

Евклидовы кольца

- АЛ2♦1.** Ненулевые остатки от деления квадратов целых чисел на простое число $p > 2$ называют *квадратичными вычетами по модулю p* . Все другие ненулевые остатки – квадратичные невычеты. Докажите что, существует $(p-1)/2$ квадратичных вычета и ровно столько же квадратичных невычетов по модулю p .
- АЛ2♦2 (Целые гауссовы числа).** Покажите, что $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib | a, b \in \mathbb{Z}, i^2 = -1\}$ евклидово кольцо с обычными операциями сложения и умножения комплексных чисел и нормой $\|z\| = z\bar{z}$. Проверьте, что норма мультипликативна, а именно для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[i]$ верно, что $\|z_1 z_2\| = \|z_1\| \|z_2\|$. Найдите все обратимые элементы в $\mathbb{Z}[i]$.
- АЛ2♦3.** Покажите, что любое простое в $\mathbb{Z}[i]$ делит простое натуральное число. Какая может быть норма у простого гауссова числа?
- АЛ2♦4.** Покажите, что для простого $p \in \mathbb{Z}[i]$ фактор кольцо $\mathbb{Z}[i]/(p)$ это поле. Какая характеристика этого поля? Сколько элементов в этом поле?
- АЛ2♦5.** Докажите, что все простые натуральные число вида $p = 4k + 3$, где k – натуральное, остаются неприводимыми в кольце целых Гауссовых числах.
- АЛ2♦6.** Покажите, что для любого простого числа $p = 4n + 1$, где $n \in \mathbb{N}$, существует такое целое число m , что $m^2 + 1$ кратно p .
- АЛ2♦7.** Докажите, что простое натуральное число вида $p = 4n + 1$, где $n \in \mathbb{N}$, раскладывается в кольце целых Гауссовых чисел в произведение двух неприводимых.
- АЛ2♦8.** Докажите, что натуральное число представимо в виде суммы двух квадратов целых чисел тогда и только тогда, когда все простые натуральные числа вида $4k + 3$ входят в его разложение на простые множители в четной степени.
- АЛ2♦9* (Целые числа Эйзенштейна).** Покажите, что $\mathbb{Z}[w] = \{a + wb | a, b \in \mathbb{Z}, w = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})\}$ евклидово кольцо с обычными операциями сложения и умножения комплексных чисел и нормой $\|z\| = z\bar{z}$. Проверьте, что норма мультипликативна, а именно для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[w]$ верно, что $\|z_1 z_2\| = \|z_1\| \|z_2\|$. Найдите все обратимые элементы в $\mathbb{Z}[w]$.
- АЛ2♦10*.** Для $w = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$ найдите многочлен $F \in \mathbb{Z}[x]$ минимальной степени со старшим коэффициентом 1 такой, что $F(w) = 0$.
- АЛ2♦11*.** Покажите, что любое простое в $\mathbb{Z}[w]$ делит простое натуральное число. Какая может быть норма у простого числа Эйзенштейна?
- АЛ2♦12.** Покажите, что $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + \sqrt{2}b | a, b \in \mathbb{Z}\}$ евклидово кольцо с обычными операциями сложения и умножения действительных чисел и нормой $\|a + \sqrt{2}b\| = |(a + \sqrt{2}b)(a - \sqrt{2}b)|$. Проверьте, что норма мультипликативна, а именно для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ верно, что $\|z_1 z_2\| = \|z_1\| \|z_2\|$. Найдите обратимый элемент бесконечного порядка в $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.
- АЛ2♦13.** Покажите, что $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + \sqrt{-5}b | a, b \in \mathbb{Z}\}$ коммутативное кольцо с единицей с обычными операциями сложения и умножения комплексных чисел. Найдите все обратимые элементы в $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Докажите, что в этом кольце любой элемент раскладывается в произведение неприводимых, но это разложение возможно не единственно. Приведите пример неоднозначного разложения.
- АЛ2♦14*.** Покажите, что $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}] = \{a + \sqrt{-3}b | a, b \in \mathbb{Z}\}$ коммутативное кольцо с единицей с обычными операциями сложения и умножения комплексных чисел. Найдите все обратимые элементы в $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$. Докажите, что в этом кольце любой элемент раскладывается в произведение неприводимых, но это разложение возможно не единственно. Приведите пример неоднозначного разложения.

Список литературы

- [1] Сендеров В. А., Спивак А. В. Суммы квадратов и целые гауссовы числа // Квант. — 1999. — № 3. — С. 14—22.

https://www.kvant.digital/issues/1999/3/senderov_spivak-summyi_kvadratov_i_tselyie_gaussovyi_chisla-716e2a3c/