

УРЧП-26: ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ 1

Запишите подробно решения задач 1 — 3, частично разобранных на семинаре.

1. Докажите, что диффеоморфизм плоскости, сохраняющий оператор Лапласа, — аффинное преобразование. Какое?
2. Докажите, что диффеоморфизм плоскости, сохраняющий даламбертиан, — аффинное преобразование. Какое?
3. Докажите, что в задаче Коши для уравнения Лапласа на цилиндре нет непрерывной зависимости от начальных условий в метрике C^m для любого m .
4. Пусть $r = |x|$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u(x) = f(r)$. Выразите Δu через f, f', f'' .
5. Выразите Δu в полярных координатах на плоскости.

Положим $\varphi_0(x) = \sin x \cdot \chi_{[\pi, 2\pi]}(x)$.¹ и рассмотрим условия

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi_0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad (2)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \varphi_0. \quad (3)$$

6. Нарисуйте «мультфильмы» для следующих задач:

а. (1), (3), неограниченная струна.

В пунктах б — д струна полуограничена: $x \geq 0$.

б. (1), (2), $u_x|_{x=0} = 0$.

в. (1), (3), $u|_{x=0} = 0$.

г. (1), (3), $u_x|_{x=0} = 0$.

7. Решите задачу Коши для ограниченной струны $x \in [0, \pi]$

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = 0, \quad u|_{t=0} = \sin kx, \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

8. То же для измененных начальных условий:

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \sin kx.$$

9. Решите смешанную задачу для ограниченной струны $x \in [0, \pi]$

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad u|_{x=0} = b(t), \quad u|_{x=\pi} = c(t), \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

Указание: используйте лемму о параллелограмме:

$$(1) \Rightarrow u(A) + u(C) = u(B) + u(D),$$

где A, B, C, D — вершины характеристического параллелограмма в области определения u ; ответ даётся знакопеременной суммой значений функций b и c в вершинах характеристических ломаных.

10. Рассмотрите предыдущую задачу при $a = 1$, $b(t) = \sin kt$. Будет ли решение ограниченным?

¹ $\chi_A(\cdot)$ — индикаторная функция.