

Остатки в кольце целых чисел

АЛ1♦1. На бревне поставили отметки, делящие его на 17 равных частей, и отметки, делящие его на 37 равных частей. Затем распилили по всем отметкам. Найдите набор (множество с кратностями) длин получившихся кусков.

АЛ1♦2. Опишите все решения уравнения $nx = 0$ в кольце $\mathbb{Z}/(m)$. Сколько их?

АЛ1♦3 (Малая теорема Ферма). Докажите, что для любого целого числа a и любого простого целого числа p верно, что $a^p \equiv a \pmod{p}$.

АЛ1♦4. Группа обратимых элементов кольца $\mathbb{Z}/(m)$ обозначается $(\mathbb{Z}/(m))^*$. Количество элементов этой группы называется функцией Эйлера $\varphi(m) = \#(\mathbb{Z}/(m))^*$.

а) $\varphi(m)$ это количество натуральных чисел от 1 до m , взаимно простых с m ;

б) Для натурального n и простого натурального p найдите $\varphi(p^n)$;

в) (Мультипликативность функции Эйлера) Для любых взаимно простых чисел m и n покажите, что $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$.

АЛ1♦5. Для любых натуральных m и n докажите равенства:

а*) $\varphi(n)\varphi(m) = \varphi(\text{НОК}(n, m))\varphi(\text{НОД}(n, m))$;

б*) $\varphi(nm) = \varphi(\text{НОК}(n, m)) \cdot \text{НОД}(n, m)$.

АЛ1♦6. Решите уравнения:

а) $\varphi(x) = 18$;

б) $\varphi(x) = 12$;

в) $x - \varphi(x) = 12$;

г) $\varphi(x) = x/2$;

д*) $\varphi(x) = x/3$;

е*) $\varphi(x) = x/n$;

ж) $\varphi(nx) = \varphi(x)$, где n — натуральное число, $n > 1$.

АЛ1♦7*. Докажите, что для любого натурального n

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d).$$

АЛ1♦8 (Теорема Эйлера). Докажите, что для любых взаимнопростых натуральных m и a верно сравнение $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.

АЛ1♦9 (Теорема Вильсона). Докажите, что для любого простого натурального числа p верно, что $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

АЛ1♦10*. Даны натуральные числа $k, m, n \in \mathbb{N}$. Чему равен НОД чисел $k^m + 1$ и $k^n + 1$?

АЛ1♦11. Докажите, что для каждого натурального числа m существует кратное ему натуральное число n , сумма цифр которого равна m .

Список литературы

- [1] Сендеров В.А., Спивак А.В. Малая теорема Ферма // Квант.—2000.— № 1.— С. 9-16, 37.
https://www.kvant.digital/issues/2000/1/senderov_spivak-malaya_teorema_ferma-d136c75e/
- [2] Сендеров В. А., Спивак А. В. Малая теорема Ферма // Квант.— 2000.— № 3.— С. 11-17.
https://www.kvant.digital/issues/2000/3/senderov_spivak-malaya_teorema_ferma-8f331695/

- [3] Сендеров В. А., Спивак А. В. Малая теорема Ферма // Квант.— 2000.— № 4.— С. 15-18.
https://www.kvant.digital/issues/2000/4/senderov_spivak-malaya_teorema_ferma-17c6ab29/