

Басалаев Алексей Андреевич

Темы курсовых работ

abasalaev@hse.ru

1 Классификация квазиоднородных особенностей

кому: начиная со 1о курса

Предлагается изучать/строить классификацию квазиоднородных многочленов $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, для которых множество $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n \mid \partial_{x_1} f = \dots = \partial_{x_n} f = 0\}$ изолировано. Примеры следующие:

$$f = x_1^p, \quad f = x_1^p + x_1 x_2^2, \quad f = x_1^{a_1} x_2 + x_2^{a_2} x_3 + x_3^{a_4}.$$

При $n \leq 3$ такая классификация дана полностью (есть в книге В.И. Арнольд, С.М. Гусейн-Заде, А.Н. Варченко “Особенности дифференцируемых отображений”, том 1).

Для большего числа переменных те же методы уже неэффективны и нужны новые подходы. Моя идея состоит в том, что можно продолжать классификацию по группам симметрий. Определим:

$$G_f := \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \mid f(\alpha_1 x_1, \dots, \alpha_n x_n) = f(x_1, \dots, x_n)\}.$$

Эта группа всегда содержит больше одного элемента. Среди всех многочленов как выше выделены, так называемые, “обратимые многочлены”. Это некоторый специальный класс, для него группа G_f в определенном смысле максимальна. Надо выделить новые классы с учетом групп симметрий.

Литература: Basalaev, Ionov - “Hodge Diamonds of the Landau-Ginzburg Orbifolds” - вполне несложный текст.

2 Простые особенности: особенности типа ADE

кому: начиная со 2о курса

В данном проекте рассматриваются исключительно многочлены $f_{A_n} := x^{n+1} + y^2 + z^2$, $f_{D_n} := x^{n-1} + xy^2 + z^2$, $f_{E_6} := x^4 + y^3 + z^2$, $f_{E_7} := x^3 y + y^3 + z^2$ или же $f_{E_8} := x^5 + y^3 + z^2$ для разных значений n . Для любого такого многочлена f_W рассмотрим множество $X := f_W^{-1}(0)$. Оно не будет гладким многообразием, а будет, напротив, особым. В рамках данного проекта надо будет изучить вопрос “разрешения” имеющихся на X особенностей. Также множество X будет идентифицировано с фактором $\mathbb{C}^2/G$ для некоторой конечной подгруппы $G \subset \mathrm{SU}(2)$. Данный проект может быть рассмотрен как плавное введение в такие концепции алгебраической геометрии, как, например, раздутие.

Литература: Durfee, Alan H. (1979). “Fifteen characterizations of rational double points and simple critical points”. L’Enseignement mathématique. IIe Série. 25 (1). 131–163. doi:10.5169/seals-50375

3 Квазиоднородные особенности с симметриями

кому: начиная со 1о курса

В работе Basalaev, Ionov - “Hodge Diamonds of the Landau-Ginzburg Orbifolds” изучаются пары (f, G) , где f - квазиоднородный многочлен как выше, а G - некая его группа симметрий. Можно думать, что $G \subseteq G_f$, но, вообще говоря, и более общо. Например, у $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ симметрическая группая S_3 тоже является группой симметрий, а бывают и более забавные примеры.

Так вот, в этой работе был выделен специальный класс многочленов (Раздел 3.6 - назвали их “star-shaped”), для которого все пришлось доказывать отдельно и специально. Отсюда вопрос - а чего такого специального в таких многочленах? что за специальные особенности он задает?

Вообще, вся эта работа была сделана только с условием Калаби-Яу (CY condition, определено в самом начале раздела 3.6). Но осталось непонятным, так ли это важно?! Без него, конечно, кое-что ломается, но явно не все. Интересно разобрать точно, где оно важно, а где нет. С контрпримерами, где важно.

4 Топология и алгебра изолированных особенностей

кому: начиная со 2о курса

Надо перевести на русский язык полупубликованный текст С. Hertling’а Билинейные и эрмитовы формы особенностей: обзор. Это очень полезная работа, так как позволит много чему научиться. Собственно, переводить сейчас - совершенно не проблема, а, вот, изучить и понять - это надо будет потрудиться. Собственно, это не самая простая работа, но весьма полезная и востребованная - даст полезные новые навыки и точно публикацию.

5 Локальная алгебра особенности

кому: начиная со 2о курса

Предлагается изучить алгебраический инвариант изолированной особенности f - её локальную алгебру $\text{Jac}(f)$. Данный объект обладает богатой структурой играет важную роль в гипотезе зеркальной симметрии. Для данной задачи возможно исследовательское продолжение - классификация локальных алгебр особенностей с симметриями. Материалы: книга В.И. Арнольд, С.М. Гусейн-Заде, А.Н. Варченко “Особенности дифференцируемых отображений”.

Современная наука потребовала продолжить этот классический инвариант с учетом групп симметрий - теперь для пар (f, G) . Получились алгебры $\text{Jac}(f, G)$. Они уже строятся с помощью несложной гомологической алгебры. Если не вдаваться глубоко, остается, вообще, комбинаторика. Эти алгебры строили Вернер, Такахаша, Шкляров, Басалаев.

Здесь полезно изучить гомологическую сторону вопроса - это работу Shklyarov On Hochschild invariants of Landau-Ginzburg orbifolds. Собственно, он считает когомологии Хохшильда

Но можно обойтись и без этого и сразу перейти дальше, только используя результаты работы выше. Тогда есть два вопроса. Эта же алгебра определялась Basalaev, Takahashi, Werner - Orbifold Jacobian algebras for invertible polynomials. Там дано определение аксиоматическое. Надо проверить, что все эти аксиомы выполнены для алгебры Шклярова - в когомологиях Хохшильда.

Второй вопрос следующий. Для специального класса многочленов - обратимых - было установлено, что алгебра $\text{Jac}(f, G)$ имеет простую структуру (Proposition 35 из Basalaev-Takahashi-Werner). Исключительно интересно, для каких еще многочленов это свойство выполнено. Это хороший шаг к классификации квазиоднородных особенностей и может быть вполне публикуемо.

6 Фробениусовы структуры простых особенностей

кому: начиная со 2о курса

Обозначим за $e_1, \dots, e_n$ стандартные базисные вектора $\mathbb{C}^n$. С помощью любого многочлена f_W из предыдущего списка можно определить ассоциативное и коммутативное умножение $e_i \circ e_j$:

$$e_i \circ e_j = \sum_{k=1}^n c_{i,j}^k e_k.$$

В частности, для $f_{A_n} = x^{n+1} + y^2 + z^2$ можно рассмотреть естественное факторкольцо

$$\mathcal{L}_f := \mathbb{C}[x, y, z]/(\partial_x f, \partial_y f, \partial_z f) \cong \mathbb{C}[x]/\partial_x f \cong \mathbb{C}[x]/x^n.$$

Такое факторкольцо является в точности n -мерным $\mathbb{C}$ -векторным пространством $\mathbb{C}\langle 1, [x], \dots, [x^{n-1}] \rangle$. Сопоставляя вектору $e_k \in \mathbb{C}^n$ вектор $[x^{k-1}] \in \mathcal{L}_f$ мы получим изоморфизм векторных пространств $\Psi : \mathbb{C}^n \cong \mathcal{L}_f$. В то же время на $\mathcal{L}_f$ есть естественное умножение, т.к. это факторкольцо $[x^a][x^b] = [x^{a+b}]$ если $a+b < n$ и $[x^a][x^b] = 0$ если $a+b \geq n$. Благодаря изоморфизму Ψ это умножение может быть использовано для того, чтобы определить умножение векторов $\mathbb{C}^n$: $e_i \circ e_j = e_{i+j}$ если $i+j < n$ и $e_i \circ e_j = 0$ иначе. То есть $\mathbb{C}^n$ будет снабжено структурой алгебры.

Данная конструкция может быть проведена в любом многочленов f_W из предыдущего пункта. Деформируя многочлен f_W с помощью переменных, $c_{i,j}^k$, которые, собственно, и задают умножение, будут тоже зависеть от переменных. Таким образом мы получим целое семейство алгебр, которые в том числе будут обладать и некоторыми специальными свойствами.

В данном проекте мы изучим получаемые структуры алгебр на простых примерах. Такие структуры называются фробениусовыми и являются ключевыми объектами зеркальной симметрии.

7 Многообразия с умножением

Тема рекомендована студентам 3–4 курсов и магистрантам.

Предлагается изучить многообразия с дополнительной структурой — структурой умножения в касательном пространстве. Данная тема очень обширна, многие такие многообразия строятся естественным образом по многочленам, задающим изолированные особенности, а также по потенциалам теории Громова-Виттена. К исследуемым многообразиям относятся (но не исключительно) F-многообразия и фробениусовы многообразия, с помощью которых формулируется гипотеза зеркальной симметрии.

Материалы: часть 1 книги С.Hertling “Frobenius manifolds and moduli spaces of singularities”.