Темы курсовых и выпускных работ

Дмитрия Пионтковского

1. [1-2 курс бакалавриата и 1 курс магистратуры] **Теорема Сколема–Малера–Леха и ее обобщения**

Если в целочисленной линейно рекуррентной последовательности бесконечно много нулей, то рано или поздно в последовательности нулей появляется периодичность. В этом состоит знаменитая теорема Малера–Сколема–Леха. Известные доказательства этой теоремы используют свойства p-адических чисел. В работе предлагается разобрать доказательство этой теоремы и ее обобщений, которые появились уже в 21 веке. Эти обобщения связаны с динамической гипотезой Морделла-Ленга о том, насколько часто при многократном применении какого-то отображения точка из алгебраического многообразия попадает в подмногообразие. В работе придется разобраться с основами p-адического анализа.

Если получится углубиться в исследования вариантов этой гипотезы, тема может быть основой самостоятельных исследований на старших курсах.

Литература

0. T. Tao. *Open question: Effective Skolem–Mahler–Lech theorem.* See https://terrytao.wordpress.com/2007/05/25/open-question-effective-skolem-mahler-lech-theorem/

1. Daniel Litt. *Zeroes of integer linear linear recurrences.* Preprint

2. Bell, J. P. , *A generalised Skolem–Mahler–Lech theorem for affine varieties.* Journal of the London Mathematical Society, 73(2), 367-379, 2006

3. Jason P. Bell, Dragos Ghioca, Thomas J. Tucker. *The Dynamical Mordell–Lang Conjecture.* Mathematical surveys and monographs, v. 210. AMS, 2016. *Available at*: https://personal.math.ubc.ca/ dghioca/papers/book.pdf

2. [все курсы, включая выпускные работы] **Алгебры некоммутативной проективной геометрии**

Градуированную ассоциативную алгебру можно рассматривать как координатное кольцо воображаемого "некоммутативного проективного многообразия". Свойства этого многообразия можно восстановить по свойствам алгебры. Интересны алгебры, у которых алгераические и гомологические свойства напоминают свойства классических координатных колец. Это большая тема, в которой возможны и обзорные, и исследовательские работы.

Возможных направлений много, вот два из них.

2a. **Некоммутативные когерентные алгебры.** Кольцо когерентно справа, если конечно порожденные правые идеалы в нем конечно представимы как модули. Таковы нетеровы кольца, а также, например, свободная ассоциативная

алгебра и алгебры путей на графах. Бывает сложно доказать, что какая-то гомологически интересная алгебра когерентна, но каждый такой пример может дать интересное некоммутативное многообразие. Предлагается построить новые примеры когерентных и некогерентных градуированных алгебр и изучить их свойства. Свойства категорий модулей над такими алгебрами и их производные категории представляют отдельный интерес.

2б. **От путей на графах до квадратичных алгебр**

Задача – изучить ряды Гильберта градуированных квадратичных алгебр. Простейший пример такой алгебры – мономиальная алгебра ориентированного графа: ее порождающие алгебры – вершины графа, а всевозможные пути в графе составляют линейный базис. Самый интересный класс – козюлевы (или кошулевы) алгебры, гомологически похожие на кольцо многочленов. О рядах Гильберта таких алгебр многое известно, но остается ряд гипотез и открытых вопросов – в том числе о производящей функции числа маршрутов в графах. Здесь возможны обзорные работы, компьютерные исследования и теоретические работы.

Литература

1. Rogalski, D. (2014). *An introduction to noncommutative projective geometry.* ArXiv preprint arXiv:1403.3065.

2. Keeler D. S. *The rings of noncommutative projective geometry.* Advances in Algebra and Geometry: University of Hyderabad Conference 2001. Gurgaon : Hindustan Book Agency, 2003, pp. 195-207

3. Piontkovski, D., *Coherent algebras and noncommutative projective lines.* Journal of Algebra, 319(8), 3280-3290, 2008

4. Polishchuk A., Positselski L., *Quadratic algebras*, AMS, 2005

5. Iyudu, N., Shkarin, S. *Two problems from the Polishchuk and Positselski book on quadratic algebras.* Journal of Noncommutative Geometry, 12(1), 255-278, 2021

3. [Все курсы, включая выпускные работы] **Операды и алгебры с тождествами**

Алгебраические операды – алгебраические структуры, задающие линейные алгебры с одной или несколькими операциями и тождествами между ними. За счет связи с топологическими операдами они также замечательный инструмент для изучения гомологий. Линейные базисы в операдах обычно кодируются деревьями, а общая теория обобщает теорию градуированных ассоциативных алгебр. Эта теория активно развивается последние 30 лет, но много еще предстоит сделать.

Начать знакомство с операдами можно с задачи перечисления деревьев, избегающих какого-то шаблона. Уже здесь есть интересные открытые комбинаторные вопросы. Отдельный класс задач – программирование алгоритмов вычислений в операдах и эмпирические исследования.

Литература

1. Markl, M., Shnider, S., Stasheff, J. *Operads in algebra, topology and physics.* Mathematical surveys and monographs, 96, 2002

2. Bremner M. R., Dotsenko V. *Algebraic operads: an algorithmic companion.* CRC Press, 2016

3. Rowland, E. S. *Pattern avoidance in binary trees*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, 117(6), 741–758, 2010