

Задачи к семинарам. Список без номера.

Элементы комбинаторики.

Не все задачи из этого списка будут обязательно разбираться на семинаре, некоторые задачи могут быть оставлены для самостоятельного решения.

- (1) Сколько существует натуральных чисел, не превосходящих 1000, которые делятся на 3? На 5? На 15? Не делятся ни на 3, ни на 5?
- (2) Сколько существует целых чисел от 1 до 1 000 000, которые не являются ни полным квадратом, ни полным кубом, ни четвертой степенью целого числа?
- (3) Имеются: 4 попарно отличающиеся друг от друга чашки, 4 совершенно одинаковых гранёных стакана, 7 совершенно одинаковых кусков сахара, 7 попарно отличающиеся друг от друга соломинок и 7 попарно отличающиеся друг от друга пакетиков чая. Найдите, сколькими способами можно разложить:
а) по 1 пакету чая в каждый стакан; б) по 1 пакету чая в каждую чашку;
в) все соломинки по чашкам; г) весь сахар по чашкам;
д) весь сахар по стаканам; *е) все соломинки по стаканам.
- (4) Сколькими способами можно
а) разбить $2n$ человек на пары? б) разбить $3n$ человек на тройки?
в) расставить n человек в хоровод?
г) составить из $2n$ человек два хора по n человек в каждом?
д) составить из $3n$ человек три хора по n человек в каждом?
- (5) Сколько целых неотрицательных решений имеет уравнение $k_1 + \dots + k_m = n$ ($m, n \in \mathbb{N}$ фиксированы, k_i — неизвестные)?
- (6) Сколькими способами можно представить число $n \in \mathbb{N}$ в виде суммы произвольного числа натуральных слагаемых? (Представления, отличающиеся порядком слагаемых, считаются различными.) Попробуйте придумать решение, не использующее суммирование ответов к предыдущей задаче.
- (7) а) Сколько имеется различных одночленов степени d от n переменных?
б) Сколько имеется различных одночленов степени d от n переменных, в которых каждая переменная входит в ненулевой степени?
- (8) Используя формулу бинома, вычислите суммы
а) $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$; б) $\sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k}$; в) $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$.
- (9) Предложите чисто комбинаторные доказательства тождеств:
а) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$; б) $\sum_{r=0}^k \binom{n-r-1}{k-r} = \binom{n}{k}$
- (10) Докажите следующие тождества:
а) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$. б) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} = 0$.
в) $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots + \binom{n}{2[\frac{n}{2}]}$ г) $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \dots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$.

$$\begin{aligned} \text{д)} \quad & \binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \dots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}. \\ \text{е)} \quad & \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \dots + \binom{n - [\frac{n}{2}]}{[\frac{n}{2}]} = f_n - n\text{-ое число Фиббоначи}^1. \\ \text{ж)} \quad & \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}. \end{aligned}$$

(11) Докажите формулу полинома

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{\substack{k_1, k_2, \dots, k_m \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_m = n}} \frac{n!}{k_1! \dots k_m!} x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m}.$$

(12) Будем называть ряды чисел в треугольнике Паскаля, параллельные его боковым сторонам, правыми или левыми диагоналями, в зависимости от того какой из боковых сторон они параллельны.

а) Докажите, что каждое число a в треугольнике Паскаля равно сумме чисел предыдущей правой диагонали, начиная с самого левого вплоть до стоящего справа над числом a . Запишите это утверждение в виде формулы и сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для левой диагонали.

б) Докажите, что каждое число a в треугольнике Паскаля, уменьшенное на 1, равно сумме всех чисел, заполняющих параллелограмм, ограниченный теми правой и левой диагоналями, на пересечении которых стоит число a (сами эти диагонали в рассматриваемый параллелограмм не включаются).

(13) Рассмотрим пути на клетчатой бумаге, идущие по ее линиям вправо или вверх.

а) Сколько таких путей, ведущих из начала координат в точку (m, n) ? ($m, n \geq 0$.)

б) Разобьем пути из начала координат в точку (m, n) на два класса. В первый отнесем пути, у которых первый участок горизонтальный; во второй — у которых первый участок пути вертикальный. Какое тождество на биномиальные коэффициенты получится?

в) Тот же вопрос про разбиения множества путей на $(m+1)$ классов в зависимости от того, когда путь достигнет прямой $y=1$.

(14) Пусть $M = \{1, 2, \dots, m\}$, $N = \{1, 2, \dots, n\}$. Сколько есть различных отображений $f: M \rightarrow N$ а) строго возрастающих (т.е. если $x < y$, то $f(x) < f(y)$)?

б) неубывающих (т.е. если $x < y$, то $f(x) \leq f(y)$)?

(15) Пусть $|X| = n$. а) Сколько отображений $f: X \rightarrow X$ имеют ровно k неподвижных точек?

б) Что за формула получится, если ответ предыдущего пункта для $k=0$ вычислить по формуле включений-исключений, используя ответы для всех остальных значений k ?

в) Сколько отображений $f: X \rightarrow X$ не имеют инвариантных² подмножеств, отличных от X ?

(16) Сколько k -мерных граней у n -мерного куба?

$$(17) \text{ Докажите, что } \text{а)} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^n = n!; \quad \text{б)} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^{n+1} = \frac{n(n+1)!}{2}.$$

¹ $[x]$ это целая часть числа x .

²Непустое подмножество $Y \subset X$ называется инвариантным относительно f , если $f(Y) \subset Y$.