

Тиморин Владлен Анатольевич

vtimorin@hse.ru

В каждой из приведенной ниже тем перечислены некоторые конкретные вопросы, над которыми можно работать. Однако ориентироваться лучше на широкие темы, а с выбором конкретного направления внутри этой темы я помогу в ходе личного обсуждения. Все книги и статьи, перечисленные в списке литературы, у меня есть в электронном виде, и я могу ими поделиться по запросу. Перечислена не вся релевантная литература, а только то, с чем стоит познакомиться в первую очередь.

1 Равносоставленность многоугольников и многогранников

Два плоских многоугольника P и Q называются *равносоставленными*, если можно разрезать P на многоугольные фрагменты и сложить из них Q . В этом определении неявно задана некоторая группа G евклидовых изометрий, которая позволяет передвигать фрагменты: каждый фрагмент заменяется на G -конгруэнтный ему. В зависимости от выбора группы G можно говорить о *евклидовой равносоставленности* (когда G состоит из всех евклидовых изометрий), *равносоставленности относительно параллельных переносов* (когда G совпадает с группой всех параллельных переносов) и т.д. Для более общего выбора группы G говорят о *G -равносоставленности*.

Задачи о евклидовой равносоставленности восходят к античности. Согласно классической *теореме Уоллеса–Бойли–Гервина*, два плоских многоугольника равносоставлены относительно евклидовых изометрий тогда и только тогда, когда они имеют равные площади. Более того, тот же результат остаётся верным, если группу всех евклидовых изометрий заменить на значительно меньшую подгруппу, состоящую только из параллельных переносов и поворотов на 180° , как показали Хадвигер и Глур в 1951 [5]. Однако для равносоставленности относительно параллельных переносов Хадвигер и Глур обнаружили бесконечно много инвариантов, которые, наряду с площадью, могут различать неравносоставленные фигуры. В трехмерном случае, даже когда G состоит из всех евклидовых изометрий, имеется бесконечно много инвариантов равносоставленности (*инварианты Дена*, 1900).

1.1 Равносоставленность координатных прямоугольников

Тема рекомендована студентам 1–2 курсов.

Координатным прямоугольником называется прямоугольник с вертикальными и горизонтальными сторонами. Можно ли разрезать координатный прямоугольник со сторонами 1 и 2 на конечное число координатных прямоугольников так, чтобы из них можно было сложить квадрат? Полученные после разрезания прямоугольные куски можно параллельно переносить, но нельзя поворачивать. Это пример задачи, которая решается при помощи инварианта *тензорной площади*.

Рассмотрим набор R координатных прямоугольников размеров $a_1 \times b_1, \dots, a_n \times b_n$, которые могут пересекаться только по границе. Тензорной площадью набора R называется величина

$$a_1 \otimes b_1 + \dots + a_n \otimes b_n \in \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}.$$

Доказательство следующего факта может составить курсовую работу: два набора координатных прямоугольников равносоставлены друг другу при помощи параллельных переносов и с условием, что разрезать разрешается только на координатные прямоугольники, тогда и только тогда, когда у этих наборов совпадают тензорные площади.

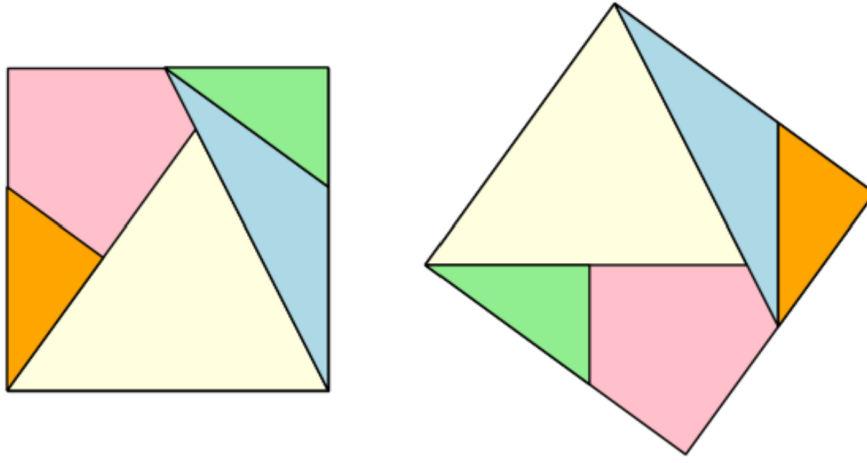


Рис. 1: Квадрат трансляционно (!) равносоставлен своей повернутой (на произвольный угол) копии.

1.2 Равносоставленность относительно параллельных переносов и подгруппы вращений

Тема рекомендована студентам 1–2 курсов.

Зафиксируем ориентацию плоскости $\mathbb{R}^2$. Также удобно будет зафиксировать начало координат o в $\mathbb{R}^2$ и рассматривать $\mathbb{R}^2$ как векторное пространство. Выберем ориентированную прямую L , проходящую через начало координат, и определим функцию HG_L на выпуклых многоугольниках следующим образом. Для данного выпуклого многоугольника P определим прямые $L_{\pm}$ как две опорные прямые многоугольника P , параллельные прямой L . Мы выбираем эти прямые так, чтобы P лежал слева от L_+ и справа от L_- относительно выбранной ориентации прямой L , а также выбранной ориентации плоскости $\mathbb{R}^2$. Определим

$$\text{HG}_L(P) := \text{Len}(P \cap L_+) - \text{Len}(P \cap L_-),$$

где Len обозначает евклидову длину прямолинейного отрезка.

Решение задачи о равносоставленности относительно параллельных переносов (*трансляционной равносоставленности*) на плоскости, найденное Хадвигером и Глуром, выглядит следующим образом: два многоугольника P и Q трансляционно равносоставлены тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую площадь и одинаковые значения всех мер Хадвигера–Глура. Заметим, что, хотя мер Хадвигера–Глура несчётное число, достаточно проверить лишь конечное число соотношений, чтобы решить, являются ли P и Q равносоставленными, а именно, нужно проверить, что $\text{area}(P) = \text{area}(Q)$ и $\text{HG}_L(P) = \text{HG}_L(Q)$ для каждой прямой $L \ni o$, параллельной ребру многоугольника P или Q .

Пусть теперь группа $\mathbf{G}$ евклидовых движений содержит все параллельные переносы и *некоторые* вращения. Если группа вращений содержит поворот на π , то равносоставленность относительно $\mathbf{G}$ равносильна равносоставленности относительно группы всех евклидовых движений. Однако, если группа вращений не содержит поворот на π , то это не так. Критерии равносоставленности, впрочем, несложно формулируются в терминах инвариантов Хадвигера–Глура, «усредненных» по группе поворотов. Предлагается разобраться с этими критериями и аккуратно их записать.

Литература: [17, 18, 5, 7].

1.3 Равносоставленность в трехмерном пространстве

Тема рекомендована студентам 2–3 курса. Будем говорить, что вещественнозначная функция μ на множестве всех выпуклых многогранников в $\mathbb{R}^3$ является *простой мерой*, если

$$\mu(P) = \mu(P_1) + \dots + \mu(P_n),$$

всякий раз, когда P разрезан на конечное число многогранных фрагментов $P_1, \dots, P_n$. Более формально, P является объединением многогранников P_i , причём внутренности этих многогранников попарно не пересекаются. Достаточно потребовать, чтобы выполнялось равенство $\mu(P) = \mu(P_+) + \mu(P_-)$ каждый раз, когда плоскость рассекает многогранник P на две части P_+ и P_- . Говорят, что μ является $\mathbf{G}$ -инвариантной, если $\mu(gP) = \mu(P)$ для всех $g \in \mathbf{G}$. Например, объем является мерой на (ограниченных) многогранниках, инвариантной относительно полной группы евклидовых изометрий.

Из определений ясно, что если P и Q оказались $\mathbf{G}$ -равносоставлены, то $\mu(P) = \mu(Q)$ для каждой простой $\mathbf{G}$ -инвариантной меры μ . Обратное также верно, как было доказано Хадвигером. Решение задачи о равноставленности теперь сводится к нахождению «полного» набора простых $\mathbf{G}$ -инвариантных мер, достаточного для различения любых двух ($\mathbf{G}$ -равносоставленных) многогранников. Пусть теперь $\mathbf{G}$ — полная группа изометрий трехмерного евклидова пространства. Ден в 1900 определил простые инвариантные меры — *инварианты Дена* — которые могут различать неравноставленные многогранники одинакового объема. *Теорема Дена–Сидлера* утверждает, что два многогранника равноставлены тогда и только тогда, когда у них совпадают объемы и все инварианты Дена. Эта теорема имеет непростое доказательство, отчасти основанное на сложных вычислениях — часть этих вычислений удалось заменить соображениями из гомологической алгебры, но оставшаяся часть все равно представляет технические сложности. Хотелось бы развить подход к теореме Дена–Сидлера, основанный на имеющемся описании *всех* простых мер на многогранниках. Известно, как из этого описания выделить описания транслационно инвариантных мер, и осталось только наложить условие инвариантности относительно вращений.

Литература: [18, 11]

1.4 Инварианты равноставленности на гиперболических поверхностях

Тема рекомендована студентам 3 курса и старше.

На всякой компактной поверхности с двумя и более ручками имеется гиперболическая метрика, т.е. поверхность локально выглядит как плоскость Лобачевского. Многоугольная фигура на поверхности — не то же самое, что многоугольник на гиперболической плоскости, поскольку, например, некоторые нестягиваемые петли на фигуре могут быть нестягиваемыми также и на всей поверхности, т.е. прообраз фигуры при универсальном накрытии не будет просто копией фигуры. Задача: описать все простые конечно аддитивные меры на многоугольных фигурах данной гиперболической поверхности.

Литература: [8, 6].

2 Кусочно евклидова и кусочно гиперболическая динамика

У задач равноставленности есть динамический контекст. Рассмотрим равноставленности многоугольника P с самим собой. Если раньше нас интересовало только наличие или отсутствие равноставленности, то здесь наличие очевидно, но мы смотрим на конкретные отображения — каждое такое отображение f определено на всех фрагментах некоторого многоугольного разбиения многоугольника P и на каждом фрагменте действует как евклидово движение. Такие отображения f называются *кусочными изометриями*. Кусочные изометрии можно итерировать. При этом возникают естественные вопросы о существовании периодических или аperiodических орбит, структуре пространства инвариантных мер и проч. С другой стороны, интересно изучать свойства группы всех кусочных изометрий.

2.1 Инвариант Са–Арну–Фати и его аналоги

Тема рекомендована студентам 2–3 курсов. Пусть $I := [0; 1]$. Обозначим через $\text{ИЕТ}(I)$ группу всех сохраняющих ориентацию кусочных изометрий отрезка I . Элементы этой группы действуют на каждой компоненте своей области определения как параллельные переносы; они называются

перекладываниями отрезка. Оказывается, что группа $\text{IET}(I)$ имеет большую абелианизацию. А именно, имеется сюръективный гомоморфизм из $\text{IET}(I)$ в аддитивную группу бесконечномерного векторного пространства над действительными числами. Векторное пространство V , о котором идет речь — это $\bigwedge_{\mathbb{Q}}^2 \mathbb{R}$, внешний квадрат аддитивной группы $\mathbb{R}$. Гомоморфизм из $\text{IET}(I)$ в V определяется так. Каждое перекладывание f отрезка I соответствует разбиению отрезка I на несколько подотрезков $I_1, \dots, I_n$, причем на каждом I_i отображение f действует как сдвиг на некоторый (одномерный) вектор $\tau_i \in \mathbb{R}$. Положим

$$\text{SAF}(f) := \sum_{i=1}^n \text{Len}(I_i) \otimes \tau_i \in \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}.$$

Это отображение из $\text{IET}(I)$ в тензорный квадрат группы $\mathbb{R}$ называется *инвариантом Са–Арну–Фати*. На самом деле, образом группы $\text{IET}(I)$ при отображении SAF будет $V = \bigwedge_{\mathbb{Q}}^2 \mathbb{R}$. Более того, отображение SAF представляет абелианизацию группы $\text{IET}(I)$, т.е. образом является коммутативная группа, а ядром — подгруппа, порожденная коммутаторами. Имеются аналоги SAF -инварианта для перекладываний многоугольников и многогранников. В этом предлагается разобратся.

Литература: [1, 12, 19].

2.2 Кусочно евклидова динамика и гомологии группоидов

Тема рекомендована студентам 3 курса и старше.

Групоид — это малая категория, в которой все морфизмы являются изоморфизмами. Объекты группоида принято отождествлять с тождественными автоморфизмами этих объектов. *Топологический группоид* — это группоид, на множестве стрелок которого введена топология. При некоторых дополнительных предположениях типа компактности можно говорить о группах гомологий топологических группоидов. В задачах евклидовой равносоставленности, а также в задачах кусочно евклидовой динамики важную роль играют *группоиды флагов*. Объекты этих группоидов — полные аффинные ориентированные флаги, то есть точка плюс луч, выходящий из этой точки, плюс полуплоскость, содержащая в своей граничной прямой этот луч, и так далее. Морфизмы — евклидовы изометрии, переводящие один флаг в другой; обратите внимание, что упорядоченная пара флагов однозначно задает соответствующую изометрию. Поскольку можно вводить ограничения на подгруппу евклидовых изометрий (только сохраняющие ориентацию, только переносы, и т.д.), а также ограничения на выбор флагов (только правильной ориентации, только параллельные данному, и т.д.), речь идет не об одном группоиде, а о многих. Нулевые гомологии этих группоидов решают задачу равносоставленности, а первые гомологии имеют отношение к абелианизации групп кусочно евклидовых автоморфизмов. Иными словами, нулевые гомологии отвечают за геометрию, а первые — за динамику. Задача: вычислить первые гомологии некоторых из указанных группоидов.

2.3 Внешние бильярды относительно евклидовых правильных многоугольников: динамическое самоподобие

Тема рекомендована студентам 2 курса и старше.

Пусть P — выпуклый многоугольник на плоскости. Рассмотрим точку z во внешности многоугольника P и предположим, что если смотреть на P из z , то только одна вершина многоугольника P , а именно, вершина a , будет видна как самая правая. В этом случае положим $f(z) = 2a - z$, то есть f действует на z как отражение (= поворот на 180°) относительно вершины a . Нетрудно видеть, что отображение f определено на объединении конечного числа открытых секторов и отражает каждый из этих секторов относительно его вершины. Это отображение f называется отображением *внешнего бильярда* относительно P . Заметим, что f кусочно евклидово. Наиболее симметричная ситуация и, по этой причине, одна из наиболее интересных ситуаций, возникает, когда P — правильный n -угольник. Для некоторых значений n у f наблюдается *динамическое*

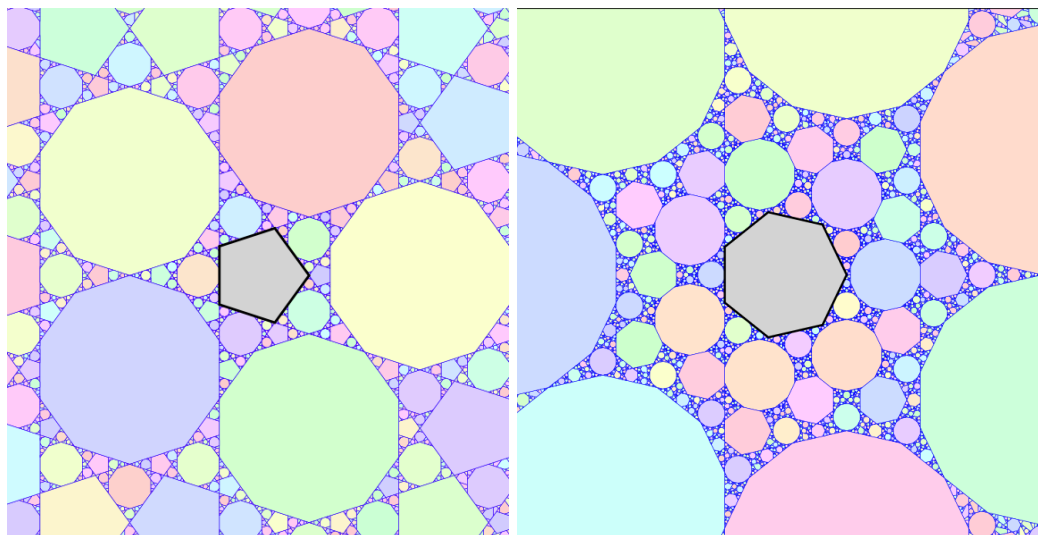


Рис. 2: Слева: внешний бильярд относительно правильного 5-угольника. Справа: внешний бильярд относительно правильного 7-угольника. Разноцветные области — это периодические компоненты.

самоподобие, то есть оказывается, что отображение первого возвращения относительно f в некоторый меньший многоугольник сопряжено при помощи некоторого евклидова преобразования подобия отображению первого возвращения в больший многоугольник. В случае динамического самоподобия возникают инвариантные относительно f фракталы. На настоящий момент динамическое самоподобие обнаружено только для $n = 5, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 18$. Вопрос: как динамическое самоподобие связано со свойствами кругового поля $\mathbb{Q}[\zeta]$, где ζ — примитивный корень n -й степени из единицы, и соответствующего кольца целых? Данная тема предполагает активные компьютерные эксперименты.

Литература: [23, 25, 2]

2.4 Гиперболические внешние бильярды

Тема рекомендована студентам 3 курса и старше.

Внешний бильярд относительно выпуклого многоугольника на гиперболической плоскости определяется так же, как и на евклидовой плоскости. О самоподобиях говорить не приходится, потому что в геометрии Лобачевского вообще нет преобразований подобия. С другой стороны, в отличие от евклидова случая, размер, скажем, правильного многоугольника, играет роль параметра в семействе гиперболических внешних бильярдов. Интересно изучать даже семейство внешних бильярдных отображений относительно правильных треугольников (соответствующая евклидова задача тривиальна). Пусть J — замыкание множества тех точек плоскости Лобачевского, в которых итерация f^{on} отображения внешнего бильярда f не является непрерывной для некоторого n .

Задача 1. Существуют ли блуждающие компоненты дополнения до множества J , то есть такие компоненты Ω , что $f^{on}(\Omega) \cap \Omega = \emptyset$ для любого n ?

Задача 2. Верно ли, что любая компонента множества Ω дополнения до множества J ограничена либо окружностью, либо выпуклым многоугольником?

Литература: [24, 14, 21]

2.5 Группы равносоставленностей

Тема рекомендована студентам 2 курса и старше.

В теории равносоставленности возникают группы, которые интересно изучать с позиций абстрактной или геометрической теории групп. Известные результаты в этом направлении относятся только к одномерной ситуации, т.е. к перекладываниям отрезков, или к очень специаль-

ным классам перекладываний многогранников, например, перекладываниям координатных прямоугольных параллелепипедов посредством параллельных переносов. Например, группа IET всех перекладываний отрезка, с точностью до изоморфизма не зависит от того, какой именно отрезок перекладывать. Инвариант Са–Арну–Фати (см. раздел 2.1) осуществляет абелианизацию этой группы и, таким образом, IET имеет большую абелианизацию. А с другой стороны, группа IET^{∞} , состоящая из всех кусочно изометрических автоморфизмов отрезка, не обязательно сохраняющих ориентацию, проста, как показал Арну. Неизвестно, есть ли в IET свободные подгруппы с более чем одной образующей и является ли IET аменабельной (положительный ответ на первый вопрос повлечет отрицательный ответ на второй).

В двумерном случае имеет смысл рассматривать вот какие группы:

- группу SC всех кусочных изометрий данного компактного многоугольника в $\mathbb{R}^2$ (с точностью до изоморфизма, эта группа не зависит от выбора многоугольника);
- подгруппу SC_+ , состоящую только из сохраняющих ориентацию кусочно евклидовых изометрий (она тоже не зависит от выбора многоугольника);
- группу $\text{PET}(P)$ всех *перекладываний*, т.е. кусочных параллельных переносов, многоугольника P . Эта группа, с точностью до изоморфизма, может зависеть только от набора инвариантов Хадвигера–Глура многоугольника P , деленных (для нормализации) на корень из площади.

Можно было бы ожидать, что группа SC окажется простой. У групп SC_+ и $\text{PET}(P)$ имеются большие абелианизации, но точно они пока не посчитаны. Актуален вопрос о наличии в этих группах нециклических свободных подгрупп, причем, если они есть, но найти их в размерности > 1 может быть проще, чем в размерности 1.

Литература: [9]

3 Задачи геометризации

Программа геометризации, которую наиболее последовательно сформулировал и развивал У. Терстон, составляет одну из глобальных парадигм современной математики, связывающую топологию и топологическую динамику с геометрией. Самый известный результат в этом направлении — теорема Перельмана, включающая в качестве следствия верификацию гипотезы Пуанкаре. Грубо говоря, геометризация заключается в том, что в каждом классе топологической эквивалентности тех или иных объектов (многообразий, динамических систем, и т.п.) можно выбрать геометрического представителя, т.е. объект, наделенный дополнительной жесткой геометрической структурой, причем часто оказывается, что такой объект только один с точностью до геометрической (!) эквивалентности. Двумерные варианты задач геометризации, как правило, намного проще трехмерных, но представляют значительный интерес.

3.1 Классификация прострых кривых посредством железнодорожных путей

Пусть S — поверхность конечного типа, то есть компактная поверхность без края, из которой, возможно, выкололи конечное число точек. За редкими исключениями (которые можно пересчитать по пальцам), на S бывает бесконечно много попарно негомотопных простых замкнутых кривых. Множество $\mathcal{C}$ гомотопических классов простых замкнутых кривых на поверхности S интересно и само по себе, и поскольку на нем действует группа классов отображений (через это действие удобно изучать последнюю группу). Можно достаточно явно классифицировать все элементы из $\mathcal{C}$ в комбинаторных терминах, используя так называемые *железнодорожные пути* (ЖД пути). Это такие гладко вложенные графы, которые имеют касательную в каждой точке (в частности, все развилки происходят не под углами друг к другу, а плавно, как в настоящих железнодорожных путях). Кривую можно «посадить» на ЖД путь, при этом на участках пути будут написаны кратности — сколько ветвей данной кривой садится на данный участок ЖД пути. Итак, классы

кривых описываются ЖД путями с помеченными на их участках кратностями. Вопрос: как похожим образом классифицировать не простые замкнутые кривые, а вложенные графы (скажем, с ограничениями на их комбинаторику)?

Литература: [4].

3.2 Теорема Гильберта о геометризации

Тема рекомендована студентам 1–2 курсов.

Разберите следующую теорему Д. Гильберта. Пусть G — группа сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов вещественной плоскости $\mathbb{R}^2$. *Стабилизатор* точки $a \in \mathbb{R}^2$ определяется как подгруппа $G_a \subset G$, состоящая из всех $g \in G$, таких, что $g(a) = a$. Предположим, что выполнены следующие предположения на группу G :

- Для любых двух точек $a \neq b$, множество $G_a(b)$ (орбита точки b при действии группы G_a) бесконечно.
- Множество упорядоченных шестерок (a, b, c, a', b', c') точек, таких что

$$a' = g(a), \quad b' = g(b), \quad c' = g(c)$$

для некоторого $g \in G$, замкнуто в $(\mathbb{R}^2)^6$.

При этих предположениях существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм φ между $\mathbb{R}^2$ и евклидовой плоскостью или плоскостью Лобачевского, такой, что группа $\varphi G \varphi^{-1}$ совпадает с группой движений.

Литература: [20]

3.3 Конформные структуры на топологических сферах

Тема рекомендована студентам 3 курса и старше.

Пусть S — *топологическая 2-сфера*, то есть топологическое пространство, гомеоморфное сфере $\mathbb{S}^2$. Рассмотрим набор набор $\mathcal{F}$ гомеоморфизмов $f : U \rightarrow V$, где $U, V \subset S$ — открытые подмножества. Набор $\mathcal{F}$ будем называть *топологической конформной структурой на S* , если существует гомеоморфизм $h : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ со следующим свойством: $f \in \mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда $h \circ f \circ h^{-1}$ является конформным изоморфизмом между двумя открытыми подмножествами в $\mathbb{S}^2$. Задача: найти топологическую характеристизация топологических конформных структур, то есть топологические условия на $\mathcal{F}$, необходимые и достаточные для того, чтобы $\mathcal{F}$ была конформной структурой. Вот некоторые очевидные примеры необходимых условий:

- если $f : U \rightarrow V$ и $g : V \rightarrow W$ лежат в $\mathcal{F}$, то $g \circ f \in \mathcal{F}$;
- если $U = U_1 \cup U_2$ и гомеоморфизм $f : U \rightarrow V$ таковы, что $f|_{U_1}, f|_{U_2} \in \mathcal{F}$, то $f \in \mathcal{F}$;
- если U гомеоморфно диску и $a, b \in U$, то в $\mathcal{F}$ найдется $f : U \rightarrow U$ со свойством $f(a) = b$.

Этих необходимых условий, очевидно, недостаточно. Имеющиеся характеристики конформных структур используют не только топологию, но также и определенные слабые варианты аналитических структур на S , например, требуется работать либо с $L_{loc}^2(S)$, либо с квазиконформной структурой на S . А хотелось бы иметь топологическую формулировку в духе теоремы Гильберта (см. тему 3.2). Это поможет решать задачи голоморфной динамики (см. [16]).

Литература: [6, 16].

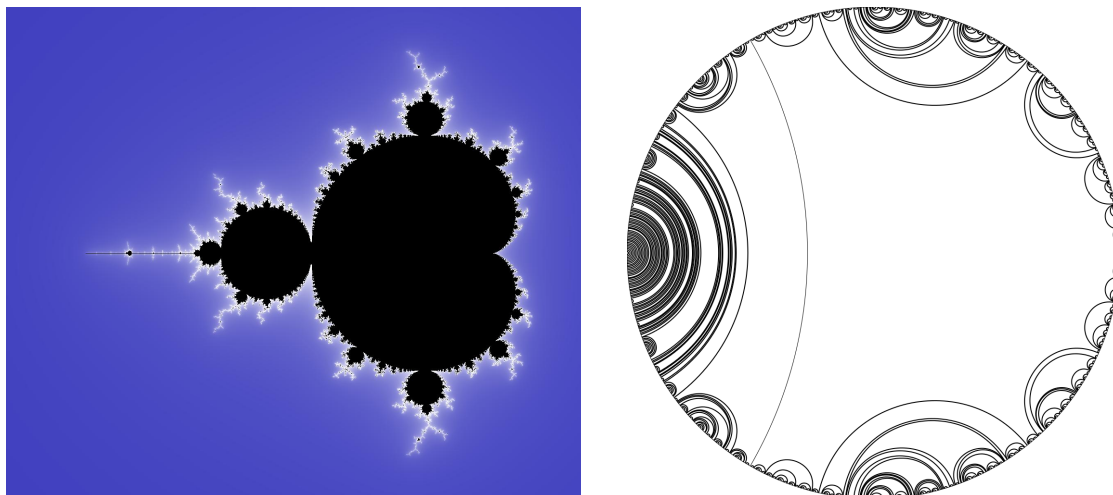


Рис. 3: Слева: множество Мандельброта. Справа: квадратичная минорная ламинация.

4 Голоморфная одномерная динамика

Речь идет о голоморфных эндоморфизмах сферы Римана $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Любой такой эндоморфизм f на самом деле является рациональной функцией, то есть может быть записан очень простой формулой, как отношение двух комплексных многочленов. С другой стороны, при изучении отображения f как динамической системы, т.е. при рассмотрении асимптотических свойств последовательности итераций f^n , более эффективными оказались методы комплексного анализа и топологии, чем методы, основанные на явных алгебраических формулах.

4.1 Множество Мандельброта: алгебраические свойства

Множество Мандельброта — один из самых известных фракталов. Это множество M всех комплексных чисел c , для которых последовательность

$$c, \quad c^2 + c, \quad (c^2 + c)^2 + c, \quad \dots$$

ограниченна. Важная роль множества M состоит в том, что оно служит индикатором динамических свойств отображения $Q_c(z) := z^2 + c$ в зависимости от значения комплексного параметра c : зная, верно ли что $c \in M$, а в последнем случае, в какой части множества M находится точка c , можно многое сказать о динамике отображения Q_c . Заметим также, что всякий квадратный многочлен на $\mathbb{C}$ приводится к виду Q_c подходящим выбором аффинной координаты. Множество Мандельброта очень важно в теории комплексных динамических систем — благодаря явлению ренормализации, оно возникает практически во всех случаях, когда рассматриваются итерации голоморфных отображений, аналитически зависящих от параметра. Как доказали Дуади и Хаббард, множество M связно. Знаменитая гипотеза о том, что M также локально связно, на протяжении многих лет не поддается активным атакам со стороны многих замечательных математиков.

Найдите в интернете интерактивные иллюстрации множества Мандельброта, воспользуйтесь ими, чтобы рассмотреть это множество в разных масштабах. Вы увидите множество интересных закономерностей. Например, на границе множества M много кривых, очень похожих на окружности. Это не настоящие окружности (за одним исключением), а овалы алгебраических кривых высоких степеней. Интересно понять, на какие именно настоящие окружности они похожи, и почему. А еще есть естественное взаимно однозначное отображение дополнения до M на дополнение до замкнутого единичного диска; это отображение раскладывается в ряд по степеням $1/c$ около бесконечности. Интересны арифметические свойства коэффициентов этого ряда.

Литература: [22, 13].

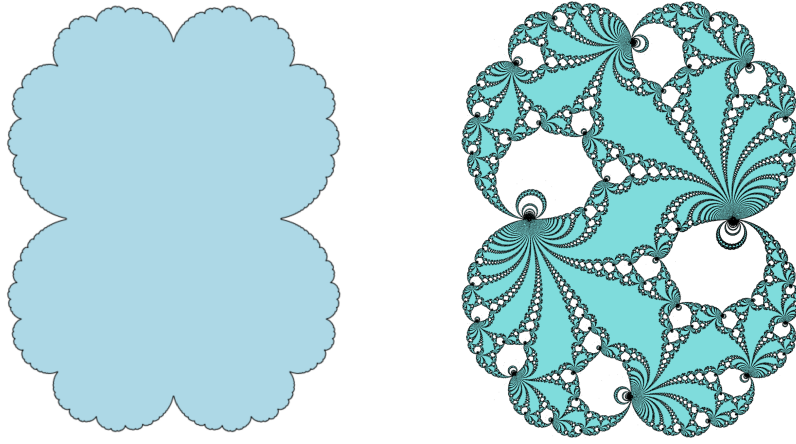


Рис. 4: Слева: «цветная капуста», заполненное множество Жюлиа для $z \mapsto z^2 + \frac{1}{4}$. Справа: пример параболического взрыва внутри «цветной капусты»; автор изображения: Арно Шерита.

4.2 Комбинаторное множество Мандельброта и QML

Тема рекомендована студентам 1–3 курсов.

Если множество M локально связно, то мы знаем про него все. Имеется модель, объясняющая в точности как устроено множество Мандельброта. Эта модель принадлежит В. Терстону и называется *квадратичной минорной ламинацией*.

Квадратичная минорная ламинация QML — это набор непересекающихся хорд и вписанных многоугольников в единичном диске. Этот набор можно описать явно — разберите это явное описание. Если схлопнуть все хорды и все многоугольники в QML, то полученное факторпространство M^c гомеоморфно множеству M — если только последнее локально связно. Пространство M^c называется *комбинаторным множеством Мандельброта*. Во множестве M в изобилии наблюдаются собственные уменьшенные копии (под «копией» имеется в виду гомеоморфная копия, а не точная копия, полученная евклидовым подобием). Это легче всего увидеть на комбинаторном уровне, то есть через самоподобие множества M^c . Само по себе комбинаторное самоподобие — хорошая тема для изучения. К ней примыкают исследовательские задачи. Например, если удалить из M^c замыкание центральной компоненты внутренности, то останутся так называемые *конечности*. Всякая конечность начинается с копии множества M^c , но можно задать такой вопрос: верно ли, что замыкание всей конечности гомеоморфно множеству M^c ?

Литература: [15, 3].

4.3 Модели параболических взрывов

Рассмотрим многочлен $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ степени > 1 . *Заполненное множество Жюлиа* $K(f)$ определяется как множество всех точек $z \in \mathbb{C}$, таких, что $f^{on}(z) \not\rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, а *множество Жюлиа* $J(f)$ — это граница $\partial K(f)$ заполненного множества Жюлиа. Ограничимся теперь рассмотрением *квадратичного семейства*, т.е. семейства многочленов $Q_c(z) = z^2 + c$. Если множество Жюлиа $J(Q_c)$ локально связно, то можно явно построить множество хорд единичного диска (так называемую *инвариантную ламинацию* для Q_c), после стягивания которых в точку получится топологическое пространство, гомеоморфное пространству $J(Q_c)$ (более того, гомеоморфизм уважает динамику). Таким образом, инвариантные ламинации дают комбинаторные и топологические модели для локально связных множеств Жюлиа.

В большинстве случаев сходимость $c_n \rightarrow c$ влечет сходимость $J(Q_{c_n}) \rightarrow J(Q_c)$ в метрике Хаусдорфа. Исключения составляют те случаи, когда у Q_c имеется *параболическая периодическая точка*, то есть такая периодическая точка z с минимальным периодом $p \geq 1$, что производная отображения f^{op} в этой точке — корень из единицы. Простейший пример параметра c , для которого у Q_c имеется параболическая точка — $c_0 = 1/4$; в этом случае параболическая точка неподвижна, а производная в этой точке равна 1. Множество Жюлиа $J(Q_{c_0})$, известное как «цветная

капуста», гомеоморфно окружности, хотя геометрически это сложная фигура, со всюду плотным множеством каспов. Предел множеств Жюлиа $J_n := J(Q_{c_n})$ при $n \rightarrow \infty$ может зависеть от выбора последовательности $c_n \rightarrow c_0$. Этот предел обязательно включает в себя кривую $J(Q_{c_0})$, но может еще содержать точки внутри этой жордановой кривой; этот эффект известен как параболический взрыв (parabolic implosion). Задача: построить (хотя бы гипотетическую) комбинаторную / топологическую модель для предельного множества Жюлиа.

Литература: [10].

Литература

- [1] P. Arnoux. Échanges d'intervalles et flots sur les surfaces. *Ergodic theory (Sem., Les Plans-sur-Bex, 1980)*, pages 5–38, 1981.
- [2] A. Belyi, A. Kanel-Belov, Ph. Rukhovich, and V. Timorin. Aperiodic points for outer billiards. *arXiv preprint arXiv:2311.09643*, 2023.
- [3] A. Blokh, L. Oversteegen, R. Ptacek, and V. Timorin. The combinatorial mandelbrot set as the quotient of the space of geolaminations. *Contemporary Mathematics*, 669:37–62, 2016.
- [4] B. Farb and D. Margalit. *A primer on mapping class groups*, volume 49. Princeton university press, 2011.
- [5] H. Hadwiger and P. Glur. Zerlegungsgleichheit ebener polygone. *Elemente der Mathematik*, 6:97–106, 1951.
- [6] J. H. Hubbard. *Teichmüller theory and applications to geometry, topology, and dynamics*, volume 1. Matrix Editions, 2006.
- [7] A. Khovanskii, V. Kiritchenko, and V. Timorin. Polynomial valuations on plane polygons. *arXiv preprint arXiv:2606.19986*, 2026.
- [8] A. Khovanskii, V. Kiritchenko, and V. Timorin. Valuations on polyhedra and topological arrangements. *arXiv preprint arXiv:2601.03176*, 2026.
- [9] O. Lacourte. *Invariants of some groups of dynamic origin*. PhD thesis, Université de Lyon, 2021.
- [10] H. Peters and L. Vivas. Parabolic implosion. *Notices of the American Mathematical Society*, 67(8), 2020.
- [11] C.-H. Sah. *Hilbert's third problem: scissors congruence*. Pitman, 1979.
- [12] C.-H. Sah. Scissors congruences of the interval. *preprint*, 1981.
- [13] D. Schleicher. Internal addresses of the mandelbrot set and galois groups of polynomials. *Arnold Mathematical Journal*, 3(1):1–35, 2017.
- [14] S. Tabachnikov. On the dual billiard problem. *Advances in Mathematics*, 115(2):221–249, October 1995.
- [15] W. Thurston. On the geometry and dynamics of iterated rational maps. In Dierk Schleicher, editor, *Complex dynamics: families and friends*, chapter 1, pages 1–108. A K Peters, 2009.
- [16] V. Timorin. Topological regluing of rational functions. *Inventiones mathematicae*, 179(3):461–506, 2010.
- [17] В. Г. Болтянский, Г. Хадвигер, Ж.-П. Зидлер, П. Глур. Новые работы о равноставленности многоугольников и многогранников. *Математическое просвещение*, 2(0):263–265, 1957.
- [18] В. Г. Болтянский. *Равновеликие и равноставленные фигуры*. Мир, Москва, 1981.
- [19] Я. Б. Воробец. О коммутанте группы перекладываний отрезков. *Труды Математического института имени ВА Стеклова*, 297(0):313–325, 2017.

- [20] Д. Гильберт. *Основания геометрии*. ОГИЗ Гостехиздат, 1948.
- [21] Ф. Догру and С. Л. Табачников. Внешние бильярды. In Б. Р. Френкин, editor, *Летние конференции Турнира городов. Избранные материалы*, volume 1, chapter 3, pages 28–47. 2009.
- [22] Х.-О. Пайтген and П. Х. Рихтер. *Красота фракталов: Образы комплексных динамических систем*. Мир, Москва, 1993.
- [23] Ф. Д. Рухович. Внешние билиарды вне правильных многоугольников: ручной случай. *Известия Российской академии наук. Серия математическая*, 86(3):105–160, 2022.
- [24] С. Л. Табачников. Внешние билиарды. *Успехи математических наук*, 48(6 (294):75–102, 1993.
- [25] С. Л. Табачников. Внешний билиард. *Математическое просвещение*, 5(0):125–135, 2001.