

Геометрия и линейная алгебра. Листок для самостоятельного решения 1.

Задачи можно сдавать до 16 октября 18:00

Задача 1. Рассмотрим пару различных точек $a, b \in \mathbb{F}^2$. Докажите, что точка $\mu_a a + \mu_b b$ лежит на прямой ab тогда и только тогда, когда $\mu_a + \mu_b = 1$.

Задача 2. Пусть a, b, c — три лежащие на одной прямой точки в $\mathbb{F}^2$, причем $c \neq b$. Определите отношение векторов $\frac{\vec{ac}}{\vec{cb}}$. Какие значения оно может принимать?

Задача 3. Докажите, что четырёхугольник на плоскости $\mathbb{F}^2$, $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$ является параллелограммом тогда и только тогда, когда его диагонали делятся друг другом в отношении 1 к 1.

Задача 4. Пусть $\mathbb{F}$ поле характеристики 2. Докажите, что диагонали любого параллелограмма в $\mathbb{F}^2$ параллельны.

Задача 5. Докажите, что любое аффинное преобразование плоскости $\mathbb{F}^2$ сохраняет отношение направленных отрезков $\frac{\vec{ac}}{\vec{cb}}$ для любых трех коллинеарных точек a, b, c .

Задача 6. Пусть abc — треугольник в $\mathbb{F}^2$, $\text{char } \mathbb{F} \neq 2, 3$ и a', b', c' лежат на прямых bc, ac, ab , соответственно. Докажите, что прямые aa', bb', cc' пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{\vec{ab'}}{\vec{b'c}} \cdot \frac{\vec{ca'}}{\vec{a'b}} \cdot \frac{\vec{bc'}}{\vec{c'a}} = 1$$

Задача 7. Пусть abc — треугольник в $\mathbb{F}^2$, и a', b', c' лежат на прямых bc, ac, ab , соответственно. Докажите, что точки a', b', c' лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{\vec{ab'}}{\vec{b'c}} \cdot \frac{\vec{ca'}}{\vec{a'b}} \cdot \frac{\vec{bc'}}{\vec{c'a}} = -1$$

Задача 8. Докажите, что у любого треугольника в $\mathbb{F}_3^2$ медианы параллельны.

Задача 9. Пусть $abcd$ — параллелограмм в аффинной плоскости $\mathbb{F}^2$ над полем $\mathbb{F}$ ($\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$), а p — произвольная точка этой плоскости. Докажите, что для площадей треугольников выполняется тождество:

$$S(pab) + S(pcd) = S(pbc) + S(pda)$$

Задача 10. Верно ли, что на аффинной плоскости $\mathbb{R}^2$:

- а) два выпуклых четырёхугольника переводятся друг в друга аффинным преобразованием тогда и только тогда, когда у них одинаковы отношения, в которых соответственные друг другу диагонали делятся точкой своего пересечения;
- б) две трапеции переводятся друг в друга аффинным преобразованием тогда и только тогда, когда у них одинаковые отношения оснований;

- в) пятиугольник переводится аффинным преобразованием в правильный пятиугольник тогда и только тогда, когда какие-то четыре его диагонали параллельны противоположащим им сторонам?

Задача 11. Опишите композицию отражений плоскости относительно последовательно перебираемых против часовой стрелки:

- а) срединных перпендикуляров к сторонам данного треугольника;
- б) биссектрис углов данного треугольника;
- в) сторон данного квадрата.

Задача 12. Обозначим через φ композицию трёх отражений плоскости относительно последовательно перебираемых против часовой стрелки сторон данного треугольника. Найдите ГМТ x с минимальным расстоянием $|x - \varphi(x)|$.

Задача 13. Каждая сторона выпуклого четырёхугольника в $\mathbb{R}^2$ разделена на три равные части и соответственные точки деления на противоположных сторонах соединены так, что четырёхугольник разбивается на девять меньших четырёхугольников. Докажите, что отношение площади среднего из четырёхугольников к площади исходного четырёхугольника равно $1/9$.

Задача 14. При каком условии на поле $\mathbb{F}$ утверждение предыдущей задачи остаётся корректным при замене $\mathbb{R}$ на $\mathbb{F}$?