

Гонцов Ренат Равилевич

rgontsov@hse.ru

1 Цепные дроби и малые знаменатели

Тема рекомендована студентам 1–2–3 курсов.

В первом домашнем задании по математическому анализу есть задача о приближении любого иррационального числа α рациональной последовательностью $(p_n/q_n)_n \subset \mathbb{Q}$ со скоростью $1/q_n^2$:

$$|\alpha - p_n/q_n| \leq 1/q_n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Предлагается ознакомиться с понятием цепной дроби по книге [1] и с помощью аппарата цепных дробей изучить другие возможные ситуации, связанные со скоростью приближения иррациональных чисел рациональными.

Данное исследование может иметь продолжение (2–3 курсы) в контексте изучения явления *малых знаменателей*, возникающего, например, в известной задаче о линеаризации комплексного диффеоморфизма $f(z) = qz + \dots$ (ростка) окрестности нуля $(\mathbb{C}, 0)$ с показателем q линейной части, по модулю равным единице: $q = e^{2\pi i \omega}$, $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Возможность такой линеаризации означает существование взаимно-однозначной голоморфной замены переменной $y : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, приводящей f к своей линейной части:

$$y^{-1} \circ f \circ y(z) = qz \iff y(qz) = f(y(z)) \quad (q\text{-разностное уравнение Шрёдера}).$$

Предлагается изучить теоремы Зигеля [2] и Брюно [3] (имеется изложение в сокращённом варианте – [4]) о возможности линеаризации f при условии, что число ω приближается рациональными определённым образом, а также теорему Йоккоза [5], [6] о том, что условие Брюно является не только достаточным, но и необходимым для того чтобы *каждый* диффеоморфизм f с линейной частью qz был линеаризуем.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] А. Я. Хинчин, Цепные дроби. М.: Гостехиздат, 1949.
- [2] C. L. Siegel, Iteration of analytic functions, *Ann. Math.* **43**:4 (1942), 607–612.
- [3] А. Д. Брюно, Аналитическая форма дифференциальных уравнений, *Тр. ММО* **25** (1971), 119–262.
- [4] J.-C. Yoccoz, A proof of the Siegel–Brjuno theorem, *3-pages-note*.
- [5] J.-C. Yoccoz, Linéarisation des germes de difféomorphismes holomorphes de $(\mathbb{C}, 0)$, *C. R. Acad. Sci. Paris* **306** (1988), 55–58.
- [6] J.-C. Yoccoz, Théorème de Siegel, nombres de Bruno et polynômes quadratiques, *Astérisque* **213** (1995), 1–88.

2 Пополнение неархимедова поля $\mathbb{R}(x)$ рациональных функций

Тема рекомендована студентам 1–2 курсов.

Первые занятия по математическому анализу посвящены упорядоченным полям и аксиоме непрерывности, с помощью которой определяется поле $\mathbb{R}$ вещественных чисел. Поясняется также, что выполнение аксиомы непрерывности эквивалентно одновременному выполнению двух аксиом — аксиомы Архимеда и аксиомы о вложенных отрезках. Привести пример архимедова поля, в котором аксиома о вложенных отрезках не выполнена, несложно — например, это поле $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. А вот нахождение примера неархимедова поля с аксиомой о вложенных отрезках является более сложной задачей. Единственный пример неархимедова поля, который обсуждается на занятиях, это поле $\mathbb{R}(x)$ рациональных функций с отношением порядка

$$P > Q \quad \Longleftrightarrow \quad P - Q > 0,$$

при этом положительными рациональными функциями $(a_mx^m + \dots + a_0)/(b_nx^n + \dots + b_0)$ являются те, у которых отношение a_m/b_n старших коэффициентов положительно. В таком поле, однако, аксиома о вложенных отрезках также не выполнена.

Для сравнения рациональных функций удобнее использовать их представление в виде рядов Лорана:

$$R(x) = \frac{a_mx^m + \dots + a_0}{b_nx^n + \dots + b_0} = \sum_{k \leq m-n} c_k x^k, \quad c_{m-n} = a_m/b_n.$$

Положительность элемента R при такой записи эквивалентна положительности старшего коэффициента c_{m-n} его ряда Лорана. Поиск примера неархимедова поля с аксиомой о вложенных отрезках, по-видимому, можно искать с помощью *пополнения* поля $\mathbb{R}(x)$, приводящего к полю рядов Хана $\sum_{k \geq 1} c_k x^{\lambda_k}$ с *вещественными* показателями степени λ_k , убывающими к $-\infty$. Предлагается изучить основные свойства такого поля и исследовать его полноту, см. [1] и фрагменты в [2].

ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Robinson, Function theory on some nonarchimedean fields, *Amer. Math. Monthly*, **80**:6 (1973), 87–109.

[2] A. Ostrowski, Untersuchungen zur arithmetischen Theorie der Körper, I, II, III, *Math. Z.*, **39**:1 (1935), 269–404.

3 Неопределённые интегралы, неберущиеся в элементарных функциях

Тема рекомендована студентам 2–3 курсов.

В курсе математического анализа обращают внимание на то, что неопределённые интегралы от большинства элементарных функций не выражаются в элементарных функциях. Например, как объяснить неэлементарность интеграла $\int e^{x^2} dx$? Теорема Лиувилля утверждает, что интеграл от элементарной функции, если он элементарен, имеет относительно простой вид. Предлагается разобрать доказательство этой теоремы и некоторые конкретные примеры неэлементарных интегралов по работам [1], [2], [3, гл.1] (см. также исторический обзор [4]).

Исследовательская часть работы может заключаться в применении теоремы Лиувилля к доказательству теоремы П. Л. Чебышёва об интегралах вида $\int x^p(a + bx^r)^q dx$, $p, q, r \in \mathbb{Q}$, $a, b \neq 0$, которая утверждает, что при $r \neq 0$ такие интегралы выражаются в элементарных функциях, если и только если среди чисел q , $(p+1)/r$, $q + (p+1)/r$ найдётся целое.

Последняя теорема относится к общему вопросу об элементарности интегралов от алгебраических функций. Если риманова поверхность X алгебраической кривой $P(z, w) = 0$, определяющей алгебраическую функцию $w = w(z)$, имеет род 0, то интегралы вида $\int R(z, w) dz$, где R — рациональная функция, всегда выражаются в элементарных функциях, например, в силу существования рациональной параметризации $z = z(t)$, $w = w(t)$ кривой. В общем случае поверхности

положительного рода такие интегралы, как правило, не элементарны. Свойства поверхностей X и мероморфных 1-форм $R(z, w)dz$ на них, которые определяют необходимые и достаточные условия элементарности соответствующих интегралов, получены в терминах главных и почти главных дивизоров (см. [3, гл.1]), и задача эффективизации этих результатов может стать продолжением исследований по данной теме (3-й курс).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] В. В. Прасолов, Неэлементарность некоторых интегралов элементарных функций, *Матем. просвещение*, **3:7** (2003), 126–135.
- [2] M. Rosenlicht, Integration in finite terms, *Amer. Math. Monthly*, **79:9** (1972), 963–972.
- [3] А. Г. Хованский, Топологическая теория Галуа. Разрешимость и неразрешимость уравнений в конечном виде, М.: МЦНМО, 2008.
- [4] M. F. Singer, Comments on Rosenlicht's *Integration in finite terms*, In: C. G. Raab und M. F. Singer (Hrsg.), *Integration in Finite Terms: Fundamental Sources*, Texts & Monographs in Symbolic Computation, Springer, 2022, 11–30.
- [5] Н. Г. Чеботарёв, Теория алгебраических функций, М.-Л.: Гостехтеоретиздат, 1948; М.: УРСС, 2007.

4 Теорема о неявном отображении для банаховых пространств и её применения

Тема рекомендована студентам 2 курса.

В конце курса математического анализа доказывается теорема о неявной функции — утверждение о локальной разрешимости уравнения $f(x, y) = 0$ относительно переменной y в окрестности U точки $(x_0, y_0) \in U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, где $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, удовлетворяющая некоторым условиям дифференцируемости (каждое из одномерных пространств $\mathbb{R}$ может быть заменено на многомерное). Оказывается, эта теорема имеет обобщение и на случай отображения $F : \mathcal{E} \times \mathcal{G} \supset U \rightarrow \mathcal{H}$, где $\mathcal{E}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ — (бесконечномерные) банаховы пространства.

Предлагается изучить это обобщение (см. [1, теор. 10.2.1], [2, гл. X, §2, п.1]), а также такие его применения как доказательство теоремы Коши существования и единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения в гладком и аналитическом случаях. Традиционно теорема Коши доказывается с помощью теоремы о неподвижной точке сжимающего отображения (в гладком случае) или с помощью метода мажорантных рядов (в аналитическом случае), доказательство же с помощью теоремы о неявном отображении для банаховых пространств менее известно, но не менее интересно и полезно. Изучить его можно в гладком случае по работам [3], [4], а в аналитическом случае все необходимые для доказательства идеи содержатся в [5].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ж. Дьедонне, Основы современного анализа, М: Мир, 1964.
- [2] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа, 7-е изд., М.: Физматлит, 2006.
- [3] J. W. Robbin, On the existence theorem for differential equations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **19** (1968), 1005–1006.
- [4] Р. Р. Гонцов, Теорема о неявном отображении и дифференциальные уравнения, Труды XI Приокской научной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы математики" (Коломна, 21-22 июня 2019), 47–53.
- [5] B. Malgrange, Sur le théorème de Maillet, *Asympt. Anal.* **2:1** (1989), 1–4.

5 Суммируемость расходящихся степенных рядов

Тема рекомендована как методическая работа для студентов 3–4 курсов.

Основы теории суммируемости расходящихся степенных рядов (рядов с нулевым радиусом сходимости) были заложены Ж.-П. Рамисом в 1970–80-х годах и позволили добиться фундаментальных результатов, среди прочего, в аналитической теории дифференциальных уравнений. Конспект лекций Ж.-П. Рамиса в изложении Л. Столовича [1], наряду с учебником В. Бальзера [2], является базовым источником по данной тематике, но, в отличие от последнего, находится в состоянии неотредактированном и не лишённом некоторых пробелов в изложении. Редактирование этого конспекта (с обращением, при необходимости, к [2]) станет важной методической работой, также и просто полезной для изучения основ теории суммируемости.

ЛИТЕРАТУРА

[1] J.-P. Ramis, Divergent series and holomorphic dynamical systems, *lecture notes written down by L. Stolovitch*, 1993.

[2] W. Balser, From divergent power series to analytic functions, Springer-Verlag, 1994.

6 Уравнение Малера и его формальные решения

Тема рекомендована студентам 2–3–4 курсов.

6.1 Теорема Адамчевского–Белла

Формальное решение $\sum_{k \geq 1} c_k z^k$ линейного уравнения Малера

$$a_0(z)y(z) + a_1(z)y(z^\ell) + \dots + a_{n-1}(z)y(z^{\ell^{n-1}}) + y(z^{\ell^n}) = b(z), \quad a_i, b \in \mathbb{C}(z), \quad \ell \in \mathbb{N}_{\geq 2},$$

обладает интересными свойствами. Во-первых, такой ряд имеет ненулевой радиус сходимости. При этом, если он также удовлетворяет и алгебраическому уравнению, то представляет рациональную функцию (рационально-трансцендентная дихотомия); то же останется верным, если алгебраическое уравнение заменить на линейное ОДУ с полиномиальными коэффициентами (см. [1]). Также согласно теореме Адамчевского–Белла такой степенной ряд будет представлять рациональную функцию, если он удовлетворяет двум разным линейным уравнениям Малера (с разными мультипликативно независимыми ℓ_1, ℓ_2). Оригинальное доказательство этой теоремы достаточно сложное, но есть и её более простое аналитическое доказательство [2], использующее, в частности, результаты из теории линейных q -разностных уравнений. Его и предлагается разобрать в качестве темы курсовой работы.

Останется ли справедливым утверждение теоремы Адамчевского–Белла в случае, если одно из уравнений Малера — нелинейное,

$$F(z, y(z), y(z^\ell), \dots, y(z^{\ell^n})) = 0? \quad (1)$$

Или, более общо, можно ли утверждать, что степенной ряд, удовлетворяющий двум разным (нелинейным) уравнениям Малера, представляет алгебраическую функцию?

6.2 Сходимость формальных решений

Не только формальное решение $\sum_{k \geq 1} c_k z^k$ линейного уравнения Малера имеет ненулевой радиус сходимости, это верно и для формального решения нелинейного уравнения Малера общего вида (1), где F — аналитическая функция $n+2$ переменных (в окрестности $0 \in \mathbb{C}^{n+2}$), см., например, [3]. Предлагается подумать над справедливостью аналогичного утверждения для (векторного) формального решения $\sum_{k \geq 1} \mathbf{c}_k z^k$, $\mathbf{c}_k \in \mathbb{C}^p$, системы уравнений Малера:

$$\mathbf{F}(z, \mathbf{y}(z), \mathbf{y}(z^\ell)) = 0,$$

где $\mathbf{F}$ — аналитическое отображение окрестности точки $0 \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^p$ в окрестность точки $0 \in \mathbb{C}^p$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] J. P. Bell, M. Coons, E. Rowland, The rational-transcendental dichotomy of Mahler functions, *J. Integer Seq.* **16** (2013), 13.2.10, 11pp.
- [2] R. Schäfke, M. Singer, Mahler equations and rationality, *arXiv: 1605.08830v2* (2017), 7pp.
- [3] R. Gontsov, I. Goryuchkina, On the existence and convergence of formal power series solutions of nonlinear Mahler equations, *J. Symb. Comput.* **128** (2025), 102399.

7 Изомонодромное слияние фуксовых особых точек линейной системы ОДУ

Тема рекомендована студентам 2–3 курсов.

Прежде всего, предполагается изучить такие базовые понятие из теории линейных систем ОДУ в комплексной области как фуксова особая точка, регулярная и иррегулярная особые точки, монодромия, изомонодромная деформация [1], [2].

Говорят, что для изомонодромного семейства фуксовых систем

$$\frac{dy}{dz} = B(z, a)y, \quad B(z, a) = \sum_{i=1}^n \frac{B_i(a)}{z - a_i} \quad (1)$$

(y — вектор неизвестных, B — матрица коэффициентов) имеет место *изомонодромное слияние* его особенностей $a_1, \dots, a_k$ в одну особую точку x , если матрица $B(z, a)$ имеет предел $B_0(z)$ при $a_1, \dots, a_k \rightarrow x$. Вообще говоря, (многозначные) матрицы-вычеты $B_i(a)$ имеют ветвление вдоль множества $\{a_1 = \dots = a_k\}$, поэтому для корректного определения такого предела необходимо предположить, что каждая точка a_i подходит к x , оставаясь внутри своего собственного открытого сектора S_i с вершиной x , $i = 1, \dots, k$, так что замыкания непересекающихся секторов $S_1, \dots, S_k$ образуют покрытие окрестности точки x .

Если матрицы-вычеты $B_i(a)$ определены при $\{a_1 = \dots = a_k = x\}$ (обозначим их значения на этой плоскости через $\tilde{B}_i(x, a')$, где $a' = (a_{k+1}, \dots, a_n)$), то слияние очевидно определено и его результатом является фуксова система с матрицей коэффициентов

$$\lim_{a_1, \dots, a_k \rightarrow x} B(z, a) = \frac{\sum_{i=1}^k \tilde{B}_i(x, a')}{z - x} + \sum_{i=k+1}^n \frac{\tilde{B}_i(x, a')}{z - a_i}.$$

Интересно подумать над примером изомонодромного слияния фуксовых особенностей, результатом которого является система с фуксовой особой точкой $z = x$, но при этом некоторые из матриц-вычетов $B_i(a)$ исходного семейства не определены при $\{a_1 = \dots = a_k = x\}$.

Если в результате изомонодромного слияния $a_1, \dots, a_k \rightarrow x$ фуксовых особенностей дополнительно *изомонодромная* фундаментальная матрица $Y(z, a)$ изомонодромного семейства (1) стремится к некоторой фундаментальной матрице предельной системы $y' = B_0(z)y$, то такое изомонодромное слияние называют *нормализованным*. Согласно теореме А. А. Болибруха [3], особая точка $z = x$ предельной системы, полученная в результате нормализованного изомонодромного слияния фуксовых особенностей, не может быть иррегулярной. Предлагается разобрать доказательство этой теоремы, а также подумать над существованием примера *ненормализованного* изомонодромного слияния фуксовых особенностей, результатом которого является система с *иррегулярной* особой точкой $z = x$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] А. А. Болибрух, Обратные задачи монодромии в аналитической теории дифференциальных уравнений, М.: МЦНМО, 2009.

[2] Р. Р. Гонцов, В. А. Побережный, Изомонодромность локальная и глобальная, Труды XIII Приокской научной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы математики" (Коломна, 18-19 июня 2021), 67–84.

[3] А. А. Болибрух, Об изомонодромных слияниях фуксовых особенностей, *Труды МИАН* **221** (1998), 127–142.

8 Особые точки дифференциальных уравнений

Тема рекомендована студентам 2–3 курсов.

Курсовая работа по одноимённой статье Б. Мальгранжа [1]. Почти каждый параграф этой фундаментальной статьи, раскрывающей взаимосвязи функционального анализа, алгебры, дифференциальных уравнений, можно взять в качестве отдельной темы. Так, параграфы 1-3 и 5-6 посвящены объяснению эквивалентности различных подходов к описанию особых точек дифференциальных уравнений и систем (аналитических или формальных) в комплексной области, в параграфах 7-9 излагается важная теорема Кузнецова–Мальгранжа (см. также [2]) о связи между существованием формального и бесконечно дифференцируемого решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности её особой точки в вещественном случае.

ЛИТЕРАТУРА

[1] B. Malgrange, Sur les points singuliers des équations différentielles, *Enseign. Math.* **20** (1974), 147–176.

[2] А. Н. Кузнецов, Дифференцируемые решения вырождающихся систем обыкновенных уравнений, *Функц. анализ и его прил.* **6:2** (1972), 41–51.