли, и произведение мер в правой части задано на многообразиях $\mathbb{R}^n \times O(n)/(S_n \times \mathbb{Z}_2^n)$, $\mathbb{R}^n \times U(n)/(S_n \times \mathbb{S}_1^n)$ и $\mathbb{R}^n \times \text{Sp}(n)/(S_n \times \mathbb{S}_3^n)$ соответственно, и $\mathbb{S}_k = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{k+1} : |\mathbf{x}| = 1\}$, — k -сфера, а S_n — симметрическая группа. (Конструкция меры Хаара, а также природа факторизации и полупрямого произведения « \times » в знаменателе станет ясна из доказательства.)

Прежде чем приступить к доказательству, мы обсудим несколько важных фактов. Далее мы сосредоточимся на случае $\beta = 1$. За исключением некоторых мелких деталей, рассмотрение случаев $\beta = 2, 4$ аналогично и будет сформулировано в виде упражнения. Покажем сначала, что мера DM из формулировки теоремы 4.4 инвариантна относительно действия группы Ли. Для этого воспользуемся тем фактом, что наш объект — риманово многообразие, и воспользуемся общим методом построения инвариантной формы объема на римановом многообразии.

Пусть \mathcal{M} — n -мерное гладкое риманово многообразие. Это значит, что на нем определена риманова метрика $g(x) : T_x \mathcal{M} \times T_x \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, контрвариантный тензор, задающий положительно-определенное невырожденное скалярное произведение в касательном пространстве к каждой точке многообразия

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq n} g_{ij}(x) a^i b^j, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in T_x \mathcal{M}. \quad (4.27)$$

Здесь $g_{ij}(x)$ – симметрическая матрица, задающая невырожденную положительно определенную квадратичную форму гладко зависящую от точки многообразия.

Риманова метрика естественным образом задает на многообразии элемент длины

$$ds^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} g_{ij} dx^i dx^j, \quad (4.28)$$

так что например длина гладкой кривой $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathcal{M}$ будет даваться интегралом

$$\|\gamma\| = \int_{\gamma} \sqrt{ds^2} = \int_{-1}^1 \sqrt{\langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle} dt$$

и форму объема

$$DV = \sqrt{\det g} \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n, \quad (4.29)$$

инвариантную относительно гладких замен координат $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}(\mathbf{x})$ на \mathcal{M} . Инвариантность следует из того, что при замене координат ковариантные вектора и контрвариантные вектора (1-формы) преобразуются как

$$\tilde{\xi}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \xi_j, \quad dy^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^j. \quad (4.30)$$

В частности для метрического тензора будем иметь

$$\tilde{g}_{ij} = \sum_{1 \leq k, l \leq n} \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial x^l}{\partial y^j} g_{kl}, \quad (4.31)$$

а для n -формы

$$dy^1 \wedge \cdots \wedge dy_n = \det \left[\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right]_{1 \leq i, j \leq n} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx_n, \quad (4.32)$$

откуда следует, что форма объема (4.29) инвариантна относительно замен координат. В частности, форма $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ инвариантна относительно изометрий, т.е. замен, которые сохраняют скалярное произведение (векторов в касательном пространстве) или, что то же самое, риманову метрику.

Пусть теперь $\mathcal{M} = \text{Symm}(n)$. Чтобы построить вектор ξ касательного пространства $T_M \mathcal{M}$, нужно задать гладкое отображение $M : [-1, 1] \rightarrow \mathcal{M}$, такое что $M(0) = 0$. Тогда вектор касательного пространства $\xi \in T_M \mathcal{M}$ будет иметь вид матрицы

$$\xi = \dot{M}(0) = \left. \frac{dM(t)}{dt} \right|_{t=0}. \quad (4.33)$$

Для пары векторов касательного пространства зададим скалярное произведение на \mathcal{M} в виде

$$\langle \xi, \psi \rangle = \text{Tr}(\xi \psi), \quad \xi, \psi \in T_M \mathcal{M}. \quad (4.34)$$

Для так определенного скалярного произведения присоединенное действие (4.12) ортогональной группы является изометрией. Действительно,

$$\langle O^T \xi O, O^T \psi O \rangle = \text{Tr}(O^T \xi O O^T \psi O) = \langle \xi, \psi \rangle, \quad (4.35)$$

откуда следует, что мера (4.23) инвариантна относительно присоединенного действия ортогональной группы.

Чтобы явно увидеть, как выглядит риманова метрика в $\text{Symm}(n)$ рассмотрим отображение

$$\xi \rightarrow (\xi_{1,1}, \dots, \xi_{n,n}, \xi_{1,2}, \dots, \xi_{(n-1),n}),$$

из $\text{Symm}(n)$ в $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ и выпишем скалярное произведение в соответствующем строчке ξ виде

$$\langle \xi, \psi \rangle = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (\xi^T)_{ij} \psi_{ji} = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \xi_{ji} \psi_{ji} = \sum_{i=1}^n \xi_{ii} \psi_{ii} + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \xi_{ji} \psi_{ji}.$$

То есть метрика имеет вид $g = \text{diag}(1, \dots, 1, 2, \dots, 2)$, и, согласно (4.29) инвариантная форма объёма на $\text{Symm}(n)$ имеет вид

$$DV = 2^{\frac{n(n-1)}{4}} \bigwedge_{1 \leq i \leq n} dM_{ii} \bigwedge_{1 \leq j < k \leq n} dM_{jk},$$

что с точностью до постоянного коэффициента дает (4.23).

Теперь перейдём к реализации второй части и построим инвариантную меру (Хаара) на $O(n)$. Чтобы построить касательное пространство в точке $Q \in O(n)$, продифференцируем отображение $Q : [-1, 1] \rightarrow O(n)$. Мы имеем

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (Q^T(t)Q(t)) = \dot{Q}^T(0)Q(0) + Q^T(0)\dot{Q}(0) = 0. \quad (4.36)$$

Пусть сначала $Q(0) = I_n$. Тогда $\dot{Q}^T = -\dot{Q}$. Тогда касательное пространство к $O(n)$ в единице, т.е. алгебра Ли,

$$\mathfrak{o}(n) = T_I O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A_{ij} = -A_{ji}\}, O(0) = I_n, \quad (4.37)$$

состоит из кососимметрических вещественнозначных матриц. В произвольной точке $Q \in O(n)$ матрица $Q^T(0)\dot{Q}(0)$ – кососимметрическая матрица, и касательное пространство дается левым сдвигом алгебры Ли

$$T_Q O(n) = Q \cdot \mathfrak{o}(n) = \{QA \mid A_{ij} = -A_{ji}\}. \quad (4.38)$$

Определим скалярное произведение в $T_Q O(n)$ следующим образом

$$\langle A, \tilde{A} \rangle = \text{Tr}(A^T \tilde{A}) = -\text{Tr}(A \tilde{A}), \quad A, \tilde{A} \in T_Q O(n). \quad (4.39)$$

Оно инвариантно относительно левых сдвигов ортогональными матрицами, $A \rightarrow QA$, где $Q \in O(n)$. Очевидно, что $\dim \mathfrak{o}(n) = \frac{n(n-1)}{2}$, и выраженное в терминах матричных элементов скалярное произведение примет вид удвоенного стандартного скалярного произведения в $\mathbb{R}^{n(n-1)/2}$.

$$\langle A, \tilde{A} \rangle = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} A_{ij} \tilde{A}_{ij}, \quad (4.40)$$

откуда видно, что метрический тензор есть $g_{\mathfrak{o}(n)} = \text{diag}(2, \dots, 2)$ и инвариантная форма объема, задающая меру Хаара на $O(n)$, равна

$$D_H U = 2^{\frac{n(n-1)}{4}} \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} dU_{ij}, \quad (4.41)$$

где мы ввели обозначение $dU_{ij} = (QdQ)_{ij}$ и $dQ = (dQ_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ – матрица из базисных дифференциальных 1-форм. Наконец мы можем разделить интегрирование в $\text{Symm}(n)$ по мере DM на интегрирование по мере Хаара на $O(n)$, т.е. по собственным векторам симметрических матриц, и по их собственным значениям.

Лемма 4.5. *Пусть все собственные значения матрицы $M \in \text{Symm}(n)$ различны. Тогда касательное пространство к $\text{Symm}(n)$ в точке M разлагается в прямую сумму: $T_M \text{Symm}(n) \cong R^n \oplus \mathfrak{o}(n)$, причём $R^n \perp \mathfrak{o}(n)$.*

Доказательство. Пусть сначала матрица $M = \Lambda$ диагональна. Рассмотрим $M(t): (-1, 1) \rightarrow \text{Symm}(n)$, $M(0) = \Lambda$. Тогда для каждого t можно рассмотреть представление $M(t) = Q(t)\Lambda(t)(Q(t))^T$, где $\Lambda(0) = \Lambda$ и $Q(t) \in O(n)$. Дифференцируя, получим

$$\dot{M}(0) = \dot{Q}(0)\Lambda(0)(Q(0))^T + Q(0)\dot{\Lambda}(0)(Q(0))^T + Q(0)\Lambda(0)(\dot{Q}(0))^T. \quad (4.42)$$

Поскольку $\dot{Q} = -\dot{Q}^T$, мы имеем

$$\dot{M}(0) = \dot{\Lambda}(0) + [\dot{Q}(0), \Lambda].$$

Первое слагаемое является диагональной матрицей, а $[\dot{Q}(0), \Lambda]_{ii} = 0$, поэтому $[\dot{Q}(0), \Lambda(0)] \perp \dot{\Lambda}(0)$.

Пусть теперь $M(0) = M$ – матрица произвольного вида. Тогда для $Q(t) \in O(n)$, $Q(0) = Q$, $M(0) = Q\Lambda Q^T$, и мы имеем

$$\begin{aligned} \dot{M}(0) &= \dot{Q}\Lambda Q^T + Q\dot{\Lambda} Q^T + Q\Lambda \dot{Q}^T \\ &= Q Q^T (\dot{Q}\Lambda Q^T + Q\dot{\Lambda} Q^T + Q\Lambda \dot{Q}^T) Q Q^T \\ &= Q(\dot{\Lambda} + [Q^T \dot{Q}, \Lambda]) Q^T. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Матрица $Q^T \dot{Q} \in \mathfrak{o}(n)$ кососимметрична, поэтому у коммутатора $[Q^T \dot{Q}, \Lambda]$ на диагонали нули. А так как $\dot{\Lambda}$ диагональна, то $\dot{\Lambda} \perp [Q^T \dot{Q}, \Lambda]$. \square

Предшествующая лемма позволяет завершить доказательство формулы Вейля (теоремы 4.4).

Доказательство. Формула (4.43) переписанная для 1-форм будет иметь вид.

$$(Q^T dMQ)_{ij} = (d\Lambda + [Q^T dQ, \Lambda])_{ij} = \delta_{ij} d\lambda_i + dU_{ij}(\lambda_i - \lambda_j), \quad (4.44)$$

где $d\Lambda_{ii} = d\lambda_i$ и $dU = Q^T dQ = -dU^T$. Поскольку сопряжение ортогональной матрицей сохраняет форму объема, переход от формы $\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} dM_{ij}$ к форме $\bigwedge_{1 \leq i \leq n} d\lambda_i \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} dU_{ij}$, сводится к вычислению якобиана, т.е. определителя матрицы

$$J = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & (\lambda_i - \lambda_j) & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad (4.45)$$

которое и приводит нас к формуле Вейля (4.26) для $\beta = 1$.

Мы задали отображение $M \rightarrow (\Lambda, Q)$, представив M в виде $M = Q^T \Lambda Q$. Это представление, однако, не является однозначным. Исследуем возможные варианты. Предположим, что матрица M представима через другую пару $M \rightarrow (\Lambda', Q')$, что даёт

$$\Lambda = S \Lambda' S^T, \quad (4.46)$$

где $S = Q(Q')^T$. Таким образом переход между двумя представлениями одной и той же матрицы M однозначно задаётся матрицей $S \in O(n)$, которая связывает между собой две вещественные диагональные матрицы. Поскольку сопряжение не меняет собственных значений, то матрицы Λ и Λ' связаны друг с другом перестановкой диагональных элементов. Можно доказать следующее утверждение.

Лемма 4.6. Пусть $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ с вещественными матричными элементами $\lambda_i \in \mathbb{R}$, причем $\lambda_i \neq \lambda_j$ для любых $1 \leq i \neq j \leq n$. Тогда, матрица $S \in O(n)$ удовлетворяет соотношению (4.46) с диагональной матрицей Λ' , тогда и только тогда, когда её матричные элементы, принимают значения $S_{ij} \in \{\pm 1, 0\}$ и в каждой строке, а также в каждом столбце, она имеет один и только один ненулевой элемент.

Упражнение 4.7. Докажите Лемму 4.6.

Описанные матрицы S — это так называемые знакопеременные матрицы перестановки. Такую матрицу, в свою очередь, можно представить как произведение PD обычной матрицы перестановки P и диагональной матрицы $D = \text{diag}(\{\pm 1\}, \dots, \{\pm 1\})$. Если считать пары (Λ, Q) представляющие одну и ту же матрицу M связанными соотношением эквивалентности « \sim », то констатировать существование гладкого взаимно-однозначного отображения $M \rightarrow (P, Q)/\sim$ из любой открытой области $\text{Symm}(n)$, содержащей лишь матрицы общего положения с попарно различными собственными значениями, в множество классов эквивалентности. Чтобы интегрировать по классам эквивалентности, достаточно ограничить область интегрирования по ортогональной группе матрицами с фиксированными знаками матричных элементов одного из столбцов, а интегрирование по собственным значениям ограничить так называемой камерой Вейля $\mathcal{W}_R = \{\Lambda \in \mathbb{R}^n : \lambda_1 < \dots < \lambda_n\}$. Во вторых однозначность отображения нарушается

Построенное разбиение на классы эквивалентности рушится в точках, где $\lambda_i = \lambda_j$ для каких либо $i \neq j$. Там же отображение теряет однозначность, поскольку якобиан перехода равен нулю. Однако очевидно такие подмножества имеют меньшую размерность и, соответственно, нулевую меру Лебега, поэтому при интегрировании оказываются не важны. \square

Подобным образом формула Вейля доказывается для случаев комплексных эрмитовых и кватернионно-вещественных матриц.

Упражнение 4.8. Докажите формулу Вейля для случаев $\beta = 2, 4$.

4.2.2 Компактные матричные многообразия

Теперь обсудим построение инвариантных мер на компактных симметрических пространствах. Многообразия унитарных матриц $\text{USymm}(n)$, $U(n)$, $U\text{Quart}(n)$ неформально связаны с рассмотренными выше эрмитовыми матрицами переходом $M \rightarrow e^{iM}$. Отличие здесь однако состоит в том, что тогда как стартовой точкой исследования случайных

эрмитовых матриц была полностью факторизованная мера Лебега на независимых матричных элементах, матричные элементы унитарных матриц полученных экспоненцированием существенно взаимно зависимы, т.е. элемент объема не может быть выбран в виде простого произведения дифференциалов от независимых матричных элементов унитарной матрицы.

Разберем случай $\beta = 1$. Рассмотрим отображение $S : [-1, 1] \rightarrow \text{USymm}(n)$, такое что $S(0) = S_0$. Матрица $S(t)$ — симметрическая унитарная матрица. Очевидно элемент $\dot{S}(0)$ касательного пространства $T_{S_0} \text{USymm}(n)$ — также симметрическая матрица $\dot{S}(0) = (\dot{S}(0))^T$, а условие унитарности, $S^\dagger(t)S(t) = I_n$, после дифференцирования в точке $t = 0$ даёт

$$\dot{S}^\dagger(0)S(0) = -S^\dagger(0)\dot{S}(0). \quad (4.47)$$

Отсюда в частном случае $S_0 = I_n$, следует, что $\dot{S}(0)$ — антиэрмитова симметрическая матрица, т.е. симметрическая матрица с чисто мнимыми матричными элементами, $\dot{S}(0) \in \mathbf{iSymm}(n)$. Никаких других условий на матрицу $\dot{S}(0)$ нет, откуда следует первое из соотношений 4.22.

В случае общего S_0 , матрица $S^\dagger(0)\dot{S}(0)$ — все еще антиэрмитова. Однако она не является симметрической, тогда как её сомножители симметричны. Поэтому матричные элементы этой матрицы также не являются хорошими кандидатами для построения независимых базисных матриц и двойственных им базисных дифференциальных форм.

Для решения этой проблемы мы воспользуемся свойством (4.16) унитарных симметрических матриц: каждая унитарная симметрическая матрица S представима в виде $S = V^T V$, где $V \in U(n)$ — унитарная матрица, заданная по S с точностью до умножения слева на произвольную ортогональную матрицу. Введем матрицу $M(t)$ с помощью равенства

$$S(t) = \mathbf{i}V^T M(t)V, \quad (4.48)$$

так что $M(0) = I_n$. Тогда, используя соотношение (4.47), можно убедиться, что матрица

$$\dot{M}(0) = -\mathbf{i}(V^T)^\dagger \dot{S}(0)V^\dagger \quad (4.49)$$

удовлетворяет соотношениям

$$\dot{M}(0) = (\dot{M}(0))^T = (\dot{M}(0))^\dagger, \quad (4.50)$$

т.е. является вещественной симметрической матрицей. Поскольку больше никаких ограничений на элементы $\dot{M}(0)$ нет, то касательное пространство $T_{S_0} \text{USymm}$ изоморфно линейной оболочке множества таких матриц. Заметим, что выбор пары матриц V и $M(t)$, представляющий одну и ту же матрицу $S(t)$, не единственен. Различные матрицы, представляющие одну и ту же матрицу $S(t)$ связаны между собой сдвигом и сопряжением произвольной ортогональной матрицей $V \rightarrow OV, M(t) \rightarrow O^T M(t)O, O \in O(n)$, соответственно.

Дальнейшее построение меры на USymm в основном следует рецепту предыдущего пункта. Сначала введем скалярное произведение на векторах касательного пространства $T_{S_0} \text{USymm}$. Для этого вспомним, что многообразие $\text{USymm}(n)$ — это факторпространство (4.17) группового многообразия унитарной группы $U(n)$ по её ортогональной подгруппе $O(n)$. Поэтому можно ввести скалярное произведение в $T_{S_0} \text{USymm}(n)$, как ограничение скалярного произведения,

$$\langle \xi, \psi \rangle = \text{Tr}(\xi^\dagger \psi), \quad (4.51)$$

вводимого в касательных пространствах к $U(n)$. Там оно вводится аналогично тому, как в предыдущем пункте вводилось скалярное произведение в касательных пространствах к $O(n)$, с точностью до замены транспонирования эрмитовым сопряжением, и также инвариантно относительно левых и правых сдвигов на групповом многообразии, $U \rightarrow VU, U \rightarrow UV$, где $U, V \in U(n)$.

Если теперь от элементов касательного пространства $T_{S_0} \text{USymm}(n)$, перейти с помощью преобразования (4.48) к вещественным симметрическим матрицам $\dot{M}(0)$, скалярное произведение (4.51) совпадет с введенным в предыдущем пункте скалярным произведением (4.34) на касательных векторах к $\text{Symm}(n)$. Скалярное произведение не зависит от выбора конкретной матрицы V , реализующей данную S_0 , и, как было показано выше, инвариантно относительно присоединенного действия ортогональной группы, связывающего различные матрицы $\dot{M}(0)$, представляющие один и тот же элемент $\dot{S}(0)$ касательного пространства $T_{S_0} \text{USymm}(n)$ при различном выборе матрицы V .

Теперь, как в предыдущем пункте, мы можем ввести набор $\{dM_{ij}\}_{1 \leq i < j \leq n}$ базисных дифференциальных 1-форм, двойственный базису, состоящему из матриц, представляющих независимые матричные элементы симметрической вещественной матрицы $\dot{M}(0)$. Переходя от скалярного произведения к римановой метрике, а от метрики к инвариантной форме объема, мы вводим меру Лебега DM на $\text{USymm}(n)$ (а также на $U(n)$ и на $U\text{Quart}(n)$) формулами (4.23-4.25).

Можно показать, что мера DM на $\text{USymm}(n)$ индуцирована мерой Хаара на унитарной группе в том смысле, что интегрирование по унитарной группе можно представить как два последовательных интегрирования: по ортогональной группе $U(n)$ и факторпространству $U(n)/O(n)$. Это определяет единственную постоянную на орбитах действия $O(n)$ меру интегрирования по $U(n)/O(n)$, которая с точностью до нормировки обязана совпадать с DM . В частности эта мера равномерна на $\text{USymm}(n)$.

Действительно, свяжем матрицу дифференциальных форм $dM = (M_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ с матрицей $dS = (dS_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ дифференциалов матричных элементов матрицы S .

$$idM = (V^T)^\dagger dSV^\dagger = (SV^\dagger)^\dagger d(SV^\dagger). \quad (4.52)$$

Матрица в правой части имеет структуру матрицы $U^\dagger dU$, из которой строится мера Хаара унитарной группы

$$D_H U = \prod_{i < j} (U^\dagger dU)_{ij}, \quad (4.53)$$

где $U = SV^\dagger$ (см. в предыдущем пункте аналог для $O(n)$). В силу соотношения (4.16), любые две унитарные симметрические матрицы $V_1, V_2 \in \text{USymm}(n)$ связаны соотношением $V_1 = UV_2U^T$ для некоторой матрицы $U \in U(n)$. Равномерность DM следует из того, что, как объяснено выше, мера Хаара инвариантна относительно правых и левых сдвигов.

Наконец приведем аналог формулы Вейля для перехода от интегрирования по матричным элементам матриц M к интегрированию по собственным значениям и собственным векторам матриц $S \in \text{USymm}(n)$. Так же, как и в предыдущем пункте матрицу S можно ортогональным преобразованием $O \in O(n)$ привести к диагональному виду

$$S = O^T \Theta O, \quad (4.54)$$

где $\Theta = \text{diag}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n})$ – диагональная матрица с живущими на единичной окружности собственными значениями исходной матрицы S на главной диагонали. В качестве переменных интегрирования удобно использовать задающие их фазы $\theta_1, \dots, \theta_n \in [-\pi, \pi)$.

Тогда рассуждения аналогичные доказательству в предыдущем пункте приводят нас к следующему виду формулы Вейля для определенных выше компактных симметрических пространств.

$$DM = \prod_{1 \leq i < j \leq n} |e^{i\theta_i} - e^{i\theta_j}|^\beta d\Theta D_H U, \quad (4.55)$$

где $d\Theta = \prod_{i=1}^n d\theta_i$ и $D_H U$ — мера Хаара группы Ли.

Упражнение 4.9. Докажите формулу (4.55).

4.3 Инвариантные матричные ансамбли

4.3.1 Гауссовы ансамбли

Разделив интегрирования по группам Ли и собственным значениям мы можем задать на $Symm(n)$, $Her(n)$, $Quart(n)$ вероятностные меры, инвариантные относительно действия соответствующих групп Ли, которое, следовательно не будет менять собственных значений.

Для этого достаточно выбрать меру, зависящей от матрицы только через спектральные инварианты, например следы степеней. Кроме того, для того чтобы мера была вероятностной, мы должны потребовать, чтобы интеграл по всему некомпактному многообразию сходил. Самым общим видом такой меры будет мера вида $\mathbb{P}(DM) = \frac{1}{Z} e^{-\text{Tr}f(M)}$ с достаточно быстро растущей на бесконечности функцией $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Общий класс таких мер обычно обозначают термином матричные модели. При каких $f(x)$ все матричные элементы M_{ij} независимы? Другими словами, каково пересечение множеств матричных моделей с множеством вигнеровских матриц. Оказывается, что пересечение исчерпывается функциями вида $f(x) = ax^2 + bx$ с некоторыми $a > 0, b \in \mathbb{R}$. От линейного члена можно избавиться сдвигом среднего значения матричных элементов. В результате мы приходим к определению гауссовых ансамблей.

Определение 4.10. Гауссовы ансамбли: ортогональный, $\beta = 1$; унитарный, $\beta = 2$; симплектический, $\beta = 4$ — это мера на матрицах из $Symm(n)$, $Her(n)$, $Quart(n)$, которая задаётся формулой

$$\mathbb{P}_n^{G,\beta}(DM) = \frac{1}{\mathcal{N}_n^{G,\beta}} e^{-\frac{\beta}{4} \text{Tr}M^2} DM, \quad (4.56)$$

где $\mathcal{N}_n^{G,\beta}$ — нормировочный множитель.

Воспользовавшись формулой Вейля, мы можем проинтегрировать по группе Ли и получить плотность распределения вероятности собственных значений $\Lambda_n = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \in \mathbb{R}^n$ случайных матриц в гауссовых ансамблях.

$$f_{\Lambda_n}^{G,\beta}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{Z_n^{G,\beta}} e^{-\frac{\beta}{4} \sum_{i=1}^n x_i^2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j|^\beta. \quad (4.57)$$

4.3.2 Круговые ансамбли

Еще один пример ансамблей случайных матриц дается мерами на введенных выше компактных многообразиях унитарных матриц. Благодаря компактности, мы можем задать на них равномерную меру.

Определение 4.11. *Круговые ансамбли: ортогональный, (COE), $\beta = 1$; унитарный, (CUE), $\beta = 2$; симплектический, (CEE), $\beta = 4$ — это меры на матрицах из $\text{USymm}(n)$, $\text{U}(n)$, $\text{UQuart}(n)$, которые задаются формулой*

$$\mathbb{P}_n^{C,\beta}(DM) = \frac{DM}{\mathcal{N}_n^{C,\beta}}, \quad (4.58)$$

где DM — мера Лебега (4.23-4.25) на элементах эрмитовых матриц, связанных с унитарными матрицами соотношением ?? и $\mathcal{N}_n^{G,\beta}$ — нормировочный множитель.

Тогда как собственные значения эрмитовых матриц — действительные числа, собственные значения унитарных матриц живут на единичном круге в комплексной плоскости, т.е. имеют вид $\Lambda_n = \{e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}\} \in \mathbb{T}^n$.

Применив формулу Вейля к мере круговых ансамблей и проинтегрировав по алгебре Ли, получим плотность распределения фаз $\Theta_n = \{\theta_1, \dots, \theta_n\} \in [-\pi, \pi]^n$ собственных значений.

$$f_{\Theta_n}^{C,\beta}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{Z_n^{\beta,C}} \prod_{1 \leq k < j \leq n} |e^{ix_k} - e^{ix_j}|^\beta \quad (4.59)$$

4.3.3 Ансамбли Вишерта

Пусть $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ($\mathbb{C}^{n \times m}$, $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{n \times m}$) — вещественная (комплексная, вещественно-кватернионная) матрица размера $n \times m$ ($n > m$) с независимыми одинаково нормально распределёнными матричными элементами, обладающими нулевым средним и дисперсией независимых компонент $1/\beta$, где $\beta = 1, 2, 4$. Пусть $A = XX^\dagger$. Определенное выше распределение матричных элементов матрицы X порождает распределение матричных элементов матрицы A , которые очевидно уже не будут независимы. Приведем здесь это распределение без доказательства.

Лемма 4.12. *Матричные элементы матрицы A имеют следующее*

$$\mathbb{P}(DA) = \frac{1}{\mathcal{N}^{\beta,W}} e^{-\frac{\beta}{2} \text{Tr}(A)} (\det A)^{\frac{\beta}{2}(n-m+1)-1} DA, \quad (4.60)$$

где $\mathcal{N}^{\beta,W}$ — нормировочный множитель, а DA — элемент объема, построенный по матричным элементам матрицы A по формулам (4.23-4.25).

Более подробно мы обсудим эту формулу в задачах (вместе с наброском доказательства). Нетрудно видеть, что это распределение также инвариантно относительно действия соответствующих групп Ли, и мы можем снова воспользоваться формулой Вейля, которая приводит нас к формуле для плотности распределения вероятности собственных значений $\Lambda_n = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \in \mathbb{R}^n$ матриц Вишерта.

$$f_{\Lambda_n}^{\beta,W}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{Z_n^{\beta,W}} e^{-\frac{\beta}{2} \sum_i x_i} \prod_i x_i^{\frac{\beta}{2}(n-m+1)-1} \mathbb{1}_{x_i \geq 0} \prod_{1 \leq k < j \leq n} |x_k - x_j|^\beta. \quad (4.61)$$

4.4 Распределение собственных значений при $n \rightarrow \infty$ и задача кулоновского газа.

Запишем плотность распределения (4.57) n собственных значений эрмитовых матриц $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \subset \mathbb{R}$ в виде

$$f_{\Lambda_n}^\beta(\mathbf{x}) = \frac{1}{Z_n^\beta} e^{-\beta E(\mathbf{x})}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (4.62)$$

где мы ввели обозначение функции $E(\mathbf{x}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, задаваемой формулой

$$E(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n V(x_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \ln |x_i - x_j|, \quad (4.63)$$

в свою очередь определяемую через функцию $V: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, которая для гауссовых ансамблей имеет вид

$$V(x) = \frac{x^2}{4}, \quad (4.64)$$

а в общем случае произвольных матричных моделей может иметь другой вид, например многочлена произвольной чётной степени с положительным коэффициентом при старшем члене.

Читатель знакомый с основами статистической физики без труда узнает в формуле (4.62) распределение Гиббса, описывающее плотность распределения координат n одинаково заряженных частиц в потенциале $V(x)$, находящихся в контакте термостатом при температуре $T = 1/\beta$. Заметим, что логарифмические слагаемые, соответствуют двумерному кулоновскому отталкиванию между частицами. Таким образом в задаче рассматривается двумерный кулоновский газ частиц, положение которых ограничено прямой линией на плоскости.

Термодинамические величины в такой системе определяются средними по распределению Гиббса. Например среднее функции $O: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ координат частиц Λ дается n -кратным интегралом

$$\mathbb{E}O(\Lambda) = \frac{1}{Z_n^\beta} \int_{\mathbb{R}^n} O(\mathbf{x}) e^{-\beta E(\mathbf{x})} d^n \mathbf{x}, \quad (4.65)$$

а нормировочный коэффициент Z_n^β , называемый статистической суммой, есть

$$Z_n^\beta = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\beta E(\mathbf{x})} d^n \mathbf{x}. \quad (4.66)$$

Естественный вопрос, каково типичное распределение частиц в пределе $n \rightarrow \infty$. Подобный вопрос мы уже обсуждали выше, рассматривая предельное поведение эмпирической спектральной меры большой случайной матрицы, и в частности матрицы Вигнера. Как было замечено матрицы их Гауссовых ансамблей также являются матрицами Вигнера. Поэтому, мы ожидаемо придем к полукруговому закону Вигнера. Обсудим его вывод из точного вида спектральной плотности, опустив детали доказательств и пожертвовав математической строгостью.

Забудем пока, что в контексте случайных матриц параметр β принимал дискретные значения, и рассмотрим систему частиц в пределе нулевой температуры $\beta \rightarrow \infty$.

В этом пределе доминирующий вклад в интегралы типа (4.65) даются конфигурациями минимизирующими энергию в экспоненте. Следуя обычной в статистической физике процедуре, введем функцию свободной энергии

$$f_n(\beta) := -\beta^{-1} \ln Z_n^\beta. \quad (4.67)$$

В пределе нулевой температуры ее величина будет равна минимуму энергии

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} f_n(\beta) = \inf_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} E(\mathbf{x}) = E(\mathbf{x}_{\min}), \quad (4.68)$$

при условии что значение

$$\mathbf{x}_{\min} := \arg \inf_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} E(\mathbf{x}), \quad (4.69)$$

минимизирующее энергию, единственно. Это действительно так, когда $E(\mathbf{x})$ – выпуклая функция. Очевидно, что при этом условии предельные значения средних будут определяться той же конфигурацией

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{E}O(\mathbf{x}) = O(\mathbf{x}_{\min}). \quad (4.70)$$

Оказывается, что задача о пределе $n \rightarrow \infty$ тесно связана с пределом нулевой температуры, взятым одновременно с пределом большого числа частиц, в котором плотность распределения частиц стремится к гладкой функции. Чтобы увидеть это, введём перемасштабированные координаты частиц

$$\tilde{\Lambda} = \frac{\Lambda}{\sqrt{n}} = \left\{ \frac{\lambda_1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{\lambda_n}{\sqrt{n}} \right\}, \quad (4.71)$$

которые, согласно главе 2, будут оставаться в ограниченной области в \mathbb{R} при $n \rightarrow \infty$. Также введем перемасштабированный потенциал

$$\tilde{V}(\mathbf{x}) = \frac{V(\sqrt{n} \cdot \mathbf{x})}{n}. \quad (4.72)$$

Плотность распределения перемасштабированных координат имеет вид

$$f_{\tilde{\Lambda}_n}^\beta(\mathbf{x}) = \frac{1}{\tilde{Z}_n^\beta} e^{-\beta n^2 \tilde{E}(\mathbf{x})}, \quad (4.73)$$

где

$$\tilde{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{V}(x_i) - \frac{1}{2n^2} \sum_{i \neq j} \ln |x_i - x_j| \quad (4.74)$$

перемасштабированная энергия. Сравнивая (4.57) с (4.73) мы видим, что при перемасштабировании температурный параметр β изменился βn^2 , так что предел $n \rightarrow \infty$ одновременно становится и пределом нулевой температуры. Конечно это лишь эффект переписывания энергии в терминах новых перемасштабированных переменных. Этот факт, однако, становится нетривиальным, если предположить, что стационарные значения x_1, \dots, x_n , минимизирующие энергию, остаются ограниченными в пределе $n \rightarrow \infty$, что в свою очередь приводит к ограниченности $\tilde{E}(\mathbf{x})$. Действительно, если в такой записи слагаемые под знаками сумм порядка единицы, в силу наличия нормировочных множителей перед суммами все выражение также будет порядка единицы. С этого момента,

мы будем рассматривать формулы (4.73, 4.74) как отправную точку, считая что функция $\tilde{V}(x)$ – независимая от n произвольная ограниченная снизу непрерывная функция, растущая при $|x| \rightarrow \infty$ достаточно быстро для того, чтобы потенциал удерживающий частицы от ухода на бесконечность доминировал над кулоновским отталкиванием.

Так же как в (4.68), основной вклад в свободную энергию дают конфигурации частиц, минимизирующие энергию, с той однако разницей, что теперь число частиц стремится к бесконечности. В случае фиксированного числа n частиц, задача состоит в нахождении минимума функции n переменных, и сводится к системе n алгебраических уравнений. Чтобы придать смысл аналогичной задаче с меняющимся числом $n \rightarrow \infty$ рассмотрим отображение $\mu : \tilde{\Lambda}_n \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$, введя эмпирическую меру

$$\mu_{\tilde{\Lambda}_n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{\tilde{\lambda}_i}. \quad (4.75)$$

Тогда энергию (4.74) можно рассматривать как функционал $E_n : \mathcal{P} \rightarrow \{\mathbb{R} \cup +\infty\}$ на пространстве вероятностных мер, положив $E_n(\mu) := \tilde{E}(\mathbf{x})$, если $\mu = \mu_{\mathbf{x}}$ имеет вид (4.75) эмпирической меры, т.е. нормированной суммы n дельта-мер, где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, так что $x_j \neq x_j$ для любых $1 \leq i \neq j \leq n$, и $E_n(\mu) = +\infty$ в противном случае. Таким образом, задача (4.68) вычисления свободной энергии при нулевой температуре и связанная с ней она задача (4.69) нахождения минимизирующей энергию конфигурации n частиц сводятся к отысканию минимума функционала $E_n(\mu)$ на пространстве вероятностных мер. Заметим, что на такой эмпирической мере $\mu = \mu_{\mathbf{x}}$, для которой он конечен, функционал вычисляется в виде интеграла

$$E_n(\mu) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{V}(x) \mu(dx) - \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \ln |x - y| \mathbb{I}_{x \neq y} \mu(dx) \mu(dy). \quad (4.76)$$

Его бесконечномерный аналог $\mathcal{E} : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, минимум которого будет определять предел мер, минимизирующих функционалы E_n при $n \rightarrow \infty$, а также соответствующий предел свободной энергии, записывается в виде

$$\mathcal{E}(\mu) := \int_{\mathbb{R}} \tilde{V}(x) \mu(dx) - \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \ln |x - y| \mu(dx) \mu(dy). \quad (4.77)$$

Справедливы следующие утверждения, которые мы приводим без доказательств.

Утверждение 4.13. Пусть $\mu_n = \arg \inf_{\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})} E_n(\mu)$, $n \in \mathbb{N}$ – меры минимизирующие функционалы E_n , а $\mu_{\text{eq}} := \arg \inf_{\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})} \mathcal{E}(\mu)$ – (равновесная) мера на которой достигается минимума $\mathcal{E}(\mu)$. Такие меры существуют и единственны, а мера μ_{eq} имеет компактный носитель. Имеют место предельные переходы

$$\mu_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mu_{\text{eq}}, \quad (4.78)$$

$$\mathfrak{f}_{\tilde{\Lambda}_n}(\beta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \inf_{\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})} \mathcal{E}(\mu) = \mathcal{E}(\mu_{\text{eq}}), \quad (4.79)$$

Таким образом эмпирические меры минимизирующие энергию конечного числа частиц слабо сходятся к равновесной мере μ_{eq} , минимизирующей $\mathcal{E}(\mu)$ а свободная энергия сходится к $\mathcal{E}(\mu_{\text{eq}})$. Единственность решения задач о минимизации функционалов

4.4. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПРИ $n \rightarrow \infty$ И ЗАДАЧА КУЛОНОВСКОГО

следует из их выпуклости, доказательство которой мы оставляем за рамками этого изложения.

Найдем вероятностную меру μ_{eq} , на которой $\mathcal{E}(\mu)$ имеет экстремум. Потребуем чтобы его вариация была равна нулю, при условии $\int d\mu = 1$, которое добавляется с помощью метода множителей Лагранжа.

$$(4.80)$$

Получим

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \tilde{V}(x) \delta\mu(dx) - \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \ln|x-y| \mu(dx) \delta\mu(dy) + \alpha \int_{\mathbb{R}} \delta\mu(dx) \right) = 0. \quad (4.81)$$

что приводит нас к уравнению

$$\tilde{V}(x) - \int_{\mathbb{R}} \ln|x-y| \mu(dy) + \alpha = 0, \quad x \in \text{Supp}(\mu), \quad (4.82)$$

которое должно выполняться в точках носителя меры μ . Если посмотреть на это уравнение в пределе $x \rightarrow \infty$, видно что оно не может выполняться при сколь угодно больших x , так как по предположению \tilde{V} растет быстрее, чем логарифм. Поэтому носитель распределения обязан быть ограниченным. Продифференцируем полученное уравнение, предполагая, что искомая мера μ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, а её плотность распределения $f_\mu(x)$ – липшицева функция, т.е. удовлетворяет неравенству $|f_\mu(x) - f_\mu(y)| < c|x-y|$ для некоторого $c > 0$. Заметим, что хотя в этом случае интеграл в левой части (4.82), будучи несобственным интегралом, ограничен равномерно по x , простое дифференцирование под знаком интеграла приводит к особенности подынтегральной функции не интегрируемой абсолютно. Тем не менее, если интеграл понимать как интеграл в смысле главного значения, не трудно показать, что предел, соответствующий главному значению, и дифференцирование можно поменять местами, что даёт

$$\tilde{V}'(x) - V.P. \int \frac{f_\mu(y)}{x-y} dy = 0. \quad (4.83)$$

Далее воспользуемся второй формулой Сохоцкого-Племеля (см. приложение 8.1)) чтобы переписать это уравнение в виде

$$2\tilde{V}'(x) + S_\mu(x + i\varepsilon) + S_\mu(x - i\varepsilon) = 0, \quad x \in \text{supp}(\mu), \quad (4.84)$$

где S_μ – преобразование Стилтеса искомой меры, а $\varepsilon > 0$ – малая величина добавленная к аргументу функций, для которых во всех формулах подразумевается их предельные значения при $\varepsilon \rightarrow +0$. Полученное уравнение можно считать частным случаем задачи Римана-Гильберта. Нам нужно найти функцию $S_\mu(x)$, $x \in \mathbb{C}$, аналитичную в $\mathbb{C} \setminus \text{supp} \mu$, заданную граничными условиями (4.84) на разрезе, совпадающем с носителем меры μ , и убыванием

$$S_\mu(z) \sim -\frac{1}{z} \quad (4.85)$$

на бесконечности. Для этого введем функцию

$$P(x) = 2\tilde{V}'(x)S_\mu(x) + S_\mu^2(x). \quad (4.86)$$

Для нее справедливо равенство

$$\begin{aligned} P(x + \mathbf{i}\varepsilon) - P(x - \mathbf{i}\varepsilon) &= 2\tilde{V}'(x)(S_\mu(x + \mathbf{i}\varepsilon) - S_\mu(x - \mathbf{i}\varepsilon)) + S_\mu^2(x + \mathbf{i}\varepsilon) - S_\mu^2(x - \mathbf{i}\varepsilon) \quad (4.87) \\ &= (2\tilde{V}'(x) + S_\mu(x + \mathbf{i}\varepsilon) + S_\mu(x - \mathbf{i}\varepsilon))(S_\mu(x + \mathbf{i}\varepsilon) - S_\mu(x - \mathbf{i}\varepsilon)) = 0, \end{aligned}$$

так как что один из сомножителей равен нулю на разрезе, а второй— во всех остальных точках комплексной плоскости, в которых преобразование Стилтеса аналитично. Таким образом функция $P(x)$ аналитична во всей плоскости \mathbb{C} . Кроме того, согласно уравнению (4.84) она имеет конечный порядок роста на бесконечности, $P(x) \sim \frac{2\tilde{V}'(x)}{x}$ при $x \rightarrow \infty$. В случае, когда $\tilde{V}(x)$ — многочлен, $P(x)$ также многочлен степени $d = \deg P(x) = \deg \tilde{V}(x) - 2$. Предположив, что этот многочлен известен, можно решить уравнение (4.86) и найти меру, обратив преобразование Стилтеса S_μ . В общем случае многочлен $P(x)$ все еще содержит d свободных параметров (корней многочлена), один из которых фиксируется вероятностной нормировкой меры, а остальные параметризуют $(d-1)$ - мерное семейство мер, в котором теперь нужно решать задачу минимизации, подбирая $(d-1)$ параметров.

Простейший случай $d = 1$, в котором $P(x)$ оказывается константой, и ответ для S_μ получается сразу, — случай гауссовых ансамблей. В этом случае потенциал квадратичен,

$$\tilde{V} = \frac{x^2}{4},$$

откуда, учитывая асимптотику (4.85), приводящую к $P(x) = -1$, получим уравнение (4.86) в виде

$$xS_\mu + S_\mu^2 + 1 = 0. \quad (4.88)$$

Выбирая решение этого уравнения, удовлетворяющее (4.85) получим ответ в виде

$$S_\mu(z) = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + 4}}{2} \quad (4.89)$$

преобразования Стилтеса полукругового закона Вигнера

$$f_\mu(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} S_\mu(x + \mathbf{i}\varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - x^2}. \quad (4.90)$$

Глава 5

Точечные процессы

Полученные в предыдущих главах распределения собственных значений случайных матриц в инвариантных ансамблях это частный случай вероятностных мер на точечных конфигурациях, называемых точечными процессами. Более того, меры которые мы получили имеют дополнительную структуру так называемых детерминантных (в случае $\beta = 1$) и пфаффианных ($\beta = 1, 4$) точечных процессов, которая делает эти модели точно решаемыми в смысле, который мы объясним позже. Ниже мы даем краткое введение в точечные процессы и, в частности, в детерминантные точечные процессы.

Итак, что такое точечный процесс?

Определение 5.1. Пусть \mathfrak{X} — локально компактное топологическое пространство Хаусдорфа со счетной базой. Точечная конфигурация ξ — это локально-конечная функция $\xi: \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Множество всех точечных конфигураций мы будем обозначать $\text{Conf}(\mathfrak{X})$.

Чтобы уйти от излишней общности, мы предлагаем читателю представлять в качестве пространства \mathfrak{X} полное сепарабельное метрическое пространство, а еще конкретнее пространство \mathbb{R}^d с топологией порожденной евклидовой метрикой или прямую сумму нескольких таких пространств, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем.

Замечание 5.2. Локальная компактность означает, что у любой точки существует предкомпактная окрестность, т.е. окрестность замыкание которой компактно.

Для описания точечных конфигураций мы часто будем использовать термин частицы, говоря, что в точке x находится $\xi(x)$ частиц, а в любом другом борелевском подмножестве $A \subset \mathfrak{X}$ сумма значений по всем точкам в этой области. Пусть $\mathcal{B}(\mathfrak{X})$ — борелевская сигма алгебра подмножеств \mathfrak{X} . Введем функцию, считающую число частиц $\nu: \text{Conf}(\mathfrak{X}) \times \mathcal{B}(\mathfrak{X}) \rightarrow \mathbb{N} \cup \infty$,

$$\nu_{\xi}(A) = \sum_{\{x \in A: \xi(x) \neq 0\}} \xi(x), \quad \xi \in \text{Conf}(\mathfrak{X}), A \in \mathcal{B}(\mathfrak{X}). \quad (5.1)$$

Локальная конечность означает, у любого $x \in \mathfrak{X}$ есть открытая окрестность U с конечным числом частиц, $\nu_{\xi}(U) < \infty$. В этом случае любое компактное множество C содержит не более, чем конечное число частиц,

$$\nu_{\xi}(C) < \infty.$$

Можно показать, что число частиц в точечной конфигурации не более чем счётно. Перенумеруем точки в которых $\xi(x) \neq 0$ некоторым естественным образом $\xi \rightarrow \{\dots, x_0, x_1, \dots\}$ элементами некоторого подмножества $\mathcal{I} \subset \mathbb{Z}$ множества целых чисел. Функцию ν_ξ можно интерпретировать как считающую меру,

$$\nu_\xi = \sum_{i \in \mathcal{I}} \xi(x_i) \delta_{x_i}, \quad (5.2)$$

принимающую на борелевских множествах неотрицательные целые (или бесконечное) значения. Таким образом эта функция даёт отображение из пространства точечных конфигураций в пространство целочисленных локально конечных мер на $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}(\mathfrak{X}))$.

Определение 5.3. Считающая мера ν_ξ называется простой, если $\xi(x) \leq 1$ для любых $x \in \mathfrak{X}$.

Зададим σ -алгебру на $\text{Conf}(\mathfrak{X})$. Пусть $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{X})$ — борелевское подмножество. Определим цилиндрические множества формулой

$$C_n^A = \{\xi \in \text{Conf}(\mathfrak{X}) : \nu_\xi(A) = n\}$$

(то есть в заданном A содержится ровно n частиц). Пусть $\mathcal{T}(\mathfrak{X})$ — сигма-алгебра, порождённая всеми C_n^A .

Определение 5.4. Точечный процесс — это (вероятностная) мера на $(\text{Conf}(\mathfrak{X}), \mathcal{T}(\mathfrak{X}))$.

Для задания меры достаточно определить $\mathbb{P}(\nu_\xi(A_1) = n_1, \dots, \nu_\xi(A_k) = n_k, \dots)$ для дизъюнктивных подмножеств (то есть таких, что $A_i \cap A_j = \emptyset$).

Определение 5.5. Точечный процесс называется простым, если для каждой точки $x \in \mathfrak{X}$ выполнено $\mathbb{P}(\xi(x) > 1) = 0$.

Далее мы рассматриваем только простые точечные процессы.

Пример 5.6. Пуассоновский процесс: $\mathfrak{X} = \mathbb{R}^n$, простой с интенсивностью λ . Задаётся соотношением

$$\mathbb{P}(\nu_\xi(A) = k) = \frac{(\lambda|A|)^k}{k!} e^{-\lambda|A|},$$

где $|A|$ — мера Лебега множества A , то есть его объём (на самом деле, не обязательно именно мера Лебега, но это самый типичный пример). Для $A \cap B = \emptyset$ имеем

$$\mathbb{P}(\nu_\xi(A) = k, \nu_\xi(B) = m) = \mathbb{P}(\nu_\xi(A) = k) \mathbb{P}(\nu_\xi(B) = m).$$

Пример 5.7. Процесс Бернулли: $\mathfrak{X} = \mathbb{Z}^n$, простой, задаётся соотношением

$$\mathbb{P}(\nu_\xi(x) = 1) = \rho, \quad \mathbb{P}(\nu_\xi(x) = 0) = 1 - \rho,$$

а для различных точек $x, y \in \mathfrak{X}$ имеем

$$\mathbb{P}(\nu_\xi(x) = k, \nu_\xi(y) = m) = \mathbb{P}(\nu_\xi(x) = k) \mathbb{P}(\nu_\xi(y) = m).$$

Часто вместо задания вероятностей цилиндрических множеств удобнее описывать процесс через корреляционные функции. Для этого в каждой случайной конфигурации перенумеруем частицы, т.е. составим список $\xi \rightarrow \{\dots, x_0, x_1, \dots\}$ точек $x \in \mathfrak{X}$, таких что $\xi(x) \neq 0$, причем каждая точка повторяется в списке $\xi(x)$ раз. Можно показать, что такую нумерацию можно задать измеримым относительно $\mathcal{T}(\mathfrak{X})$ образом.

Определение 5.8. Пусть $(\text{Conf}(\mathfrak{X}), \mathcal{T}(\mathfrak{X}), \mathbb{P})$ – простой точечный процесс, и $\xi \rightarrow \{\dots, x_0, x_1, \dots\}$ измеримая нумерация частиц. Тогда корреляционной мерой на \mathfrak{X}^n , где $n \geq 1$, называется такая мера R_n , которая удовлетворяет равенству

$$\int_{\mathfrak{X}^n} f R_n = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left(\sum_{i_1 \neq \dots \neq i_n} f(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) \right)$$

для произвольной функции $f: \mathfrak{X}^n \rightarrow \mathbb{R}$ с компактным носителем.

Корреляционные меры позволяют естественным образом вычислять так называемые факториальные моменты случайной меры ν_{ξ} произвольных борелевских множеств, т.е. чисел частиц попадающих в эти множества. Пусть $A \subset \mathfrak{X}$, тогда

$$R_n(A^n) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left(\frac{\nu_{\xi}(A)!}{(\nu_{\xi}(A) - n)!} \right) \quad (5.3)$$

Для нескольких дизъюнктивных множеств $A_1, \dots, A_k \in \mathfrak{X}$ будем иметь

$$R_n(A_1^{n_1}, \dots, A_k^{n_k}) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left(\prod_k \frac{\nu_{\xi}(A_k)!}{(\nu_{\xi}(A_k) - n_k)!} \right) \quad (5.4)$$

где $n_1 + \dots + n_k = n$.

Факториальные моменты — это линейная комбинация обычных моментов,

$$\mathbb{E} \left(\frac{x!}{(x-k)!} \right) = \mathbb{E}(x(x-1) \dots (x-k+1)),$$

которые, в свою очередь, выражаются через первые посредством соотношения

$$\mathbb{E}(x^n) = \sum_{k=1}^n s(n, k) \mathbb{E} \left(\frac{x!}{(x-k)!} \right), \quad (5.5)$$

где $s(n, k)$ — числа Стирлинга 2-го рода. Последние удовлетворяют соотношениям

$$s(n, k) = ks(n-1, k) + s(n-1, k-1), \quad s(n, 1) = s(n, n) = 1$$

Упражнение 5.9. Докажите формулы (5.3-5.5).

Определение 5.10. Пусть R_n — корреляционная мера на \mathfrak{X}^n , и пусть μ — такая мера на \mathfrak{X} (будем называть ее референтной мерой), что R_n абсолютно непрерывна относительно $\mu^{\otimes n}$. Тогда плотность $\rho_n(x_1, \dots, x_n)$ меры R_n относительно $\mu^{\otimes n}$ называется корреляционной функцией.

Из определения в частности следует, что корреляционные функции — симметрические функции своих аргументов.

$$\rho_n(\dots, x, \dots, y, \dots) = \rho_n(\dots, y, \dots, x, \dots), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Пример 5.11. Пусть \mathfrak{X} метрическое пространство, $x \in \mathfrak{X}$, и $B_\epsilon(x)$ – шар радиуса $\epsilon < \epsilon$ центром в точке x . Тогда

$$\rho_n(x_1, \dots, x_n) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E} \nu_\xi(B_\epsilon(x_1)) \cdots \nu_\xi(B_\epsilon(x_n))}{\mu(B_\epsilon(x_1)) \cdots \mu(B_\epsilon(x_n))}. \quad (5.6)$$

В частности, если $\mathfrak{X} = \mathbb{R}$ и $(\text{Conf}(\mathfrak{X}), \mathcal{T}(\mathfrak{X}), \mathbb{P})$ – простой точечный процесс, то его корреляционные функции, заданные относительно меры μ на \mathbb{R} , имеют следующий смысл

$$\rho_n(x_1, \dots, x_n) \mu(dx_1) \cdots \mu(dx_n) \quad (5.7)$$

$$= \mathbb{P}(\text{частицы есть в каждом из } [x_1, x_1 + dx_1], \dots, [x_n, x_n + dx_n]), \quad (5.8)$$

а если μ – дискретная мера, например частицы живут на решетке, то

$$\rho_n(x_1, \dots, x_n) \mu(x_1) \cdots \mu(x_n) = \mathbb{P}(\text{частицы есть в каждом из } x_1, \dots, x_n).$$

Для простых точечных процессов $\rho(x, x, \dots) = 0$ Выразим через корреляционные функции матожидания случайных величин, связанных с мультипликативными функционалами простых точечных процессов.

Пусть $(\text{Conf}(\mathfrak{X}), \mathcal{T}(\mathfrak{X}), \mathbb{P})$ – простой точечный процесс, а $g: \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R}$ – функция с компактным носителем. Перенумеруем точки x случайной точечной конфигурации, в которых $\xi(x) \neq 0$, $\xi = \{x_1, x_2, \dots\} \in \text{Conf}(\mathfrak{X})$, и вычислим среднее от произведения $(1 + g(x_i))$ по всем таким точкам.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left(\prod_{i=1}^{\infty} (1 + g(x_i)) \right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left(\sum_{i_1 < \dots < i_k} g(i_1) \cdots g(i_k) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left(\sum_{i_1 \neq \dots \neq i_k} g(i_1) \cdots g(i_k) \right) \quad (5.9) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{\mathfrak{X}^k} \prod_{i=1}^k g(x_i) \rho(x_1, \dots, x_k) d\mu_1 \cdots d\mu_k. \end{aligned}$$

Выбирая различные функции $g(x)$ можно вычислять

Пример 5.12. Вероятность дырки.

Пусть $A \subset \mathfrak{X}$, $g(x) = -\mathbb{I}_A$. Тогда

$$\mathbb{E} \left(\prod_i (1 - \mathbb{I}_A(x_i)) \right) = \mathbb{P}(\nu_\xi(A) = 0)$$

это вероятность "дырки" (что в A ничего не лежит). Подставляя то, что мы получили выше, имеем

$$\mathbb{E} \left(\prod_i (1 - \mathbb{I}_A(x_i)) \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_{A^k} \rho_k(x_1, \dots, x_k) d\mu_1 \cdots d\mu_k.$$

Эту формулу можно вывести и из чисто вероятностных соображений. Заметим, что слагаемое в правой части с номером k есть с точностью до знака сумма вероятностей таких конфигураций, в которых в A содержится по меньшей мере k частиц. Тогда выражение для вероятности дырки простое следствие принципа включения-исключения.

Пример 5.13. Вероятность k частиц в области A .

Пусть $A \subset \mathfrak{X}$, $g_z(x) = -z\mathbb{I}_A$. Тогда рассмотрим

$$\left. \frac{d^n}{dz^n} \left(\prod_i (1 - z\mathbb{I}_A(x_i)) \right) \right|_{z=1} = (-1)^n \sum_{i_1 < \dots < i_n} \mathbb{I}_A(x_{i_1}) \prod_{i \neq i_1, \dots, i_n} (1 - \mathbb{I}_A(x_i)).$$

С точностью до знака, мы построили индикатор события, состоящего в том, что в A содержится ровно n частиц:

$$(-1)^n \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left. \frac{d^n}{dz^n} \left(\prod_i (1 - z\mathbb{I}_A(x_i)) \right) \right|_{z=1} = \mathbb{P}(\nu_{\xi}(A) = n).$$

Пример 5.14. Производящие функции, моменты, кумулянты и кластерные корреляционные функции.

Пусть $(\text{Conf}(\mathfrak{X}), \mathcal{T}(\mathfrak{X}), \mathbb{P})$ – простой точечный процесс в метрическом пространстве \mathfrak{X} . Зафиксируем точки $y_1, y_2, \dots \in \mathfrak{X}$ и возьмём $g_{\mathbf{z}}(x) = \sum_i z_i \delta_{y_i}^{\mu}(x)$, где функция (точнее функционал) $\delta_y^{\mu}(x)$ понимается следующим образом. Введем функцию

$$\delta_y^{\epsilon}(x) := \frac{\mathbb{I}_{B_{\epsilon}(y)}(x)}{\mu(B_{\epsilon}(y))}, \quad (5.10)$$

а выражения ниже с функцией $\delta_y^{\mu}(x)$ в будем понимать, как выражения с $\delta_y^{\epsilon}(x)$ под знаком предела с $\epsilon \rightarrow 0$. В частности, интегрирование её произведения с функцией $f(x)$, непрерывной в $x = y$, даёт

$$\int_{\mathfrak{X}} f(x) \delta_y^{\mu}(x) \mu(dx) = f(y). \quad (5.11)$$

Если $\mathfrak{X} = \mathbb{R}^d$ а μ – мера Лебега $\mu(d^n x) = d^n x$, то $\delta_y^{\mu}(x)$ имеет смысл дельта функции Дирака, $\delta_y^{\mu}(x) = \delta(x - y)$.

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left(\prod_{i=1}^{\infty} (1 + g_{\mathbf{z}}(x_i)) \right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{\mathfrak{X}^k} \rho_k(x_1, \dots, x_k) \prod_{i=1}^k g_{\mathbf{z}}(x_i) \mu(dx_1) \dots \mu(dx_k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k} \int_{\mathfrak{X}^k} \rho_k(x_1, \dots, x_k) \delta_{y_{i_1}}^{\mu}(x_1) \dots \delta_{y_{i_k}}^{\mu}(x_k) z_{i_1} \dots z_{i_k} \mu(dx_1) \dots \mu(dx_k). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Учитывая, что процесс простой, т.е. $\rho(x, x, \dots) = 0$, и $\rho_k(\dots)$ – симметрические функции своих аргументов, мы можем продолжить равенство так:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i_1 \neq \dots \neq i_k} z_{i_1} \dots z_{i_k} \rho_k(y_{i_1}, \dots, y_{i_k}) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i_1 < \dots < i_k} z_{i_1} \dots z_{i_k} \rho_k(y_{i_1}, \dots, y_{i_k}) =: P(\mathbf{z}). \quad (5.13)$$

Таким образом полученное выражение имеет смысл производящей функции корреляционных функций.

Рассмотрим набор случайных величин,

$$\eta_i^{\epsilon} = \frac{\nu_{\xi}(B_{\epsilon}(y_i))}{\mu(B_{\epsilon}(y_i))}. \quad (5.14)$$

Можно построить из них производящую функцию моментов

$$\begin{aligned} M_{\eta^\epsilon}(\mathbf{z}) &= \mathbb{E} \exp \left(\sum_i z_i \eta_i^\epsilon \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k} \mu_k(\eta_{i_1}^\epsilon, \dots, \eta_{i_k}^\epsilon) z_{i_1} \cdots z_{i_k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i_1 \neq \dots \neq i_k} \mu_k(\eta_{i_1}^\epsilon, \dots, \eta_{i_k}^\epsilon) z_{i_1} \cdots z_{i_k} + (\text{слагаемые с повторениями}), \end{aligned} \quad (5.15)$$

где второй строчке сумма моментов, соответствующих произведениям попарно различных величин η_i^ϵ , выделена явно. Заметим, что после взятия предела $\epsilon \rightarrow 0$ эти моменты превращаются в корреляционные функции

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu_k(\eta_{i_1}^\epsilon, \dots, \eta_{i_k}^\epsilon) = \rho_k(y_{i_1}, \dots, y_{i_k}), \quad (5.16)$$

т.е. почленный предел выделенной суммы совпадает с $P(\mathbf{z})$.

Взяв логарифм, перейдем, как обычно, к производящей функции кумулянтов,

$$\begin{aligned} C_{\eta^\epsilon}(\mathbf{z}) &= \ln M_{\eta^\epsilon}(\mathbf{z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k} c_k(\eta_{i_1}^\epsilon, \dots, \eta_{i_k}^\epsilon) z_{i_1} \cdots z_{i_k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i_1 \neq \dots \neq i_k} c_k(\eta_{i_1}^\epsilon, \dots, \eta_{i_k}^\epsilon) z_{i_1} \cdots z_{i_k} + (\text{слагаемые с повторениями}), \end{aligned} \quad (5.17)$$

которые связаны с моментами соотношением (1.18). Здесь в второй строке мы опять явно выделили сумму без повторений. Очевидно, что почленный предел этой суммы без повторений, и подобная сумма без повторений выделенная из $\ln P(\mathbf{z})$ совпадают, т.е.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} C_{\eta^\epsilon}(\mathbf{z}) = \ln P(\mathbf{z}) + (\text{слагаемые с повторениями}). \quad (5.18)$$

При этом пределы кумулянтов и моментов с повторениями плохо определены, но они не влияют на слагаемые без повторений и, следовательно, пределы кумулянтов без повторений связаны с корреляционными функциями, как кумулянты с моментами.

Величины

$$t_k(y_{i_1}, \dots, y_{i_k}) = (-1)^{k-1} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} c_k(\eta_{i_1}^\epsilon, \dots, \eta_{i_k}^\epsilon), \quad i_1 \neq \dots \neq i_k \quad (5.19)$$

называются кластерными корреляционными функциями. Согласно сказанному выше их производящая функция

$$T(\mathbf{z}) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \sum_{i_1 < \dots < i_k} z_{i_1} \cdots z_{i_k} t_k(y_1, \dots, y_k) \quad (5.20)$$

выражается через логарифм $P(\mathbf{z})$

$$\ln P(\mathbf{z}) = T(\mathbf{z}) + (\text{слагаемые с повторениями}). \quad (5.21)$$

Перераскладывая логарифм ряда в новый ряд последовательно получим

$$t_1(x) = \rho_1(x), \quad (5.22)$$

$$t_2(x_1, x_2) = \rho_1(x_1)\rho_1(x_2) - \rho(x_1, x_2), \quad (5.23)$$

и так далее.

5.1 Детерминантный точечный процесс

Важным примером точечного процесса является детерминантный точечный процесс.

Определение 5.15. Точечный процесс $(\mathbb{P}, \text{Conf}(\mathfrak{X}), \mathcal{T})$ называется детерминантным если существует измеримая функция $K : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{C}$, такая что все корреляционные функции представимы в виде

$$\rho_k(x_1, \dots, x_k) = \det_{1 \leq i, j \leq k} (K(x_i, x_j)), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (5.24)$$

Замечание 5.16. По построению сразу получается, что детерминантный процесс — простой.

Применим к детерминантному процессу ту теорию, которую мы развили выше. Подставляя детерминантные выражения для корреляционных функций а формулу (5.9) получим

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left(\prod_{i=1}^{\infty} (1 + g(x_i)) \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{\mathbb{R}^k} \det_{1 \leq i, j \leq n} (K(x_i, x_j)g(x_i)) d\mu(x_1) \dots d\mu(x_k). \quad (5.25)$$

Как понимать ряд в правой части,

Заметим, что если A — некоторая матрица, то определитель матрицы $(I + A)$ можно записать в виде разложения по диагональным минорам матрицы A

$$\begin{aligned} \det(I + A) &= 1 + \sum_i A_{ii} + \sum_{i_1 < i_2} \det \begin{pmatrix} A_{i_1 i_1} & A_{i_1 i_2} \\ A_{i_2 i_1} & A_{i_2 i_2} \end{pmatrix} + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k} \det_{1 \leq l, m \leq k} \{A_{i_l, i_m}\} \end{aligned} \quad (5.26)$$

Если теперь думать о $g(x)K(x, y)$ — как о ядре интегрального оператора $\widehat{gK} : L^2(\mathfrak{X}, \mu) \rightarrow L^2(\mathfrak{X}, \mu)$, заданного соотношением

$$(\widehat{gK}f)(x) = \int_{\mathfrak{X}} g(x)K(x, y)f(y)d\mu(y),$$

мы видим, что правая часть (5.25) также есть разложение по диагональным минорам подобного определителя

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left(\prod_{i=1}^{\infty} (1 + g(x_i)) \right) = \det(1 + \widehat{gK})_{L^2(\mathfrak{X}, \mu)}. \quad (5.27)$$

В правой части стоит определитель Фредгольма оператора, действующего на функциональном пространстве, одно из определений которого для случая интегрального оператора дается рядом в правой части формулы (5.25). Конечно, для того, чтобы это выражением имело смысл, сумма ряда должна быть хорошо определена. Однако, отложим пока математические подробности и применим это общее выражение к величинам,

обсуждавшимся в примерах 5.12-5.14, обращаясь с определителями бесконечномерных операторов как с матрицами.

Вероятность дырки:

$$\mathbb{P}(\nu_\xi(A) = 0) = \det(1 - \widehat{K}|_A)_{L^2(\mathfrak{X}, \mu)} = \det(1 - \widehat{K})_{L^2(A, \mu)}; \quad (5.28)$$

Вероятность k частиц в множестве $A \subset \mathfrak{X}$:

$$\mathbb{P}(\nu_\xi(A) = k) = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k}{dz^k} \right|_{z=-1} \det(1 + z\widehat{K})_{L^2(A, \mu)}. \quad (5.29)$$

Кластерные корреляционные функции: Согласно формуле (5.21) коэффициенты производящей функции (5.20) кластерных функций ищутся как коэффициенты при мономах, в которые входят только параметры z_i с разными номерами, в разложении

$$\ln P(\mathbf{z}) = \ln \det \left(1 + \widehat{g_{\mathbf{z}} K} \right)_{L^2(A, \mu)} = \text{Tr} \ln \left(1 + \widehat{g_{\mathbf{z}} K} \right) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{Tr} (g_{\mathbf{z}} K)^n, \quad (5.30)$$

где $g_{\mathbf{z}}(x) = \sum_i z_i \delta_{y_i}^\mu(x)$. Здесь мы выразили логарифм определителя оператора через след логарифма того же оператора и разложили последний в ряд по степеням оператора $\widehat{g_{\mathbf{z}} K}$. Для следов степеней последнего получим

$$\begin{aligned} \text{Tr} (\widehat{g_{\mathbf{z}} K})^k &= \int_{\mathfrak{X}^k} g(x_1) K(x_1, x_2) g(x_2) K(x_2, x_3) \cdots g(x_k) K(x_k, x_1) \mu(dx_1) \cdots \mu(dx_k) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_k \in \mathbb{R}^k} \int \delta_{y_1}^\mu(x_1) K(x_1, x_2) \cdots \delta_{y_k}^\mu(x_k) K(x_k, x_1) z_{i_1} \cdots z_{i_k} d\mu(x_1) \cdots \mu(dx_k) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_k} z_{i_1} \cdots z_{i_k} K(y_{i_1}, y_{i_2}) \cdots K(y_{i_k}, y_{i_1}). \end{aligned} \quad (5.31)$$

Коэффициент при мономе $z_{i_1} \cdots z_{i_k}$ без повторений, $i_1 \neq \cdots \neq i_k$, получается равен

$$\frac{1}{k} \sum_{\sigma \in S_k} K(y_{i_{\sigma(1)}}, y_{i_{\sigma(2)}}) \cdots K(y_{i_{\sigma(k)}}, y_{i_{\sigma(1)}}) = t_k(y_{i_1}, \dots, y_{i_k}). \quad (5.32)$$

Например, в случае, когда ядро эрмитово, t_2 задаётся квадратом модуля корреляционной функции: $K(x, y) = K^*(y, x) \Rightarrow t_2(x, y) = K(x, y)K(y, x) = |K(x, y)|^2$.

Как мы уже поняли, оператор \widehat{K} играет ключевую роль в задании детерминантного точечного процесса. Позже мы обсудим некоторые математические подробности теории определителей Фредгольма более детально, а сейчас заметим, что чтобы оператор K задавал точечный процесс, необходимо, все корреляционные функции были неотрицательны $\rho_n \geq 0$, а определители Фредгольма в правой части формул (5.28, 5.29) были конечны и хорошо определены как минимум для компактных множеств A . Первое условие выполнено например когда оператор $\widehat{K} \geq 0$ – положительный, второе, когда он локально ядерный (определение ядерного оператора мы дадим позже.)

Напоследок отметим свойства детерминантных процессов.

1. Детерминантный процесс — простой (уже отмечали выше).
2. Вероятность того, что число частиц конечно или бесконечно, равна 0 или 1 в зависимости от того, конечна или бесконечно величина $\text{Tr} \widehat{K}$.
3. Если число частиц равно n с вероятностью 1, то \widehat{K} — ортогональный проектор ($\text{rank} \widehat{K} = n$, $\widehat{K}^2 = \widehat{K}$).
4. Теорема Макки-Сошникова.

Теорема 5.17. Пусть \widehat{K} — самосопряженный, положительный, локально-ядерный ограниченный оператор на $L_2(\mathfrak{X}, \mu)$. Его интегральное ядро $K(x, y)$ есть корреляционное ядро детерминантного точечного процесса тогда и только тогда, когда $0 \leq K \leq 1$.

5.2 Биортогональный ансамбль.

Базовым примером детерминантного точечного процесса является биортогональный ансамбль.

Определение 5.18. Пусть (\mathfrak{X}, μ) — конфигурационное пространство с неотрицательной локально-конечной мерой и $\{\psi_i(x)\}_{1 \leq i \leq n}$ и $\{\phi_i(x)\}_{1 \leq i \leq n}$ — два набора линейно независимых вещественнозначных функций из $L^2(\mathfrak{X}, \mu)$ со скалярным произведением

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mathfrak{X}, \mu)} = \int_{\mathfrak{X}} f(x)g(x)d\mu(x), \quad f, g \in L^2(\mathfrak{X}, \mu), \quad (5.33)$$

такие, что их матрица Грамма H с матричными элементами $H_{ij} = \langle \phi_i, \psi_j \rangle_{L^2(\mathfrak{X}, \mu)}$ не вырождена.

Биортогональный точечный процесс — это точечный процесс $(\text{Conf}(\mathfrak{X}), \mathcal{T}(\mathfrak{X}), \mathbb{P})$, в котором мера, сосредоточенная на n -точечных конфигурациях, принимающих значения в \mathfrak{X}^n , абсолютно непрерывна относительно $\mu^{\otimes n}$ и задается плотностью

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{Z_n} \det_{1 \leq i, j \leq n} (\phi_i(x_j)) \det_{1 \leq i, j \leq n} (\psi_i(x_j)), \quad (5.34)$$

где Z_n — нормировочный множитель, обеспечивающий вероятностную нормировку.

Теорема 5.19. Биортогональный точечный процесс, заданный в определении 5.18, является детерминантным точечным процессом с корреляционным ядром

$$K_n(x, y) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \phi_i(x) H_{ij}^{-t} \psi_j(y) \quad (5.35)$$

где матрица H^{-t} получена транспонированием матрицы, обратной к матрице Грамма H .

Перед тем как приступить к доказательству этого утверждения, приведем важную формулу, которую мы будем использовать.

Утверждение 5.20. (Формула Андреева, Andreief, 1883): пусть $f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n \in L^2(\mathfrak{X}, \mu)$ — квадратично интегрируемые в (\mathfrak{X}, μ) функции. Тогда:

$$\frac{1}{n!} \int_{\mathfrak{X}^n} \det_{1 \leq i, j \leq n} (f_i(x_j)) \det_{1 \leq k, l \leq n} (g_k(x_l)) d\mu(x_1) \cdots d\mu(x_n) = \det_{1 \leq i, j \leq n} \left(\int_{\mathfrak{X}} g_i(x) f_j(x) d\mu(x) \right). \quad (5.36)$$

Доказательство. Формулу Андреева можно доказать непосредственно разложением определителей. Вместо этого заметим, что она является прямым обобщением формулы Коши-Бине, см. приложение 8.4. \square

Доказательство. (теоремы 5.2) Сначала вычислим Z_n проинтегрировав плотность и потребовав, чтобы результат был равен единице.

$$Z_n = \int_{\mathfrak{X}^n} \det_{1 \leq i, j \leq n} (\varphi_i(x_j)) \det_{1 \leq i, j \leq n} (\psi_i(x_j)) d\mu(x_1) \cdots d\mu(x_n) = n! \det H. \quad (5.37)$$

Во втором равенстве мы использовали формулу Андреева.

Теперь перепишем плотность, подставив вычисленное значение Z_n , превратив определитель матрицы в знаменателе в определитель обратной матрицы в числителе и заменив произведение определителей определителем произведения матриц, что даёт

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n!} \det_{1 \leq i, j \leq n} K_n(x_i, x_j), \quad (5.38)$$

где $K_n(x, y)$ — ядро определенное в (5.35).

Чтобы получить корреляционную функцию $\rho_n(x_1, \dots, x_n)$, достаточно просуммировать распределение по $n!$ перестановкам n частиц, что в силу симметричности плотности приводит к

$$\rho_n(x_1, \dots, x_n) = \det_{1 \leq i, j \leq n} K_n(x_i, x_j). \quad (5.39)$$

Это равенство действительно согласуется с детерминантностью рассматриваемого точечного процесса. Для доказательства детерминантности нужно сделать подобные утверждения для всех корреляционных функций $\rho_k(x_1, \dots, x_k)$, $k < n$. Чтобы вычислить такую корреляционную функцию, нужно зафиксировать координаты k частиц и проинтегрировать по координатам остальных $n - k$ частиц для всех возможных способов выбрать k частиц из n частиц. В силу симметричности плотности результат можно представить в виде

$$\rho_k(x_1, \dots, x_k) = \frac{n!}{(n - k)!} \int_{\mathfrak{X}^n} f(x_1, \dots, x_n) d\mu(x_{k+1}) \cdots d\mu(x_n), \quad (5.40)$$

что приводит к следующей рекурсии для корреляционных функций

$$\rho_k(x_1, \dots, x_{k-1}) = (n - k + 1) \int_{\mathfrak{X}} \rho_k(x_1, \dots, x_k) d\mu(x_k). \quad (5.41)$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что для детерминантных корреляционных функций, построенных из ядра (5.35), это свойство также выполняется.

Для этого мы воспользуемся следующими свойствами корреляционного ядра K_n (или определяемого им интегрального оператора \widehat{K}_n).

Лемма 5.21. (Свойства ядра.)

$$\int_{\mathfrak{X}} K_n(x, x) d\mu(x) = n, \quad (\text{или } \text{Tr } \widehat{K}_n = n). \quad (5.42)$$

$$\int_{\mathfrak{X}} K_n(x, y) K_n(y, z) d\mu(y) = K_n(x, z), \quad (\widehat{K}_n^2 = \widehat{K}_n - \text{идемпотентность оператора } \widehat{K}_n) \quad (5.43)$$

Доказательство. Имеем для первого свойства:

$$\int_{\mathfrak{X}} K_n(x, x) d\mu(x) = \sum_{k,l=1}^n \int_{\mathfrak{X}} \phi_k(x) H_{kl}^{-t} \psi_l(x) d\mu(x) = \sum_{k,l=1}^n H_{kl} H_{lk}^{-1} = \text{Tr } I_n = n, \quad (5.44)$$

так как

$$\int_{\mathfrak{X}} \psi_i(x) \phi_j(x) d\mu(x) = \langle \phi_i, \psi_j \rangle = H_{ij}. \quad (5.45)$$

Аналогично для второго свойства:

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{X}} K_n(x, y) K_n(y, z) d\mu(y) &= \int_{\mathfrak{X}} \sum_{i,j=1}^N \phi_i(x) H_{ij}^{-t} \psi_j(y) \sum_{k,l=1}^N \phi_k(y) H_{kl}^{-t} \psi_l(z) d\mu(y) \\ &= \sum_{i,j,k,l=1}^n \phi_i(x) H_{ij}^{-t} H_{kj} H_{kl}^{-t} \psi_l(z) = \sum_{i,j,l=1}^n \phi_i(x) H_{ij}^{-t} \delta_{jl} \psi_l(z) = K_n(x, z). \end{aligned} \quad (5.46)$$

□

Из доказанных свойств вытекает еще одно полезное утверждение. Интегрирование определителя, который как мы ожидаем определяет корреляционную функцию, по одному из аргументов выдает определитель подобной матрицы на единицу меньшего размера с коэффициентом.

Лемма 5.22. (Дайсон)

$$\int_{\mathfrak{X}} \det_{1 \leq i,j \leq k} K_n(x_i, x_j) d\mu(x_k) = (n - k + 1) \det_{1 \leq i,j \leq k-1} K_n(x_i, x_j) \quad (5.47)$$

Доказательство. Распишем определитель по определению

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{X}} \det_{1 \leq i,j \leq k} K_n(x_i, x_j) d\mu(x_k) &= \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma \int_{\mathfrak{X}} \prod_{i=1}^k K_n(x_i, x_{\sigma(i)}) d\mu(x_k) \\ &= \sum_{\sigma \in S_{k-1}} (-1)^\sigma \prod_{i=1}^{k-1} K_n(x_i, x_{\sigma(i)}) \int_{\mathfrak{X}} K_n(x_k, x_k) d\mu(x_k) \\ &+ \sum_{\sigma \in S_k, \sigma(k) \neq k} (-1)^\sigma C_\sigma \int_{\mathfrak{X}} K_n(x_k x_{i_1}) K_n(x_{i_1} x_{i_2}) \dots K_n(x_{i_s} x_k) d\mu(x_k). \end{aligned} \quad (5.48)$$

Здесь перестановка σ содержит цикл $(k, i_1, i_2, \dots, i_s)$, C_σ означает произведение ядер, в которые не входит x_k . Первое слагаемое согласно свойству 1 корреляционных ядер превращается в $n \cdot \det_{1 \leq i, j \leq k-1} K_n(x_i, x_j)$. Ко второму слагаемому надо применить свойство 2 корреляционных ядер, и небольшое усилие позволяет понять, что оно равно в точности $-(k-1) \cdot \det_{1 \leq i, j \leq k-1} K_n(x_i, x_j)$. \square

Лемма Дайсона завершает доказательство теоремы. \square

В частности, мы получили, что для $\rho_1(x) = K_N(x, x)$, мы имеем $\int_{\mathfrak{X}} \rho_1(x) dx = N - \int_A \rho_1(x) dx$ (общее количество частиц в пространстве), потому что по смыслу $\int_A \rho_1(x) dx$ есть математическое ожидание числа частиц в множестве A .

Замечание 5.23. *Комплексный вариант биортогонального ансамбля можно задавать в терминах двух наборов комплекснозначных функций $\{\psi_i(x)\}_{1 \leq i \leq n}$ и $\{\phi_i(x)\}_{1 \leq i \leq n}$ из пространства $L^2(\mathfrak{X}, \mu)$ комплексных квадратично интегрируемых функций с полуторалинейным скалярным произведением $\langle f, g \rangle_{L^2(\mathfrak{X}, \mu)} = \int_{\mathfrak{X}} \overline{f(x)} g(x) d\mu(x)$, определив плотность формулой*

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{Z_n} \det_{1 \leq i, j \leq n} (\overline{\varphi_i(x_j)}) \det_{1 \leq i, j \leq n} (\psi_i(x_j)). \quad (5.49)$$

Очевидно все предыдущие выкладки (с точностью до знаков комплексного сопряжения) остаются справедливыми и в этом случае и приводят к ядру

$$K_n(x, y) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \overline{\varphi_i(x)} H_{ij}^{-t} \psi_j(y), \quad (5.50)$$

хотя если мы хотим сохранить вероятностную интерпретацию, нужно потребовать, чтобы исходные наборы функций, обеспечивали вещественность и неотрицательность плотности (5.50). Один из возможных вариантов $\phi_i(x) = \psi_i(x)$, $i = 1, \dots, n$.

5.3 Корреляционные функции в унитарных ансамблях

Рассмотрим два базовых примера биортогональных ансамблей, которые получаются из введенных ранее унитарных ансамблей случайных матриц, $\beta = 2$.

Пример 5.24. *CUE* — круговой унитарный ансамбль задается плотностью

$$f(\theta_1, \dots, \theta_n) = \frac{1}{Z_n} \prod_{1 \leq j < k \leq n} |e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}|^2, \quad (\theta_1, \dots, \theta_n) \in [0, 2\pi] \quad (5.51)$$

распределения фаз n собственных значений, живущих на единичной окружности, или n частиц на отрезке $[0, 2\pi)$. Возьмем

$$\mathfrak{X} = [0, 2\pi), \mu = \frac{dx}{2\pi}. \quad (5.52)$$

Плотность (5.51), записанная в виде

$$f(\theta_1, \dots, \theta_n) = \frac{1}{Z_n} \det_{1 \leq k, j \leq N} (e^{-i\theta_k(j-1)}) \det_{1 \leq j, k \leq N} (e^{i\theta_k(j-1)}), \quad (5.53)$$

задаёт комплексный биортогональный ансамбль из замечания 5.23 с функциями

$$\psi_k(\theta) = \phi_k(\theta) = e^{i\theta(k-1)}, k = 1, \dots, n. \quad (5.54)$$

Согласно (5.50) ядро имеет вид

$$K_n^{CUE}(x, y) = \sum_{k=1}^n e^{i(x-y)k} = \frac{\sin\left(\frac{x-y}{2}n\right)}{\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}, \quad (5.55)$$

где мы воспользовались тем, что матрица Грамма с матричными элементами

$$H_{kl} = \langle \phi_k, \psi_l \rangle = \int_0^{2\pi} e^{i\theta(k-1)} e^{-i\theta(l-1)} \frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} e^{i\theta(k-l)} \frac{d\theta}{2\pi} = \delta_{kl}. \quad (5.56)$$

оказалась единичной матрицей, $H = I_n$.

Пример 5.25. (Ансамбли эрмитовых матриц). Теперь рассмотрим ансамбли эрмитовых матриц с мерами инвариантными относительно присоединенного действия унитарной группы, и в частности гауссов унитарный ансамбль *GUE*.

В этом случае плотность распределения собственных значений относительно меры

$$\mu(dx) = e^{-V(x)} dx, \quad x \in \mathfrak{X} \subset \mathbb{R} \quad (5.57)$$

имеет вид

$$f_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{Z_n} \prod_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j|^2. \quad (5.58)$$

Здесь $V(x)$ — потенциал, выбранный так, чтобы обеспечивать конечность меры, а множитель Z_n в знаменателе обеспечивает единичную нормировку. В частности, в случае *GUE*, ур. (4.57),

$$V(x) = \frac{x^2}{2},$$

а для ансамбля Вишерта, ур. 4.61,

$$V(x) = x - (n - m) \ln x, \quad x \in \mathfrak{X} = \mathbb{R}_{\geq 0}$$

Зададим скалярное произведение в $L^2(\mathfrak{X}, e^{-V(x)} dx)$ формулой (5.33). Пусть $p_i(x)$ и $q_i(x)$ — два произвольных набора приведённых многочленов (старший коэффициент равен единице), степени i ,

$$p_i(x) = x^i + \dots, \quad q_i(x) = x^i + \dots, \quad i = 0, 1, \dots \quad (5.59)$$

Произведения разностей переменных в формуле (5.58) можно записать в виде определителей

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) = \det_{1 \leq i, j \leq n} (p_{i-1}(x_j)) = \det_{1 \leq i, j \leq n} (q_{i-1}(x_j)). \quad (5.60)$$

Таким образом плотность (5.58) задаёт биортогональный ансамбль (5.34) с функциями $\phi_i(x) = p_{i-1}(x)$ и $\psi_i(x) = q_{i-1}(x)$. Как следствие корреляционные функции такой меры имеют детерминантный вид (5.24) с ядром

$$K_n(x_i, x_j) = \sum_{k, l=1}^n p_{k-1}(x_i) H_{kl}^{-1} q_{l-1}(x_j), \quad (5.61)$$

с матрицей

$$H_{ij} = \langle p_{i-1}, q_{j-1} \rangle_{L^2(\mathfrak{X}, \mu)} = \int_{\mathfrak{X}} p_{i-1}(x) q_{j-1}(x) d\mu(x). \quad (5.62)$$

В частности, в качестве $p_i(x)$ и $q_i(x)$ можно выбрать просто одночлены $t_i(x) = x^i$. Тогда матрица H — матрица Ганкеля моментов меры μ ,

$$H_{ij} = \mu_{i+j-2}, \quad i, j = 1, 2, \dots, \quad \mu_k = \int_{\mathfrak{X}} x^k d\mu(x). \quad (5.63)$$

Однако, поскольку матрицу H приходится обращать, часто удобнее выбирать многочлены так, чтобы она имела как можно более простой вид, — например была диагональной. Для этого многочлены выбирают таким образом, чтобы они образовывали ортогональный набор относительно меры μ . С этой целью нам потребуются развитая теория ортогональных многочленов.

Глава 6

Элементы теории ортогональных многочленов

Пусть $\alpha(x)$ — неубывающая функция на $[a; b] \subset \mathbb{R}$, где a и b могут быть как конечными, так и бесконечными. Пусть, далее, на $L^2([a; b], d\alpha(x))$ задано скалярное произведение

$$\langle \psi, \varphi \rangle = \int_x \psi(x)\varphi(x)d\alpha(x).$$

Теорема 6.1. (об ортогонализации Грамма-Шмидта) Пусть $f_0(x), \dots, f_l(x)$ — вещественные линейно независимые функции из $L^2([a; b], d\alpha(x))$. Тогда существует единственная ортонормированная система $\varphi_0(x), \dots, \varphi_l(x)$ такая, что

$$\varphi_n(x) = \lambda_{nn}f_n(x) + \dots + \lambda_{n0}f_0(x), \quad \lambda_{nn} > 0, \quad \langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \delta_{mn}.$$

Доказательство. Доказательство происходит по индукции стандартным образом. Сначала мы проводим ортогонализацию:

$$\psi_0 = f_0, \quad \psi_1 = f_1 - \frac{\langle f_1, \psi_0 \rangle}{\langle \psi_0, \psi_0 \rangle} \psi_0, \quad \psi_2 = f_2 - \frac{\langle f_2, \psi_1 \rangle}{\langle \psi_1, \psi_1 \rangle} \psi_1 - \frac{\langle f_2, \psi_0 \rangle}{\langle \psi_0, \psi_0 \rangle} \psi_0, \dots,$$

а затем — нормировку: $\varphi_n = \frac{\psi_n}{\|\psi_n\|}$. □

Теорема 6.2. Общая формула даётся соотношением

$$\varphi_n = (D_n D_{n-1})^{-1/2} d_n, \tag{6.1}$$

где

$$D_n = \det_{0 \leq i, j \leq n} (\langle f_i, f_j \rangle) \tag{6.2}$$

при $n \geq 0$, $D_{-1} = 1$, а $d_n(x)$ задаётся формулой

$$d_n(x) = \det \begin{pmatrix} \langle f_0, f_0 \rangle & \dots & \langle f_0, f_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle f_{n-1}, f_0 \rangle & \dots & \langle f_{n-1}, f_n \rangle \\ f_0(x) & \dots & f_n(x) \end{pmatrix}. \tag{6.3}$$

Доказательство. Искомые равенства проверяются непосредственно. Именно, при $m < n$ мы имеем $\langle d_n, f_m \rangle = 0$, откуда $\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = 0$. Если же $m = n$, то

$$\langle d_n, \varphi_n \rangle = \lambda_{nn} \langle d_n, f_n \rangle = \lambda_{nn} D_n.$$

Поэтому

$$\langle \varphi_n, \varphi_n \rangle = (D_n D_{n-1})^{-1/2} \langle d_n, \varphi_n \rangle = \lambda_{nn} \sqrt{\frac{D_n}{D_{n-1}}}.$$

$$\text{Отсюда мы получаем } \lambda_{nn} = \frac{D_{n-1}}{\sqrt{D_n D_{n-1}}} = \sqrt{\frac{D_{n-1}}{D_n}}. \quad \square$$

Можно определить приведенные функции $\tilde{\varphi}_n$, у которых старший член равен единице. Они получаются просто делением $\varphi_n(x)$ на λ_{nn} , и для них

$$\langle \tilde{\varphi}_n, \tilde{\varphi}_m \rangle = \delta_{mn} h_n,$$

где

$$h_n = \frac{D_n}{D_{n-1}}. \quad (6.4)$$

Возьмём в качестве $f_n(x)$ одночлены вида $m_n(x) = x^n$. Пусть для любого n существуют моменты

$$\mu_n = \int_a^b x^n d\alpha(x) = \langle m_l, m_k \rangle, \quad k + l = n.$$

Если носитель $d\alpha(x)$ бесконечен, то можно определить бесконечную систему ортогональных многочленов. При этом согласно формуле (6.2)

$$D_n = \det_{0 \leq i, j \leq n} (\mu_{i+j}), \quad (6.5)$$

приведённые ортогональные многочлены выражаются формулой

$$p_n = \frac{1}{D_{n-1}} \det \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \dots & \mu_{2n-1} \\ 1 & x & \dots & x^n \end{pmatrix}, \quad (6.6)$$

а квадрат их нормы даётся формулой (6.4).

Ядро

$$K_n(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} h_k^{-1} p_k(x) p_k(y), \quad (6.7)$$

задает интегральный оператор в $L^2([a; b], d\alpha(x))$, который является проектором на подпространство размерности n , натянутое на многочлены степени $n - 1$.

Пусть $d\alpha(x) = w(x)dx$, где $w(x) \geq 0$. Введём Фурье-базис:

$$\psi_k(x) = \sqrt{\frac{w(x)}{h_k}} p_k(x), \quad \int_a^b \psi_k(x) \psi_l(x) dx = \delta_{kl}.$$

Тогда вместо оператора в пространстве $L^2([a; b], d\alpha(x))$ с ядром (6.7) можно рассматривать оператор в пространстве $L^2([a; b], dx)$ с ядром

$$K_n(x, y) = \sum_{i=0}^{n-1} \psi_i(x)\psi_i(y). \quad (6.8)$$

Ядро, записанное в таком виде, обычно называют ядром Кристоффеля-Дарбу. Далее в этой главе мы будем работать с этим ядром. Вскоре мы запишем более экономную формулу для него, но сначала выведем необходимые для этого рекуррентные соотношения между многочленами.

Теорема 6.3. *(трёхчленные рекуррентные соотношения) Система приведённых ортогональных многочленов удовлетворяет разностному соотношению*

$$p_{k+1} + (A_k - x)p_k + B_k p_{k-1} = 0, \quad B_k > 0. \quad (6.9)$$

Доказательство. Напомним, что $m_1 = x$. Разложим по базису $\{p_k\}_{k \geq 0}$:

$$m_1 p_k = \sum_{j=0}^{k+1} \widehat{Q}_{kj} p_j, \quad \widehat{Q}_{k,k+1} = 1. \quad (6.10)$$

Тогда $\widehat{Q}_{kl} h_l = \langle m_1 p_k, p_l \rangle = \langle p_k, m_1 p_l \rangle = \widehat{Q}_{lk} h_k$. Отсюда следует, что (поскольку $\widehat{Q}_{kj} = 0$ при $j > k+1$) $\widehat{Q}_{kj} = 0$ при $k > j+1$. Поэтому есть всего три ненулевых коэффициента:

$$\widehat{Q}_{kk} = \frac{\langle m_1 p_k, p_k \rangle}{h_k} = p_k^{k-1} - p_{k+1}^k,$$

где p_k^j – коэффициенты многочлена $p_k(x) = p_k^k x^k + \dots + p_k^0$, и

$$\widehat{Q}_{k,k+1} h_{k+1} = \widehat{Q}_{k+1,k} h_k.$$

Учитывая $\widehat{Q}_{k,k+1} = 1$, окончательно получаем

$$A_k = \widehat{Q}_{kk} = \frac{\langle m_1 p_k, p_k \rangle}{h_k} = p_k^{k-1} - p_{k+1}^k, \quad B_k = \widehat{Q}_{k,k-1} = \frac{h_k}{h_{k-1}} > 0.$$

□

В терминах функций из базиса Фурье можно записать трёхчленные соотношения в более симметричном виде. Определим бесконечную матрицу Якоби Q , задав матричные элементы

$$Q_{jk} = \sqrt{\frac{h_j}{h_k}} \widehat{Q}_{kj}.$$

Формула (6.10) записывается тогда в виде

$$m_1 \psi_k = Q_{k,k+1} \psi_{k+1} + Q_{kk} \psi_k + Q_{k,k-1} \psi_{k-1}.$$

Положив

$$\gamma_k = Q_{k,k-1} = Q_{k-1,k} = \sqrt{\frac{h_k}{h_{k-1}}}, \quad s_k = Q_{kk} = \frac{\langle m_1 p_k, p_k \rangle}{h_k},$$

и введя бесконечный столбец из функций базиса Фурье $\Psi = (\psi_0, \psi_1, \dots)^t$, получим

$$m_1 \Psi = Q \Psi, \quad (6.11)$$

где Q – трёхдиагональная матрица

$$Q = \begin{pmatrix} s_1 & \gamma_1 & 0 & \dots & 0 \\ \gamma_1 & s_2 & \gamma_2 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & s_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \end{pmatrix}.$$

Ещё одно представление ортогональных многочленов можно дать в терминах этой матрицы.

$$p_k(\lambda) = \det(\lambda - Q)|_{k \times k}, \quad K_n(x, y) = \frac{\sqrt{w(x)w(y)}}{h_{n-1}} \det_{(n-1) \times (n-1)} ((x - Q)(y - Q)) \quad (6.12)$$

Упражнение 6.4. С помощью трёхчленных рекуррентных соотношений докажите формулы (6.12).

Покажем, что ядро Кристоффеля-Дарбу можно записать, используя всего пару функций Фурье.

Теорема 6.5. (формулы Кристоффеля-Дарбу)

$$K_n(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k(x)\psi_k(y) = \gamma_n \cdot \begin{cases} \frac{\psi_{n-1}(x)\psi_n(y) - \psi_n(x)\psi_{n-1}(y)}{y - x}, & x \neq y; \\ \psi_{n-1}(x)\psi'_n(x) - \psi_n(x)\psi'_{n-1}(x), & x = y. \end{cases} \quad (6.13)$$

Доказательство. Доказательство проводится непосредственным применением трёхчленных рекуррентных соотношений. \square

Наконец перечислим без доказательства основные важные факты теории ортогональных многочленов.

Теорема 6.6. (Фавар — Favard) Пусть система приведённых многочленов $p_n(x)$ удовлетворяет трёхчленным рекуррентным соотношениям

$$p_{k+1} + (A_k - x)p_k + B_k p_{k-1} = 0, \quad B_k > 0.$$

Тогда существует неубывающая функция $\alpha(x)$ такая, что

$$\int p_n(x)p_m(x)d\alpha(x) = \delta_{nm}h_n.$$

Замечание 6.7. Мера (функция $\alpha(x)$), вообще говоря, не единственна. Проблема единственности меры эквивалентна проблеме моментов (однозначно ли восстанавливается распределение по моментам?). Если мера единственна, то набор $\{p_n\}$ плотен в $L^2([a; b], d\alpha)$ (фактически образует там базис).

Какими бывают ортогональные многочлены?

Классические ортогональные многочлены (в узком смысле) — это многочлены, удовлетворяющие следующей задаче на собственные значения:

$$Lp_n(x) = \lambda_n p_n(x),$$

где

$$L = Q(x) \frac{d^2}{dx^2} + P(x) \frac{d}{dx}$$

оператор штурма Лиувилля, т.е. дифференциальный оператор второго порядка, где $Q(x), P(x)$ — многочлены второго и первого порядка соответственно. При некоторых дополнительных требованиях на многочлены $Q(x), P(x)$ уравнение имеет нетривиальные полиномиальные решения на интервале, луче или всей вещественной прямой.

Теорема 6.8. (Бохнер) *С точностью до сдвигов и изменения масштаба существует три серии классических ортогональных многочленов:*

1. Многочлены Эрмита $H_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$: $w(x) = e^{-x^2/2}$.
2. Многочлены Лагерра $L_n^\alpha(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$: $w(x) = x^\alpha e^{-x^2/2}$ (здесь $\alpha \in \mathbb{R}_+$).
3. Многочлены Якрби $p_n^{[\alpha, \beta]}(x)$, $x \in [-1; 1]$: $w(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$.

Классические ортогональные многочлены (в широком смысле) — это многочлены, удовлетворяющие либо разностным уравнениям второго порядка $Lf(x) = a_x f(x+1) + b_x f(x) + c_x f(x-1)$, либо q -разностным уравнениям второго порядка $Lf(x) = a_x f(xq) + b_x f(x) + c_x f(xq^{-1})$.

Примеры:

1. Многочлены Шарлье $C_n(x, a)$: $w(x) = \frac{a^x}{x!}$, где $x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.
2. Многочлены Кравчука $K_n^p(x)$: $w(x) = p^x q^{N-x} C_N^x$, где $x, n \in \{0, \dots, N\}$, $q = 1 - p$.
3. q -многочлены Эрмита $h_n(x, q)$, $x \in \{q^{\pm j} : j = 0, 1, \dots\}$: $w_j = q^j \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^{2k+2j+2})$.

6.1 Использование многочленов Эрмита для построения ядра GUE

Приведём пример использования изложенной теории для построения ядра гауссового унитарного ансамбля. Напомним, что в этом случае корреляционное ядро $K_n(x, y)$ — задает проектор на линейную оболочку многочленов степени $n-1$ пространства $L_2(\mathbb{R}, \mu)$, где мера μ имеет вид

$$\mu(dx) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx.$$

Следовательно, корреляционное ядро можно построить из многочленов, ортогональных относительно этой меры.

Известно, что вес

$$w(x) = \exp(-x^2/2) / \sqrt{2\pi}$$

определяет многочлены Эрмита $H_n(x)$ ¹. Эти многочлены хорошо изучены. Они имеют множество замечательных свойств и разнообразных приложений. Здесь мы однако пробуем дать самозамкнутое изложение, основанное только на фактах, доказанных в предыдущем разделе.

¹Это определение веса отличается от традиционного множителем $1/\sqrt{2\pi}$, который в нашем случае

6.1.1 Норма многочленов Эрмита и трёхчленное соотношение

Для построения корреляционного ядра нам потребуется явный вид многочленов Эрмита, а точнее их интегральное представление, лучше подходящее для последующего асимптотического анализа. Его можно найти, стартуя с трёхчленного рекуррентного соотношения, для которого должны быть заданы серии параметров A_k и B_k . Последние выражаются через квадрат нормы многочленов Эрмита

$$\langle H_m, H_m \rangle_\mu = h_m,$$

которая в свою очередь, согласно формуле (6.5), даётся отношением двух последовательных определителей Ганкеля $h_n = D_n/D_{n-1}$. Вычислим эти определители.

Для этого запишем производящую функцию моментов меры μ ,

$$M(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} \mu_n = \mathbb{E} e^{x\xi} = e^{t^2/2}, \quad (6.14)$$

т.е. случайной величины $\xi \sim \mathcal{N}$, распределенной по стандартному нормальному закону.

Запишем эту функцию с аргументом $x = y + z$.

$$M(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(y+z)^n}{n!} \mu_n = \sum_{i,j \geq 0} \frac{y^i z^j}{i! j!} \mu_{i+j}, \quad (6.15)$$

где мы использовали биномиальную формулу и поменяли порядок суммирования. Таким образом матричный элемент матрицы $\{\mu_{i+j}\}_{0 \leq i,j \leq n}$ можно вычислить в виде

$$\mu_{i+j} = \frac{d^{i+j}}{dy^i dz^j} M(x+y) \Big|_{x=y=0}. \quad (6.16)$$

Воспользуемся для $M(y+z)$ выражением из формулы (6.14) и разложим его в ряд так, чтобы каждое слагаемое факторизовалось в произведение функций переменных y и z по отдельности.

$$M(y+z) = e^{\frac{y^2}{2} + yz + \frac{z^2}{2}} = e^{\frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}} \sum_{k \geq 0} \frac{(yz)^k}{k!}$$

Подставив это выражение в равенство (6.16), можно записать матрицу Ганкеля в виде произведения трёх матриц

$$\mu_{i+j} = (LKL^t)_{i,j} \quad (6.17)$$

заданных матричными элементами

$$L_{ik} = \frac{d^i}{dy^i} \left(e^{\frac{y^2}{2}} y^k \right) \Big|_{y=0} \quad \text{и} \quad K_{i,j} = \frac{\delta_{i,j}}{i!}.$$

Заметим, что $L_{ik} = 0$, если $i < k$. Таким образом мы записали матрицу Ганкеля в виде произведения нижнетреугольной, диагональной и верхнетреугольной матриц, откуда получим

$$D_n = \prod_{i=0}^n K_{ii} L_{ii}^2 = \prod_{i=0}^n i!. \quad (6.18)$$

обеспечивает нормировку меры на единицу, т.е. делает вес плотностью вероятностного распределением Гаусса. Вероятностная нормировка, принятая для удобства, не влияет на вид многочленов, а лишь меняет определение скалярного произведения, нормы и т.п. на тот же множитель, что конечно не влияет на итоговые формулы для вероятности в точечном процессе.

Следовательно

$$h_n = n!,$$

т.е.

$$\langle H_n, H_m \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2/2} H_n(\lambda) H_m(\lambda) d\lambda = \delta_{nm} n!.$$

и константы B_k из рекуррентных соотношений (6.9) равны

$$B_k = h_k/h_{k-1} = k, k \leq 1. \quad (6.19)$$

Чтобы найти константы A_k , которые выражаются через коэффициенты многочленов при степенях на единицу меньших максимальных, $A_k = p_k^{k-1} - p_{k+1}^k$, заметим, что поскольку все нечетные моменты распределения Гаусса равны нулю, пространство $L_2(\mathbb{R}, d\mu)$ распадается на два ортогональные друг другу подпространства, натянутые на мономы четных и нечетных степеней. Другими словами, каждый многочлен Эрмита даётся суммой мономов степеней одной четности, убывающих от старшей с шагом два. Следовательно $A_k = 0, k \leq 0$, и мы приходим к следующему трёхчленному рекуррентному соотношению для многочленов Эрмита.

$$H_{n+1}(x) - xH_n(x) + nH_{n-1}(x) = 0, \quad n \geq 1, \quad (6.20)$$

6.1.2 Корреляционное ядро и интегральные представления

Запишем функции Фурье $\psi_n(x)$

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{w(x)}{h_n}} H_n(x) = \frac{e^{-x^2/4}}{(2\pi)^{1/4} \sqrt{n!}} H_n(x).$$

Согласно формуле Кристоффеля-Дарбу, детерминантный процесс GUE задаётся интегральным оператором $\hat{K}_n : L_2(\mathbb{R}, dx) \rightarrow L_2(\mathbb{R}, dx)$, с ядром

$$\begin{aligned} K_n(x, y) &= \gamma_n \frac{\psi_{n-1}(x)\psi_n(y) - \psi_n(x)\psi_{n-1}(y)}{y-x} \\ &= \sqrt{\frac{h_n}{h_{n-1}}} \frac{\sqrt{w(x)w(y)} H_{n-1}(x)H_n(y) - H_n(x)H_{n-1}(y)}{\sqrt{h_n h_{n-1}} (y-x)} \\ &= \frac{e^{-x^2/4} e^{-y^2/4}}{(n-1)! \sqrt{2\pi}} \frac{H_{n-1}(x)H_n(y) - H_n(x)H_{n-1}(y)}{y-x} \end{aligned} \quad (6.21)$$

и

$$K_n(x, x) = \frac{e^{-x^2/2}}{(n-1)! \sqrt{2\pi}} (H'_{n-1}(x)H_n(x) - H'_n(x)H_{n-1}(x)). \quad (6.22)$$

Для дальнейшего асимптотического анализа удобно получить для ядра интегральное представление. Для этого запишем производящую функцию и проинтегрируем её (воспользовавшись теоремой Коши о вычетах):

$$G(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n, \quad H_n(x) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|t|=\varepsilon} G(x, t) \frac{dt}{t^{n+1}}.$$

Далее, воспользовавшись трёхчленным рекуррентным соотношением,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_{n+1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (xH_n(x) - nH_{n-1}(x)),$$

найдем, что производящая функция удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt}G(x, t) = xG(x, t) - tG(x, t), \quad G(x, 0) = 1.$$

Проинтегрировав это уравнение, получим

$$G(x, t) = e^{-\frac{t^2}{2} + xt}. \quad (6.23)$$

Тогда, для $x = y$, формула Кристоффеля-Дарбу даёт

$$K_n(x, x) = \frac{e^{-x^2/2} n!}{\sqrt{2\pi}} \iint \frac{dz_1}{2\pi iz_1} \frac{dz_2}{2\pi iz_2} \frac{\exp(-\frac{z_1^2}{2} + xz_1 - \frac{z_2^2}{2} + xz_2)}{z_1^n z_2^n} (z_1 z_2 - z_2^2).$$

для равных значений аргументов ядра, а для произвольных x и y получим

$$K_n(x, y) = \frac{e^{-x^2/4 - y^2/4} n!}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{y - x} \cdot \iint \frac{dz_1}{2\pi iz_1} \frac{dz_2}{2\pi iz_2} \frac{\exp(-\frac{z_1^2}{2} + xz_1 - \frac{z_2^2}{2} + yz_2)}{z_1^n z_2^n} (z_1 - z_2). \quad (6.24)$$

Глава 7

Определитель Фредгольма

В предыдущих разделах мы выяснили, что средние от мультипликативных функционалов детерминантных точечных процессов, в том числе вероятности попадания точек случайных точечных конфигураций в произвольные подмножества конфигурационного пространства \mathfrak{X} , выражаются через бесконечные суммы, которые, как было замечено, имеют смысл определителей Фредгольма некоторого интегрального оператора. Определитель Фредгольма – это обобщение привычного понятия определителя матрицы на случай операторов в бесконечномерных пространствах. В настоящем разделе мы обсудим, когда такие объекты имеют смысл и какими свойствами они обладают. В частности, нас интересуют пределы случайных величин и случайных процессов, выраженные через пределы распределений, задаваемых такими определителями. Поэтому мы хотим придать смысл понятию сходимости интегральных операторов, влекущей за собой сходимость их определителей Фредгольма.

Рассмотрим измеримое пространство с мерой (A, μ) , и $\hat{K}: L^2(A, \mu) \rightarrow L^2(A, \mu)$ – интегральный оператор действующий на функции в Гильбертовом пространстве $L^2(A, \mu)$ по формуле

$$(\hat{K}f)(x) = \int_A K(x, y)f(y)d\mu(y), \quad (7.1)$$

где функция двух переменных $K(x, y)$ – ядро интегрального оператора. Наша задача придать смысл определителю Фредгольма оператора $1 + \hat{K}$.

Мы рассмотрим два взаимно дополняющих подхода к пониманию определителей Фредгольма. Один из них, – назовем его функциональным, – восходит к самому Фредгольму и апеллирует к свойствам функции ядра оператора, гарантирующим сходимость ряда, задающего определитель Фредгольма. Второй подход операторный, развивавшийся Лидским, Гротендиком и другими, исходит из спектральных свойств оператора и обобщает понятие определителя, понимаемого как произведение собственных значений матрицы.

7.1 Функциональный подход

В этом подходе определитель Фредгольма представляется в виде бесконечной суммы многократных интегралов от определителей конечных матриц, к которому мы пришли когда вычисляли средние от мультипликативных функционалов детерминантных про-

пессов.

$$\det(1 + \widehat{K})_{L^2(A, \mu)} := \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \int_{A^n} \det_{1 \leq i, j \leq n} (K(x_i, x_j)) d\mu(x_1) \dots d\mu(x_n). \quad (7.2)$$

Очевидно, для того чтобы выражение в правой части имело смысл, нужно чтобы ряд сходился. Более того, далее мы будем рассматривать пределы определителей Фредгольма в случаях, когда ядра операторов сходятся к некоторым предельным ядрам. При этом нам понадобится переставить предельный переход с суммированием и интегрированием. При каких условиях это можно делать? Начнем с определения ядра.

Определение 7.1. Пусть (A, μ) – измеримое пространство, а функция $a(x): A \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям:

1. $a(x) > 0$;
2. $1/a(x) \in L^2(A, \mu)$, то есть $c_a^2 := \int_A a(x)^{-2} d\mu(x) < \infty$.

Определение 7.2. Ядром называется непрерывная функция $K(x, y): A \times A \rightarrow \mathbb{C}$, для которой выполняется условие

$$\|K\|_a := c_a \sup_{(x, y) \in A} |a(x)a(y)K(x, y)| < \infty. \quad (7.3)$$

С помощью ядра зададим интегральный оператор $\widehat{K}: L^2(A, \mu) \rightarrow L^2(A, \mu)$

$$\widehat{K}f(x) = \int_A K(x, y)f(y)d\mu(y). \quad (7.4)$$

Наконец обратимся к определителю Фредгольма. Определим следующие выражения, зависящие от $n \in \mathbb{N}$:

$$\Delta_n(K) = \int_{A^n} \det_{1 \leq i, j \leq n} (K(x_i, x_j)) d\mu(x_1) \dots d\mu(x_n).$$

Кроме того, положим

$$\Delta(K) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \Delta_n(K).$$

Положим также $\Delta_0(K) = 1$.

Лемма 7.3. $\Delta_n(K) \leq (\|K\|_a)^n n^{n/2}$.

Доказательство. Пусть B – матрица $n \times n$ такая, что $B_{ij} \leq 1$. Тогда для неё справедливо так называемое *неравенство Адамара*:

$$|\det B| \leq n^{n/2}. \quad (7.5)$$

В самом деле, пусть $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n \geq 0$ – собственные значения матрицы BB^\dagger . Тогда мы имеем

$$|\det B| = \sqrt{\det(BB^\dagger)} = \sqrt{\prod_i \lambda_i} \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i \right)^{n/2} = \left(\frac{1}{n} \text{Tr} BB^\dagger \right)^{n/2} \leq n^{n/2},$$

где в первом неравенстве мы воспользовались тем фактом, что среднее арифметическое не меньше среднего геометрического, а во втором тем, что диагональные матричные элементы матрицы VB^\dagger по модулю не превосходят n . Неравенство Адамара доказано.

Теперь, воспользуемся им, чтобы провести следующую оценку

$$\begin{aligned} \Delta_n(K) &= \int_{A^n} \det_{1 \leq i, j \leq n} \left(\frac{K(x_i, x_j) a(x_i) a(x_j) c_a}{\|K\|_a} \right) \left(\frac{\|K\|_a}{c_a} \right)^n \prod_i a_i(x)^{-2} d\mu(x_1) \dots d\mu(x_n) \\ &\leq n^{n/2} \left(\frac{\|K\|_a}{c_a} \right)^n \int_{A^n} \prod_i a_i(x)^{-2} d\mu(x_1) \dots d\mu(x_n) = \|K\|_a^n n^{n/2}, \end{aligned}$$

которая завершает доказательство леммы. \square

Следствие 7.4.

$$\Delta(K) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \Delta_n(K) \leq \sum_{n \geq 0} \frac{\|K\|_a^n n^{n/2}}{n!} < \infty \quad (7.6)$$

Лемма 7.5. Функция $K \rightarrow \det(1 + K)$ непрерывна по норме $\|K\|_a$,

$$|\Delta(K_1) - \Delta(K_2)| \leq \|K_1 - K_2\|_a \sum_{n \geq 0} \frac{n^{n/2+1} c^{n-1}}{n!},$$

где $c = \max(\|K_1\|_a, \|K_2\|_a) < \infty$.

Доказательство. Для доказательства этой леммы сначала докажем второе неравенство Адамара. Пусть F и G – две матрицы размера $n \times n$. Тогда

$$|\det F - \det G| \leq n^{1+n/2} \|F - G\| \max(\|F\|, \|G\|)^n. \quad (7.7)$$

В самом деле, пусть $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}$. Тогда

$$|\det F - \det G| = \left| \det \begin{pmatrix} f_1 - g_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} g_1 \\ f_2 - g_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} + \dots + \det \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ f_n - g_n \end{pmatrix} \right|.$$

В силу первого неравенства Адамара справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \left| \det \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ f_k - g_k \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \right| &\leq n^{n/2} \|g_1\| \dots \|g_{k-1}\| \cdot \|f_k - g_k\| \cdot \|f_{k+1}\| \dots \|f_n\| \\ &\leq \max(\|F\|, \|G\|)^{n-1} \|F - G\| \cdot n^{n/2}, \end{aligned} \quad (7.8)$$

где под $\|\cdot\|$ всюду подразумевается супремумная норма $\|\cdot\|_{\text{sup}}$.

Используя второе неравенство для оценки разности членов рядов $|\Delta_n(K_1) - \Delta_n(K_2)|$ и абсолютную сходимость рядов, вытекающую из предыдущей леммы, получаем утверждение о непрерывности и даже липшицевости определителя Фредгольма. \square

Замечание 7.6. *Линейное пространство операторов с нормой $\|\cdot\|_a$ – алгебра, т.к.*

$$\|\hat{K}_1 \cdot \hat{K}_2\|_a \leq \|\hat{K}_1\|_a \|\hat{K}_2\|_a, \quad (7.9)$$

где ядро оператора $\hat{K}_1 \cdot \hat{K}_2$ есть свёртка ядер двух операторов

$$K_1 * K_2(x, y) = \int_A K_1(x, t) K_2(t, y) d\mu.$$

В частности операторы в произведении под знаком определителя Фредгольма перестановочны, так же как и матрицы под знаком обычных определителей

$$\Delta(K_1 * K_2) = \Delta(K_2 * K_1) \quad (7.10)$$

$$(7.11)$$

Замечание 7.7. *Пусть $A \subset \mathbb{R}^d$ – компакт, и $a(x)$ – непрерывная функция. Следовательно, она ограничена от нуля при $x \in A$. Сходимость по норме $\|\cdot\|_a$ эквивалентна равномерной сходимости в $C(A \times A)$, гарантирующей непрерывность предельной функции. Поэтому пространство \mathfrak{B}_a операторов, заданных непрерывными ядрами, с нормой $\|\cdot\|_a$ – банахова алгебра, т.е. банахово пространство и алгебра. Все операторы $\hat{K} \in \mathfrak{B}_a$ компактны (см. определение в следующем разделе), так как непрерывные ядра на компакте можно равномерно приблизить ядрами операторов конечного ранга, например построенных из многочленов.*

Для $\hat{K} \in \mathfrak{B}_a$ определим операцию следа равенством

$$\text{Tr} \hat{K} := \int_A K(x, x) d\mu(x). \quad (7.12)$$

Эта операция очевидно непрерывна относительно нормы $\|\cdot\|_a$. С другой стороны для конечномерных операторов, это определение совпадает с обычным следом матрицы. Поэтому формула (7.12) даёт след интегрального оператора, понимаемый как предел следов его конечномерных приближений (по норме $\|\cdot\|_a$).

Замечание 7.8. *Пусть $\{K_n(x, y)\}_{n \in \mathbb{N}}$ – последовательность ядер с равномерно ограниченной нормой*

$$\|K_n\|_a \leq M, \quad (7.13)$$

такая что имеет место поточечная сходимость $K_n(x, y) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} K_\infty(x, y)$. Ограниченность нормы обеспечивает выполнение теоремы о мажорируемой сходимости, которая позволяет переставить интегрирование и предел в формулах для следа и определителя Фредгольма, что в купе с оценкой, приведенной в лемме 7.3, обеспечивает и сходимость последних.

Используем изложенный формализм для построения предельного процесса в круговом унитарном ансамбле.

Пример 7.9. *(Вероятность дырки в спектре унитарного кругового ансамбля и ζ -функция Римана.)*

Как мы помним вероятности цилиндрических событий в точечном процессе, описывающем собственные значения случайной матрицы из унитарного кругового ансамбля даются в терминах определителей Фредгольма интегрального оператора \hat{K}_n^{CUE} ,

заданного ядром (5.55). В частности вероятность отсутствия частиц на отрезке $[s, t]$ имеет вид

$$\mathbb{P}(\nu_{CUE}([s, t]) = 0) = \det(1 - \widehat{K}_n^{CUE})_{L^2([a, b], \mu)},$$

где мера есть $\mu(dx) = dx/2\pi$,

Хотелось бы понять, как ведет себя эта вероятность, когда система очень велика, и частицы (собственные значения) забывают о периодических граничных условиях. Какой естественный масштаб наблюдения выбрать, чтобы различать статистику наиболее типичных событий, происходящих с конечными вероятностями? Для этого оценим среднее расстояние между частицами, т.е. величину обратную средней плотности частиц относительно меры Лебега. Средняя плотность ρ пропорциональна первой корреляционной функции $\rho = (2\pi)^{-1}\rho_1(x)$, которая, в свою очередь дается ядром с равными значениями аргумента, $\rho_1(x) = K_n^{CUE}(x, x) = n$. Ожидаемо, ввиду трансляционной инвариантности плотность постоянна и равна просто отношению числа частиц к длине кольца. Ее обратная величина $\rho^{-1} = 2\pi/n$, дает характерное расстояние между частицами, задающее естественный масштаб областей в которых можно с конечной вероятностью обнаружить конечное число частиц и, в том числе, обнаружить отсутствие частиц с вероятностью, остающейся между нулем и единицей, при $n \rightarrow \infty$.

Для некоторых $-\infty < u < v < \infty$ выберем концы отрезка на этом масштабе в виде,

$$s = s_n(u) := \frac{u \cdot 2\pi}{n}, \quad t = t_n(v) := \frac{v \cdot 2\pi}{n}. \quad (7.14)$$

Перемасштабировав переменные интегрирования под интегралами в определителе Фредгольма так, чтобы в пределах интегрирования остались концы отрезка в новых единицах измерения, получим

$$\mathbb{P}(\nu_{CUE}([s_n(u), t_n(v)]) = 0) = \det(1 - \widehat{K}'_n)_{L^2([u, v], \mu)},$$

где $\mu(dx) = dx$ – мера Лебега, а новый оператор \widehat{K}'_n задаётся перемасштабированным ядром

$$K'_n(x, y) = \frac{1}{n} K_n^{CUE} \left(\frac{2\pi x}{n}, \frac{2\pi y}{n} \right).$$

Нетрудно вычислить предел нового ядра при $n \rightarrow \infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K'_n(x, y) = K^{\sin}(x, y) := \frac{\sin(\pi(x - y))}{\pi(x - y)}. \quad (7.15)$$

Заметим, также что при любых $x, y \in \mathbb{R}$ обе функции $K'_n(x, y)$ и $K^{\sin}(x, y)$ ограничены произведением $(a(x)a(y))^{-1}$, где функция $a(x) = \text{const}$ – постоянная, обратный квадрат которой очевидно интегрируем на компакте, что обеспечивает ограниченность норм $\|K'_n\|_a, \|K^{\sin}\|_a$. Вследствие этого, из замечания (7.8) немедленно следует сходимость соответствующих определителей Фредгольма. Альтернативно, воспользуемся доказанной в лемме 7.5 непрерывностью определителя Фредгольма относительно сходимости по норме $\|\cdot\|_a$. Доказательство сходимости

$$\|K'_n - K^{\sin}\|_a \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (7.16)$$

ядра K'_n к K^{\sin} на компакте $[u, v]$ мы оставляем читателю в виде упражнения.

Упражнение 7.10. Докажите ограниченность норм $\|K'_n\|_a, \|K^{\sin}\|_a$, а также сходимость (7.16) по норме $\|\cdot\|_a$ с $a(x) = \text{const}$ на компакте $[u, v]$.

Полученный предел вероятности пустого интервала

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\nu_{CUE}([s_n(x), t_n(y)]) = 0) := \mathbb{P}(\nu_{\sin}([x, y]) = 0) = \det(1 - \widehat{K}_n^{\sin})_{L^2([x, y])} \quad (7.17)$$

есть пример предельной вероятности одного цилиндрического события. Подобным образом через определители Фредгольма с тем же ядром вычисляются пределы вероятностей любых цилиндрических событий, соответствующих одному или нескольким непересекающимся подмножествам \mathbb{R} , а значит и задаётся мера на вообще говоря бесконечных точечных конфигурациях на конфигурационном пространстве, $\mathfrak{X} = \mathbb{R}$, соответствующая новому предельному детерминантному точечному процессу, называемому синус-процессом, и задаваемому корреляционным ядром $K^{\sin}(x, y)$. Это утверждение можно сформулировать следующим образом.

Теорема 7.11. Пусть $\xi_n^{CUE} : [0, 2\pi] \times \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ детерминантный точечный процесс, описывающий распределение собственных значений $(\lambda_1^{CUE}, \dots, \lambda_n^{CUE}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ кругового унитарного ансамбля, т.е. $\xi_n^{CUE}(x, \omega) = 1$, если $\lambda_i^{CUE}(\omega) = x$ при одном из $i = 1, \dots, n$ и $\xi_n^{CUE}(x, \omega) = 0$, в противном случае. Тогда имеет место сходимость

$$\xi_n^{CUE} \left(\frac{2\pi x}{n}, \cdot \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \xi_n^{\sin}(x, \cdot) \quad (7.18)$$

где предел понимается в смысле конечномерных распределений, а ξ_n^{\sin} – синус-процесс, т.е. детерминантный точечный процесс, задаваемый ядром $K^{\sin}(x, y)$.

Замечание 7.12. Оказывается, применимость синус-процесса выходит за пределы теории случайных матриц и неожиданно находит применение в теории чисел, а именно в задачах связанных со знаменитой гипотезой Римана. Гипотеза Римана – важнейшая задача теории чисел, одна из проблем тысячелетия, имеющая отношение к описанию свойств простых чисел, которое в свою очередь играет ключевую роль в криптографии. Множество теорем о свойствах простых чисел доказаны в предположении её справедливости, и их дальнейшая судьба зависит от того будет гипотеза Римана доказана или опровергнута.

Задача состоит в изучении расположения нулей ζ -функции Римана, которая задается рядом

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (7.19)$$

в области его сходимости и аналитически продолжается на всю комплексную плоскость. Известно, что у $\zeta(s)$ есть набор тривиальных нулей $\zeta(-2n) = 0, n \in \mathbb{N}$ и набор нетривиальных нулей $\zeta(1/2 \pm it_n) = 0, n \in \mathbb{N}$, находящихся в полосе $0 < \Re s < 1$ и симметрично расположенных относительно действительной оси. Известно также, что набор чисел t_n симметричен относительно мнимой оси, т.е. сами корни распределены симметрично относительно критической линии $\Re s = 1/2$. Гипотеза Римана состоит в том, что все нетривиальные нули находятся в точности на критической линии, т.е. все числа t_n вещественны.

Что можно сказать о положении чисел t_n , если гипотеза Римана верна? Независимо от справедливости гипотезы Римана доказана следующая оценка для числа

нетривиальных нулей дзета-функции с мнимой частью не превышающей $T > 0$ при $T \rightarrow \infty$.

Теорема 7.13. (Формула Римана-Фон Мангольдта)

$$|\{n : 0 \leq \Re t_n \leq T\}| = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T). \quad (7.20)$$

В предположении, что гипотеза Римана верна, упорядочим числа t_n по возрастанию, $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \dots$, и перемасштабируем их, введя нормированные корни

$$w_n = \frac{t_n}{2\pi} \log \frac{t_n}{2\pi}$$

так, чтобы их асимптотическая плотность на критической линии стала единичной, $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n/n = 1$. При исследовании распределения нетривиальных нулей дзета-функции Хью Монтгомери пришел к следующей гипотезе о асимптотическом числе пар (w_n, w_m) нормированных корней, разделенных расстоянием $(w_n - w_m) \in [\alpha, \beta]$.

Гипотеза 7.14. (Монтгомери)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} |\{(n, m) : 1 \leq n, m \leq N, \alpha \leq (w_n - w_m) \leq \beta\}| = \int_{\alpha}^{\beta} \left(1 - \frac{\sin(\pi x)^2}{(\pi x)^2}\right) dx \quad (7.21)$$

Вернемся к синус-процессу. Как и прежде, его корреляционные функции порядка k задаются определителями (5.24) матриц размера $k \times k$, с полученными из ядра матричными элементами. В частности, выбрав масштаб длины в (7.14) мы добились того, что средняя плотность частиц в синус-процессе стала единичной

$$\rho = \rho_1(x) = K^{\sin}(x, x) = 1.$$

Вторая корреляционная функция, вычисленная в точках разделенных расстоянием r , дается выражением

$$R_2^{\sin}(r) := \rho_2(x, x+r) = 1 - \frac{\sin(\pi x)^2}{(\pi x)^2}.$$

Откуда следует, что в синус-процессе формула для среднего числа пар частиц, разделенных расстоянием $r \in [\alpha, \beta]$, в большом отрезке, $[0, N]$,

$$D^{\sin}(\alpha, \beta) := |\{(x, x') : 0 \leq x, x' \leq N, \xi^{\sin}(x) = \xi^{\sin}(x') = 1, \alpha \leq (x - x') \leq \beta\}|$$

отнесенное к среднему числу точек в этом отрезке $\mathbb{E} \nu_{\sin}([0, N]) = N$, асимптотически совпадает с формулой Монтгомери для нормированных нетривиальных нулей дзета-функции.

Упражнение 7.15. Покажите, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \mathbb{E} D^{\sin}(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} R_2^{\sin}(r) dr \quad (7.22)$$

Хотя гипотеза Монтгомери подкреплена значительным объемом численных результатов, а также имеются свидетельства о наличии подобных связей для корреляционных функций следующих порядков, вопрос о ее доказательстве, так же как и о доказательстве самой гипотезы Римана, до сих пор открыт.

Гипотетическая связь между случайными матрицами и гипотезой Римана возвращает нас к изначальному мотиву рассмотрения ансамблей случайных матриц, гипотезе о сходстве спектров больших самосопряженных операторов в квантовой механике со спектрами случайных матриц. В этом же направлении проходит и один из возможных путей доказательства гипотезы Римана. Он основан на том предположении, что части t_n нетривиальных нулей дзета-функции есть собственные значения некоторого оператора. Чтобы доказать, что все они вещественны, достаточно доказать, что оператор самосопряжен. Эту задачу мы оставляем читателю в виде упражнения.

7.2 Определитель Фредгольма. Операторный подход.

До сих пор, отождествляя полученные ряды с определителями Фредгольма, мы придерживались подхода, восходящего к самому Фредгольму, основанному на аналогии между этими рядами и разложением (5.26) определителя $\det(\mathbb{I} + A)$ по минорам матрицы A . При этом, для того, чтобы это отождествление имело смысл, мы требовали, чтобы функция ядра удовлетворяла некоторым свойствам.

С другой стороны, мы знаем, что определитель матрицы это произведение ее собственных значений. Возможно ли распространить это определение на определители Фредгольма бесконечномерных интегральных операторов, действующих в гильбертовом пространстве функций? Чтобы ответить на этот вопрос, нам потребуется провести краткий экскурс в теорию операторов в Гильбертовых пространствах.

7.2.1 Краткий экскурс в спектральную теорию ограниченных операторов в гильбертовых пространствах

Пусть \mathcal{H} — комплексное, сепарабельное Гильбертово пространство, с полуторалинейным скалярным произведением, $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$, т.е. для любых $a, b, c \in \mathcal{H}$ и $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\langle \lambda a + b, c \rangle = \lambda \langle a, c \rangle + \langle b, c \rangle, \quad \langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle^*. \quad (7.23)$$

Скалярное произведение задаёт евклидову норму

$$\|v\| = \sqrt{|\langle v, v \rangle|}, \quad v \in \mathcal{H}.$$

Рассмотрим линейный оператор $B : \mathcal{D}(B) \rightarrow \mathcal{H}$ — линейное отображение некоторого линейного подпространства $\mathcal{D}(B) \subseteq \mathcal{H}$ гильбертова пространства, называемого областью определения оператора B , в пространство \mathcal{H} . Обычно от $\mathcal{D}(B)$ требуется, чтобы оно было плотным подмножеством \mathcal{H} . Обозначим через $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ множество линейных операторов на пространстве \mathcal{H} .

Ограниченные операторы

1. Оператор B ограниченный, если $\|Bv\| \leq c\|v\|$ для некоторого $c > 0$ при всех $v \in \mathcal{D}(B)$ (мы будем писать $B < \infty$); минимальное из чисел c дает операторную норму

оператора B , которую также можно выразить через скалярное произведение

$$\|B\| = \inf_{c>0} \{v \in \mathcal{D}(B) : \|Bv\| \leq c\|v\|\} = \sup_{u,v \neq 0} \frac{|(Bu, v)|}{\|u\|\|v\|}; \quad (7.24)$$

Заметим, что в силу того, что $\mathcal{D}(B)$ – плотное подмножество \mathcal{H} , можно единственным образом доопределить ограниченный оператор B , до ограниченного оператора с той же нормой, но с областью определения, совпадающей с замыканием $\mathcal{D}(B)$, т.е. со всем пространством \mathcal{H} . В дальнейшем, говоря об ограниченных операторах, мы будем подразумевать операторы с областью определения $\mathcal{D}(B) = \mathcal{H}$. Обозначим множество таких операторов через $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Пространство $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ с операторной нормой – банахово пространство.

2. Введем понятие сопряженного оператора B^* . Пусть

$$\mathcal{D}(B^*) = \{y \in \mathcal{H} : \forall x \in \mathcal{D}(B), \exists v \in \mathcal{H}, (y, Bx) = (v, x)\}.$$

Тогда $B^*y = v$. В силу теоремы Рисса-Фреше о представлении линейного функционала вектор $v = v(y)$ существует для тех y , для которых $\langle y, Bx \rangle$ – ограниченный линейный функционал от x , и единственен в силу плотности $\mathcal{D}(B)$.

3. Оператор B эрмитов (симметрический), если $\langle v, Bw \rangle = \langle Bv, w \rangle$ для любых $v, w \in \mathcal{D}(B)$, т.е. $B = B^*|_{\mathcal{D}(B)}$. В общем случае область определения эрмитова оператора есть подпространство области определения оператора, сопряженного к нему $\mathcal{D}(B) \subseteq \mathcal{D}(B^*)$.
4. Эрмитов (симметрический) оператор называется самосопряженным, если $B = B^*$, т.е. $\mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(B^*)$. Если эрмитов оператор B ограничен, т.е. определен на всём пространстве $\mathcal{D}(B) = \mathcal{H}$, то он самосопряжен.
5. Оператор B – положительный, если для всех $v \in \mathcal{D}(B)$: $\langle v, Bv \rangle \geq 0$ (в этом случае B – эрмитов); будем писать $B \geq 0$. Если оператор ограничен и положителен, то он самосопряжён.
6. Если $B \geq 0$ – положительный оператор, то существует ровно один оператор D такой, что $B = D^2$. Про последний мы будем писать так: $D = \sqrt{B}$.
7. Если B ограничен, то B^*B положителен. В частности, введём обозначение $|B| = \sqrt{B^*B}$.
8. Полярное разложение: для каждого ограниченного оператора B существует ровно один оператор U такой, что
 - (а) U – частичная изометрия, т.е. $\|Uv\| = \|v\|$ для любых $v \in \text{Ker}^\perp(B)$
 - (б) $B = U|B|$,
 - (в) $\|Uv\| = 0$ для всех $v \in \text{Ker}B$.
9. Ранг оператора – это $\text{Rank}B = \dim(\text{Im}(B))$.

Операторные идеалы

В линейном пространстве $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ограниченных операторов можно выделить специальные подпространства, называемые $*$ -идеалами (стар-идеалами). Мы говорим что $J \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ – это $*$ -идеал, если справедливо следующее.

1. J – линейное пространство;
2. $\forall D \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \forall B \in J$ выполнено $BD, DB \in J$;
3. если $B \in J$, то $B^* \in J$.

Мы рассмотрим три вложенных $*$ -идеала, $J_1 \subset J_2 \subset J_\infty \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$: пространство J_∞ компактных операторов, пространство J_2 операторов Гильберта-Шмидта, пространство J_1 ядерных операторов,

Компактные операторы

1. Компактный оператор переводит ограниченное множество в предкомпактное. Эквивалентно, оператор B компактен тогда и только тогда, когда для любой ограниченной последовательности $\{v_n \in \mathcal{H}\}_{n \in \mathbb{N}}$ последовательность $\{Bv_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ содержит сходящуюся подпоследовательность. J_∞ – множество компактных операторов. J_∞ – $*$ -идеал. J_∞ с нормой $\|\cdot\|$ – банахово пространство.
2. Ограниченный оператор $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ является компактным тогда и только тогда, когда $B = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n$ по норме $\|B\|$, где каждый из B_n имеет конечный ранг.
3. Определим спектр $\sigma(B)$ оператора B , как множество значений комплексного числа λ при которых оператор $(\lambda\mathbb{I} - B)$ необратим в пространстве ограниченных операторов, т.е.

$$\sigma(B) = \mathbb{C} \setminus \{ \lambda \in \mathbb{C} : (\lambda\mathbb{I} - B)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \}.$$

Спектральная теорема (для компактного оператора): пусть $B \in J_\infty$ – компактный оператор в \mathcal{H} . Тогда:

- (а)) Спектр $\sigma(B)$ является ограниченным дискретным множеством без предельных точек за исключением, быть может, нуля.
- (б) Любое собственное значение $\lambda \in \sigma(B)$ имеет конечную кратность.
- (с) Для любого ненулевого собственного значения $\lambda \in \sigma(B)$ оператора B существует коммутирующий с ним проектор P_λ конечного ранга такой, что $\sigma(B|_{P_\lambda\mathcal{H}}) = \{\lambda\}$, $\sigma(B|_{(\mathbb{I}-P_\lambda)\mathcal{H}}) = \sigma(B) \setminus \{\lambda\}$, а ранг проектора $\text{rank} P_\lambda$ есть алгебраическая кратность числа λ .

Замечание 7.16. *Проектор может быть реализован в виде*

$$P_\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\lambda|=\varepsilon} \frac{dz}{z-B}.$$

4. Теорема о базисе: пусть $B = B^* \in J_\infty$ — самосопряжённый компактный оператор. Тогда существует ортонормированный базис $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\langle \phi_n, \phi_m \rangle = \delta_{n,m}$, из собственных векторов оператора B , $B\phi_n = \lambda_n(B)\phi_n$, а все его собственные значения вещественны $\lambda_n(B) \in \mathbb{R}$. Любой элемент $a \in \mathcal{H}$ представим в виде

$$a = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle \phi_n, a \rangle \phi_n.$$

5. Теорема (о каноническом разложении): пусть $B \in J_\infty$ — компактный оператор. Тогда существуют ортонормированные наборы $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$, а также упорядоченный набор положительных чисел $s_1(B) \geq s_2(B) \geq \dots$ такие, что

$$B = \sum_{n \in \mathbb{N}} s_n(B) \psi_n \langle \varphi_n, \cdot \rangle.$$

$s_n(B)$ — это *сингулярные числа*, т.е. собственные числа оператора $|B|$.

Приведём доказательство этой теоремы. Заметим, что $|B| \geq 0$ (положительный оператор), и для него существует собственный базис $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$: $|B|\varphi_n = s_n\varphi_n$. Тогда по теореме о базисе

$$|B| = \sum_n s_n(B) \varphi_n \langle \varphi_n, \cdot \rangle.$$

Используя полярное разложение, имеем $B = U|B|$, и таким образом, $\psi_n = U\varphi_n$.

6. Неравенство Вейля: Пусть $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$ — собственные значения оператора B , а $s_1 \geq s_2 \geq \dots$ — его сингулярные числа. Тогда для любого n :

$$\sum_{i=1}^n |\lambda_i| \leq \sum_{i=1}^n \mu_i.$$

Операторы Гильберта-Шмидта

Теорема 7.17. Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ — ортонормированные базисы в \mathcal{H} и $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Тогда $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|B\varphi_n\|^2$ и $\sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle \psi_n, B\varphi_n \rangle|^2$ не зависят от выбора базисов и равны между собой.

Определение 7.18. Назовем операторами Гильберта-Шмидта ограниченные операторы $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, для которых суммы из теоремы 7.17 конечны. Снабдим множество таких операторов нормой Гильберта-Шмидта $\|\cdot\|_2$,

$$\|B\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle \psi_n, B\varphi_n \rangle|^2.$$

J_2 — пространство ограниченных операторов $B \in \mathcal{H}(\mathcal{B})$ с конечной нормой Гильберта-Шмидта, $\|B\|_2 < \infty$.

Заметим, что если ограниченный оператор $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ — положительный, то можно определить оператор \sqrt{B} , также положительный и, следовательно, самосопряженный, для которого сумма

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \|\sqrt{B}\phi_n\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle \sqrt{B}\phi_n, \sqrt{B}\phi_n \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle \phi_n, B\phi_n \rangle, \quad (7.25)$$

не зависит от выбора базиса, откуда следует

Теорема 7.19. Для любого положительного $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ след оператора B , определяемый соотношением

$$\mathrm{Tr}(B) := \sum_n \langle \varphi_n, B\varphi_n \rangle \quad (7.26)$$

не зависит от выбора базиса.

В частности для любого ограниченного оператора $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ оператор B^*B – положительный и

$$\mathrm{Tr}B^*B = \|B\|_2^2. \quad (7.27)$$

Следующие утверждения о операторах Гильберта-Шмидта имеют место.

1. Операторы Гильберта-Шмидта ограничены, т.к. $\|B\|_2 \geq \|B\|$, и компактны, $J_2 \subset J_\infty$.
2. J_2 – *-идеал
3. J_2 со скалярным произведением $\langle A, B \rangle_{HS} := \mathrm{Tr}(A^*B)$ – гильбертово пространство.

Операторы Гильберта-Шмидта играют важную роль при изучении интегральных операторов в гильбертовом пространстве квадратично-интегрируемых функций, ввиду наличия простого критерия, который позволяет установить принадлежность интегрального оператора к J_2 , исходя из свойств ядра.

Теорема 7.20. Пусть (A, μ) – измеримое пространство, и $\mathcal{H} = L^2(A, \mu)$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых функций на нем. Тогда для любого $\widehat{K} \in J_2$ существует единственная функция $K(x, y) \in L^2(A \otimes A, \mu \otimes \mu)$ такая, что

$$(\widehat{K}f)(x) = \int_A K(x, y)f(y)d\mu(y),$$

и наоборот, для любой функции $K(x, y) \in L^2(A \otimes A, \mu \otimes \mu)$ определён оператор \widehat{K} как выше, причём

$$\|\widehat{K}\|_2 = \|K\|_2 = \left(\int_{A^2} |K(x, y)|^2 d\mu(x)d\mu(y) \right)^{1/2}.$$

Ядерные операторы

Определение 7.21. Оператор B называется ядерным (Trace-class), если

$$\|B\|_1 := \mathrm{Tr}(|B|) < \infty,$$

где операция взятия следа положительного оператора понимается в смысле определения (7.26). Пространство ядерных операторов, снабженное нормой $\|\cdot\|_1$, обозначается J_1 .

На операторы из J_1 можно распространить определение операции взятия следа (7.26), которое также оказывается независимо от базиса. Тогда $\mathrm{Tr} : B \rightarrow \mathbb{C}$ – ограниченный линейный функционал на J_1 , причём для всех $B \in J_1$ и $D \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ выполнено $\mathrm{Tr}(DB) = \mathrm{Tr}(BD)$.

Следующие утверждения о ядерных операторах имеют место.

1. Ядерные операторы ограничены, компактны и являются операторами Гильберта-Шмидта, $J_1 \subset J_2$, т.к. $\|B\|_1 \geq \|B\|_2$.
2. J_1 – *-идеал
3. J_1 с нормой $\|\cdot\|_1$ – банахово пространство].
4. $B \in J_1$ тогда и только тогда, когда существуют $C, D \in J_2$ такие, что $B = CD$.

Для операторов, действующих на функции в пространстве $L^2(A, \mu)$, критерии принадлежности оператора к пространству J_1 далеко не столь явны, как в случае операторов Гильберта-Шмидта. Частный случай достаточного условия касается интегральных операторов, задаваемых симметрическими положительно определенными непрерывными ядрами.

Теорема 7.22. Пусть (A, μ) – измеримое пространство Пусть $K(x, y): A \times A \rightarrow \mathbb{C}$ – непрерывная положительно определённая функция, то есть для любого $\varphi(x) \in L^2(A, \mu)$ выполнено

$$\int_{A \times A} \varphi(x)K(x, y)\varphi(y)d\mu(x)d\mu(y) \geq 0.$$

Тогда существует и единственен оператор $\widehat{K} \in J_1$, $\widehat{K}: L^2(A, \mu) \rightarrow L^2(A, \mu)$ такой, что

$$(\widehat{K}f)(x) = \int_A K(x, y)f(y)d\mu(y), \quad \|\widehat{K}\|_1 = \int_A K(x, x)d\mu(x).$$

7.2.2 Тензорные произведения гильбертовых пространств и определитель Фредгольма

Итак, мы ввели весь необходимый аппарат из функционального анализа. Теперь вернёмся к вычислению определителя Фредгольма от операторов. Для этого нам понадобится понятие внешней степени в \mathcal{H} . Пусть сначала \mathcal{H} – конечномерное пространство, $\dim \mathcal{H} = N$. Рассмотрим тензорную степень пространства: $\otimes^n \mathcal{H}$ – она определяется как линейная оболочка произведений вида $\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n \in \otimes^n \mathcal{H}$ где $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{H}$, а сами произведения это полилинейные функции на \mathcal{H}^n , то есть если $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{H}$ и $\eta_1, \dots, \eta_n \in \mathcal{H}$, то действие функции $\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n$ определяется формулой

$$\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n(\eta_1, \dots, \eta_n) = \prod_{i=1}^n \langle \varphi_i, \eta_i \rangle. \quad (7.28)$$

Скалярное произведение в $\otimes^n \mathcal{H}$ есть

$$\langle \varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n, \psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_n \rangle = \prod_{i=1}^n \langle \varphi_i, \psi_i \rangle. \quad (7.29)$$

Для любого $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ существует оператор $\Gamma_n(B) \in \mathcal{B}(\otimes^n \mathcal{H})$ такой, что

$$\Gamma_n(B)(\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n) = (B\varphi_1 \otimes \dots \otimes B\varphi_n), \quad \Gamma_n(A)\Gamma_n(B) = \Gamma_n(AB). \quad (7.30)$$

Если $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ – ортонормированная система в \mathcal{H} , то $\{\varphi_{k_1} \otimes \dots \otimes \varphi_{k_n}\}_{k_1, \dots, k_n}$ – базис в $\otimes^n \mathcal{H}$.

Определение 7.23. Пусть $\psi_1, \dots, \psi_n \in \mathcal{H}$. Положим

$$\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \psi_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \psi_{\sigma(n)}. \quad (7.31)$$

Тогда внешняя степень $\bigwedge^n \mathcal{H}$ — это линейная оболочка всех таких выражений.

В частности, $\bigwedge^0 \mathcal{H} = \mathbb{C}$, $\bigwedge^n \mathcal{H} \subset \otimes^n \mathcal{H}$.

Лемма 7.24.

$$\langle \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n, \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \rangle = \det_{1 \leq i, j \leq n} (\langle \psi_i, \varphi_j \rangle). \quad (7.32)$$

Это лёгкое упражнение.

Упражнение 7.25. Докажите лемму (7.24).

Лемма 7.26. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — собственные значения оператора $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, причём $\dim \mathcal{H} = N < \infty$. Обозначим за $\bigwedge^n B = \Gamma_n(B)$ — его ограничение на $\bigwedge^n \mathcal{H}$. Тогда

$$\text{Tr} \bigwedge^n B = e_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq N} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_n},$$

где за e_n обозначены элементарные симметрические функции.

Доказательство. Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ базис \mathcal{H} . Сначала заметим, что внешняя степень N этого пространства — это одномерное пространство с единственным базисным вектором $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_N$. Этот базисный вектор собственный для внешней степени $\bigwedge^n B$ любого линейного оператора $B : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, причем

$$\bigwedge^n B \cdot \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_N = \det B \times \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_N. \quad (7.33)$$

Доказательство этого факта — несложное упражнение, которое можно провести, записав внешнее произведение векторов по определению, а действие оператора B в тензорных компонентах в терминах его матричных элементов в базисе $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$.

На основании этого запишем следующее равенство

$$\det(\lambda I_N - B) = \langle \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_N, \bigwedge^n (\lambda I_N - B) \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_N \rangle. \quad (7.34)$$

Левая часть этого равенства есть характеристический многочлен оператора B , который имеет вид

$$\det(\lambda I_N - B) = \sum_{i=0}^N (-1)^{N-i} \lambda^{N-i} e_i(\lambda_1, \dots, \lambda_n). \quad (7.35)$$

Рассмотрим теперь выражение в правой части равенства (7.34). Пусть $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ — оператор на гильбертовом пространстве. Для набора целых чисел $1 \leq n_1 < \dots < n_k \leq N$ введем оператор $A^{n_1, \dots, n_k} : \mathcal{H}^{\otimes N} \rightarrow \mathcal{H}^{\otimes N}$ на тензорных произведениях, действующий оператором A в компонентах n_1, \dots, n_k и единичным оператором в остальных тензорных компонентах,

$$\begin{aligned} & A^{n_1, \dots, n_k} \psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_N \\ &= \psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_{n_1-1} \otimes A \psi_{n_1} \otimes \psi_{n_1+1} \otimes \dots \otimes \psi_{n_k-1} \otimes A \psi_{n_k} \otimes \psi_{n_k+1} \otimes \dots \otimes \psi_N \end{aligned} \quad (7.36)$$

Тогда правую часть скалярного произведения можно записать в виде

$$\bigwedge^N (\lambda I_N - B) \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_N = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\sigma \in S_N} (\lambda I_N - B) \varphi_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes (\lambda I_N - B) \varphi_{\sigma(N)} \quad (7.37)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\sigma \in S_N} (-1)^{|\sigma|} \sum_{k=0}^N \lambda^{N-k} (-1)^k \sum_{1 \leq n_1 < \cdots < n_k \leq N} B^{n_1, \dots, n_k} \varphi_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \varphi_{\sigma(N)} \quad (7.38)$$

Заметим, что левая часть этого выражения кососимметрична относительно перестановок векторов $\varphi_1, \dots, \varphi_N$, так что его скалярное произведение с вектором $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_N$ даст тот же результат, что и произведение с вектором $\sqrt{N!} \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_N$. Произведение последнего с правой частью, даст единицы во всех тензорных компонентах выражения под суммой, кроме компонент с индексами n_1, \dots, n_k , для которых будем иметь

$$\begin{aligned} & \langle \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_N, \bigwedge^N (\lambda I_N - B) \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_N \rangle \quad (7.39) \\ &= \sqrt{N!} \langle \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_N, \bigwedge^N (\lambda I_N - B) \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_N \rangle \\ &= \sum_{k=0}^N \lambda^{N-k} (-1)^k \sum_{1 \leq n_1 < \cdots < n_k \leq N} \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^{|\sigma|} \langle \varphi_{n_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{n_k}, (B \varphi_{\sigma(n_1)}) \otimes \cdots \otimes (B \varphi_{\sigma(n_k)}) \rangle \\ &= \sum_{k=0}^N \lambda^{N-k} (-1)^k \sum_{1 \leq n_1 < \cdots < n_k \leq N} \langle \varphi_{n_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{n_k}, (B \varphi_{n_1}) \wedge \cdots \wedge (B \varphi_{n_k}) \rangle \\ &= \sum_{k=0}^N \lambda^{N-k} (-1)^k \text{Tr} \bigwedge^{N-k} B, \end{aligned}$$

где при переходе от третьей к четвертой строчке, мы снова воспользовались кососимметричностью выражения по отношению к перестановкам базисных векторов, чтобы добавить еще одну сумму по перестановкам и получить, таким образом два внешних произведения k векторов. Сопоставляя коэффициенты при одинаковых степенях λ в полученном выражении и равенстве (7.34), мы приходим к утверждению леммы. \square

Пойдем в обратную сторону, просуммировав все следы внешних степеней, мы получим равенство

$$\sum_{n=0}^N \text{Tr} \bigwedge^n \mathcal{B} = \sum_{n=0}^N e_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \prod_{i=1}^N (1 + \lambda_i) = \det(1 + B).$$

Наша цель — распространить его на случай $N = \infty$. Для этого рассмотрим бесконечномерное гильбертово пространство \mathcal{H} , $\dim \mathcal{H} = \infty$ и определим определитель Фредгольма $\text{tr} \text{cnd} e. otuj d utv$ линейного оператора $B : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$.

Определение 7.27.

$$\det(1 + zB) := \sum_{k=0}^{\infty} z^k \text{Tr} \left(\bigwedge^k \mathcal{B} \right) \quad (7.40)$$

Чтобы придать смысл этому определению, мы докажем следующую теорему.

Теорема 7.28. Для $B \in J_1$ выполнено $\det(1 + zB) := \prod_{i=1}^{\infty} (1 + z\lambda_i(B))$. В частности, справедлива **формула Лидского**: $\text{Tr}(B) = \sum \lambda_i$.

Её доказательство, в свою очередь, состоит из нескольких вспомогательных утверждений, которые мы оформим в виде трёх лемм

Лемма 7.29. (1) Для $B \in J_1 \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Тогда справедливо $\bigwedge^n \mathcal{B} \in J_1 \subset \mathcal{B}(\bigwedge^n \mathcal{H})$, причём $\|\bigwedge^n \mathcal{B}\|_1 \leq \frac{\|B\|_1^n}{n!}$.

Отметим, что отсюда сразу следует, что $\det(1+zB)$ — целая функция переменной z , поскольку $|\det(1+zB)| \leq \exp(\|B\|_1|z|)$. Однако этой оценкой мы не ограничимся, справедлива более сильная оценка (и это — ещё одно утверждение этой леммы): для любого $\varepsilon > 0$ существует $c_\varepsilon < \infty$ такое, что $|\det(1+zB)| \leq c_\varepsilon \exp(\varepsilon|z|)$.

Лемма 7.30. (2, о непрерывности) $B \rightarrow \det(B)$ — непрерывная функция в J_1 . В частности, для всех $A, B \in J_1$ выполнено

$$|\det(1+A) - \det(1+B)| \leq \|A - B\|_1 \exp(1 + \|A\|_1 + \|B\|_1)$$

Лемма 7.31. (3) Для всех $A, B \in J_1$ выполнено:

- а) $\det(1+A+B+AB) = \det(1+A)\det(1+B)$;
- б) $\det(1+B) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $(1+B)$ — обратим;
- в) если $z_0 = -\lambda^{-1}$, где λ — собственное значение кратности n , то z_0 — ноль функции $\det(1+zB)$ кратности n .

и теоремы

Теорема 7.32. (4) Пусть $f(z)$ — целая функция с нулями z_1, z_2, \dots (с повторением с учётом конечных кратностей), причём $f(0) = 1$, $\sum_n |z_n|^{-1} < \infty$ и для любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство $|f(z)| < c_\varepsilon e^{\varepsilon|z|}$. Тогда $f(z) = \prod_i (1 - \frac{z}{z_i})$.

Последнюю теорему мы примем без доказательства, которое можно найти в учебниках по комплексному анализу.

Доказательство. (Лемма 1.) Первая часть. Заметим, что $|\bigwedge^n(B)| = \bigwedge^n(|B|)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \|\bigwedge^n(B)\|_1 &= \text{Tr}(|\bigwedge^n(B)|) = \text{Tr}(\bigwedge^n(|B|)) = \sum_{i_1 < \dots < i_n} \mu_{i_1} \dots \mu_{i_n} \leq \\ &\leq \frac{1}{n!} \sum_{i_1=1, \dots, i_n=1}^{\infty} \mu_{i_1} \dots \mu_{i_n} = \frac{1}{n!} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \right)^n = \frac{\|B\|_1^n}{n!}. \end{aligned}$$

Теперь докажем второе утверждение. Выберем N такое, что $\sum_{n>N} \mu_n < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $\prod_{n>N} (1 + |z|\mu_n) \leq \exp(\frac{|z|\varepsilon}{2})$. С другой стороны, $\prod_{n=0}^N (1 + |z|\mu_n) \leq c_\varepsilon \exp(\frac{|z|\varepsilon}{2})$. Поэтому $\sum_{n=0}^{\infty} z^n \text{Tr} \bigwedge^n(\mathcal{B}) \leq c_\varepsilon \exp(|z|\varepsilon)$.

□

Доказательство. (Лемма 2.) Введём обозначение $F(B) = \det(1 + B)$. Пусть $C, D \in J_1$. Тогда $F(C + zD)$ — целая функция, так как $\bigwedge^n(C + zD)$ — многочлен от z степени n . Введём обозначение

$$g(z) = F\left(\frac{A+B}{2} + z(A-B)\right).$$

Тогда видно, что $g(1/2) = F(A)$, $g(-1/2) = F(B)$ и

$$\begin{aligned} |F(A) - F(B)| &= |g(1/2) - g(-1/2)| \leq \sup_{-1/2 \leq t \leq 1/2} |g'(t)| \\ &\leq R^{-1} \sup_{-1/2 \leq t \leq 1/2} \sup_{|z-t|=R} |g(z)| \leq R^{-1} \sup_{|z| \leq R+1/2} |g(z)| \end{aligned}$$

с любым $R > 0$. Здесь мы воспользовались тем, что

$$|g'(a)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int \frac{dzg(z)}{(z-a)^2} \right| \leq \sup_{|t-a|=R} |g(t)| \frac{1}{R^2} \int_{|z-a|=R} \frac{|dz|}{2\pi} \leq \frac{1}{R} \sup_{|z-a|=R} |g(z)|.$$

Продолжая оценки, имеем

$$\begin{aligned} |F(A) - F(B)| &\leq \|A - B\|_1 \sup_{|z| \leq \|A-B\|_1^{-1} + 1/2} \left| \det\left(\frac{A+B}{2} + z(A-B)\right) \right| \\ &\leq \|A - B\|_1 \sup_{|z| \leq \|A-B\|_1^{-1} + 1/2} \exp\left(\left\| \frac{A+B}{2} + z(A-B) \right\|_1\right) \end{aligned}$$

Подставляя вместо z максимальное по модулю значение, то есть $|z| = \|A - B\|_1^{-1} + 1/2$, мы имеем оценку

$$\begin{aligned} |F(A) - F(B)| &\leq \|A - B\|_1 \exp\left(\frac{\|A\|_1}{2} + \frac{\|B\|_1}{2} + \frac{\|A - B\|_1}{2} + 1\right) \\ &\leq \|A - B\|_1 \exp\left(\frac{\|A\|_1}{2} + \frac{\|B\|_1}{2} + 1\right). \end{aligned}$$

□

Доказательство. (Лемма 3.)

а) Требуемое справедливо для операторов конечного ранга и распространяется на J_1 в силу непрерывности из теоремы 3.

б) Если оператор $1 + B$ необратим, то по определению $\lambda = -1$ — его собственное значение. То, что в этом случае определитель Фредгольма равен нулю, мы покажем ниже, в пункте (в). Если же оператор $1 + B$ обратим, то для оператора $C = -B(1 + B)^{-1}$ мы имеем $(1 + C)(1 + B) = 1$, откуда $\det(1 + C)\det(1 + B) = 1$ в силу пункта а).

в) Пусть λ — собственное значение оператора $B \in J_1$, P_λ — соответствующий спектральный проектор. Тогда $P_\lambda B(1 - P_\lambda)B = 0$, откуда

$$\begin{aligned} \det(1 + zB) &= \det(1 + zP_\lambda B + z(1 - P_\lambda)B) \\ &= \det(1 + zP_\lambda B + z(1 - P_\lambda)B + zP_\lambda B(1 - P_\lambda)B) \\ &= \det(1 + zP_\lambda B) \det(1 + z(1 - P_\lambda)B). \end{aligned}$$

Второй определитель не имеет нуля $z = -\lambda^{-1}$ в силу второй части пункта (б). Действительно, оператор $1 - \lambda^{-1}(1 - P_\lambda)B$ обратим, поскольку $\lambda \notin \sigma((1 - P_\lambda)B)$. А первый

— это определитель матрицы конечного размера, который можно вычислить явно. Он равен $(1 + z\lambda)^n$. Отсюда также следует и первая часть пункта (б): из того что $\lambda = -1$ следует что $\det(1 + B) = 0$.

Наконец, вернемся к доказательству теоремы 7.28. Функция $f(z) = \det(1 + zB)$ по лемме 3 имеет нули в $z = -\lambda_n^{-1}$. Поскольку

$$\sum_{n=1}^k |\lambda_n| \leq \sum_{n=1}^k \mu_n \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z_n} < \infty, \quad f(0) = 1,$$

мы можем заключить из леммы 1, что $f(z) \leq c_\varepsilon \exp(|z|\varepsilon)$. А из теоремы 4 окончательно получаем $\det(1 + zB) = \prod_i (1 + z\lambda_i)$. □

Напоследок обсудим явные формулы, получающиеся из доказанного в качестве следствия. Пусть $B \in J_1$, $B: L^2[a, b] \rightarrow L^2[a, b]$ и задана соотношением

$$Bf(x) = \int_a^b K(x, y)f(y)dy,$$

где функция $K(x, y)$ непрерывна на $[a, b]^2$. Тогда, во-первых,

$$\text{Tr}B = \int_a^b K(x, x)dx,$$

а во-вторых,

$$\det(1 + B) = \sum_{n \geq 0} \frac{\Delta_n(B)}{n!}.$$

Доказательство этих фактов можно найти в книге P. Lax, Functional analysis.

Глава 8

Вспомогательные сведения

8.1 Формулы Сохоцкого-Племеля

Теорема 8.1. [Формула Сохоцкого-Племеля] Пусть L — направленный гладкий контур в комплексной плоскости, а $f(z)$ — абсолютно интегрируемая на L функция. Введём следующие обозначения:

$$g(x) = \int_L \frac{f(z) dz}{z - x}, \quad \forall x \in \mathbb{C} \quad (8.1)$$

и

$$g(x^\pm) = \lim_{y \rightarrow x^\pm} g(y) \quad \forall x \in L, \quad (8.2)$$

где знак плюс (минус) соответствует пределу слева (справа) от контура, соответственно. Тогда, если в некоторой окрестности точки $x_0 \in L$ функция $g(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера, т.е. $|g(x') - g(x'')| \leq a|x' - x''|^\nu$ для некоторых $a, \nu > 0$, справедливы соотношения

$$g(x_0^+) - g(x_0^-) = 2\pi i \cdot f(x_0), \quad (8.3)$$

$$g(x_0^+) + g(x_0^-) = 2 \cdot V.P. \int_L \frac{f(z) dz}{z - x_0}, \quad (8.4)$$

где интеграл теперь понимается в смысле главного значения.

8.2 Дополнение Шура

Лемма 8.2. [Лемма о дополнении Шура] Пусть матрица $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ имеет блочный вид

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad (8.5)$$

где $A \in \mathbb{C}^{k \times k}$, $B \in \mathbb{C}^{k \times (n-k)}$, $C \in \mathbb{C}^{(n-k) \times k}$, $D \in \mathbb{C}^{(n-k) \times (n-k)}$. Тогда обратная матрица имеет вид

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & -(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix} \quad (8.6)$$

при условии, что указанные матрицы обратимы. В частности при всех $1 \leq i, j \leq k$ имеет место следующая формула:

$$[M^{-1}]_{ij} = [(A - BD^{-1}C)^{-1}]_{ij}, \quad (8.7)$$

Доказательство. Главная идея заключается в том, чтобы представить матрицу M в виде блочного разложения Гаусса:

$$M = \begin{pmatrix} I_k & * \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ * & I_{n-k} \end{pmatrix}. \quad (8.8)$$

Непосредственным вычислением можно проверить, что такое разложение имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} I_k & BD^{-1} \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ D^{-1}C & I_{n-k} \end{pmatrix}, \quad (8.9)$$

где блок H дается выражением

$$H = A - BD^{-1}C \quad (8.10)$$

Теперь обращение матрицы M сводится к обращению её сомножителей и перемножению их в обратном порядке. При этом мы используем, что блочно-диагональная матрица обращается поблочно, а обращение (блочной) верхне- или нижнетреугольной матрицы с единицами на диагонали сводится к замене знака ее внедиагонального блока на противоположный

$$\begin{pmatrix} I_k & X \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I_k & -X \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix}^{-1} \quad (8.11)$$

Следовательно,

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ -D^{-1}C & I_{n-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_k & -BD^{-1} \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \quad (8.12)$$

$$= \begin{pmatrix} H^{-1} & -H^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}CH^{-1} & D^{-1}CH^{-1}BD^{-1} + D^{-1} \end{pmatrix} \quad (8.13)$$

Можно еще упростить нижний правый блок (см. упражнение 8.3), что в конце концов дает ур. (8.6). \square

Упражнение 8.3. Докажите, что в условиях леммы 8.2 справедливо матричное тождество Вудбури (см. формулы (8.12), (8.13)):

$$(D - CA^{-1}B)^{-1} = D^{-1} + D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1}. \quad (8.14)$$

Следствие 8.4. В условиях леммы 8.2 справедливо соотношение

$$\det M = \det D \cdot \det(A - BD^{-1}C). \quad (8.15)$$

Доказательство. Непосредственно вытекает из формулы (8.9). \square

8.3 Кватернионы и матрицы кватернионов

Определение 8.5. *Алгебры*

$$\mathbb{H}_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\langle e_0, e_1, e_2, e_3 \rangle, \quad \mathbb{H}_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\langle e_0, e_1, e_2, e_3 \rangle \quad (8.16)$$

кватернионов над полями действительных и комплексных чисел это ассоциативные алгебры с единицей с образующими $e_0 \equiv \mathbf{1}, e_1, e_2, e_3$, удовлетворяющие соотношениям

$$e_i^2 = -1, \quad e_i e_j = \varepsilon_{ijk} e_k, \quad i \neq j \in \{1, 2, 3\}. \quad (8.17)$$

где ε_{ijk} – полностью антисимметричный тензор Леви-Чивита и мы подразумеваем суммирование по повторяющимся индексам

Введем на элементах

$$q = q^0 e_0 + q^1 e_1 + q^2 e_2 + q^3 e_3 \quad (8.18)$$

алгебр $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ и $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ три различных инволютивных антиавтоморфизма

$$\bar{q} = q^0 e_0 - q^1 e_1 - q^2 e_2 - q^3 e_3, \quad (8.19)$$

$$q^\dagger = (q^0)^* e_0 - (q^1)^* e_1 - (q^2)^* e_2 - (q^3)^* e_3, \quad (8.20)$$

$$q^T = (q^0) e_0 + (q^1) e_1 - (q^2) e_2 + (q^3) e_3, \quad (8.21)$$

где знак $*$ над коэффициентами во втором равенстве – обычное комплексное сопряжение. Эти операции мы будем называть кватернионным сопряжением, эрмитовым сопряжением и транспонированием соответственно. Термин инволютивный означает, что операция, примененная к объекту дважды, возвращает исходный объект, а термин антиавтоморфизм говорит, что операция, примененная к произведению обращает порядок сомножителей,

$$\overline{q_1 q_2} = \bar{q}_2 \bar{q}_1, \quad (q_1 q_2)^\dagger = q_2^\dagger q_1^\dagger, \quad (q_1 q_2)^T = q_2^T q_1^T. \quad (8.22)$$

Транспонирование и кватернионное сопряжение связаны соотношениями

$$\bar{q} = -e_2 q^T e_2 = e_2 q^T e_2^{-1}, \quad q \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}. \quad (8.23)$$

Очевидно также, что для вещественных кватернионов кватернионное и эрмитово сопряжения совпадают.

$$q^\dagger = \bar{q}, \quad q \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}. \quad (8.24)$$

Подобные операции вводятся и для кватернионных матриц. Для матрицы $M \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{n \times n}$ введем дуальную матрицу M^R ,¹ эрмитово сопряженную матрицу M^\dagger и транспонированную матрицу M^T с матричными элементами

$$(M^R)_{ij} = \overline{(M)_{ji}}, \quad (M^\dagger)_{ij} = (M)_{ji}^*, \quad M_{ij}^T = (M_{ji})^T. \quad (8.25)$$

Утверждение 8.6. *Дуальная и эрмитово сопряженная матрицы совпадают, т.е.*

$$M^R = M^\dagger, \quad (8.26)$$

тогда и только тогда, когда $M \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ – вещественно-кватернионная матрица

¹Индекс R , маркирующий дуальную матрицу, отсылает нас к английскому слову «reversed», т.е. обращенный (во времени). Это связано с тем, что взятие дуальной матрицы соответствует преобразованию соответствующего квантово-механического оператора при обращении времени.

Если выполнены соотношения

$$M^R = M, \quad M^\dagger = M, \quad M^T = M \quad (8.27)$$

то матрица M называется самодуальной, эрмитовой и симметрической соответственно. Из утверждения (8.6) следует, что вещественно-кватернионная матрица $M \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{n \times n}$ эрмитова тогда и только тогда, когда она самодуальна.

Алгебры кватернионов $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{n \times n}$ и $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{n \times n}$ имеют точное представление в алгебре комплексных двумерных матриц. Оно строится следующим отождествлением.

$$e_0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_1 \rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & -\mathbf{i} \end{pmatrix}, \quad e_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.28)$$

Таким образом кватернионной матрице $M \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{n \times n}$ будет соответствовать комплексная матрица вдвое большего размера $M \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$. Обратное также верно. Четыре матрицы (8.28) вместе с четырьмя матрицами, полученными умножением первых на мнимую единицу, образуют базис в $\mathbb{C}^{2 \times 2}$, откуда следует, что любая комплексная матрица $M \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ размера $2n \times 2n$ соответствует кватернионной матрице $M \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{n \times n}$ размера $n \times n$. Поэтому здесь и далее мы будем использовать одни и те же обозначения для кватернионов (и кватернионных матриц) и их комплексных матричных аналогов вдвое большего размера.

Специальное подмножество множества $\mathbb{C}^{2n \times 2n}$ четномерных комплекснозначных матриц образовано матрицами, полученными с помощью отображения (8.28) из вещественно-кватернионных матриц. Их мы также именуем вещественно-кватернионными. Чтобы идентифицировать вещественно-кватернионные матрицы среди всех матриц в $\mathbb{C}^{2n \times 2n}$, можно воспользоваться утверждением 8.6. Для этого, однако, мы должны предъявить аналоги сопряжений M^R , M^\dagger и M^T . Нетрудно увидеть, что эрмитово сопряжение и транспонирование в кватернионных матрицах совпадает с обычным эрмитовым сопряжением и транспонированием их комплексных аналогов, что в частности справедливо для образующих (8.28). Заметим, что при построении дуальной матрицы используется кватернионное сопряжение, т.е. в каждом матричном элементе сопрягаются лишь базисные элементы, но не коэффициенты при них. Добиться этого эффекта в матричном аналоге кватерниона можно, воспользовавшись соотношением (8.23), из которого видно, что для дуальной матрицы справедлива формула

$$M^R = ZM^T Z^{-1} \quad (8.29)$$

где матрица

$$Z = I_n \otimes e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.30)$$

есть одно из матричных представлений симплектической формы.

8.4 Формула Коши-Бине.

Пусть $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ и $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$ – прямоугольные матрицы, $n < m$. Для любого набора $I = \{1 \leq i_1 < \cdots < i_n \leq m\}$ введем обозначения для определителей квадратных матриц

$n \times n$, построенных из n столбцов матрицы A и n строк матрицы B с этими номерами

$$A^I := \det_{1 \leq k, l \leq n} A_{k, i_l}, \quad B_I := \det_{1 \leq k, l \leq n} B_{i_l, k}. \quad (8.31)$$

Тогда справедлива формула Коши-Бине:

$$\det AB = \sum_I A^I B_I. \quad (8.32)$$