

Введение в дискретную математику и топологию. Осень 2026г

Задачи к семинарам. Список 5.

ЧУМы.

Не все задачи из этого списка будут обязательно разбираться на семинаре, некоторые задачи могут быть оставлены для самостоятельного решения.

- (1) Может ли некоторое отношение на некотором множестве быть одновременно и отношением эквивалентности и отношением частичного порядка? Перечислите все такие отношения.
- (2) Сколько имеется рефлексивных отношений на множестве из трех элементов? Сколько среди них отношений эквивалентности? Сколько среди них отношений частичного порядка?
- (3) Пусть $(X; R)$ и $(Y; S)$ два множества с заданными на них отношениями. Говорят, что $(X; R)$ и $(Y; S)$ изоморфны, если существует такая биекция $f : X \rightarrow Y$, такая что xRx' тогда и только тогда, когда $f(x)Sf(x')$ (x и x' — элементы X). Такая биекция f называется тогда изоморфизмом между $(X; R)$ и $(Y; S)$. Покажите, что отношение быть изоморфными является отношением эквивалентности на множестве всех отношений на некотором фиксированном множестве X .
 - а) Перечислите все отношения эквивалентности на множестве из 3 элементов и опишите разбиение этого множества на классы относительно изоморфизма.
 - б) Перечислите все отношения частичного порядка на множестве из 3 элементов и опишите разбиение этого множества на классы относительно изоморфизма. Нарисуйте соответствующие диаграммы Хассе.
- (4) Покажите, что если некоторый элемент a некоторого ЧУМа X является одновременно и максимальным и минимальным, то a не сравним ни с одним другим элементом ЧУМа X .
- (5) Перечислите все (с точностью до изоморфизма) ЧУМы из 4 элементов, имеющие ровно 2 максимальных элемента и ровно 2 минимальных. Какие из них являются самодвойственными? (Определение см в задаче 12.)
- (6) Изоморфны ли следующие частично упорядоченные множества: $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$? б) $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$?
в) $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$?
- (7) Пусть $(X, \prec)$ — некоторый ЧУМ, $a, b \in X$. Отрезком $[a; b]$ называется множество $[a; b] = \{x \in X \mid a \prec x \text{ и } x \prec b\}$. (В частности, если a и b не сравнимы, то $[a; b] = \emptyset$, а если $a \prec b$, то $a, b \in [a; b]$.) Если $a \neq b$ и $[a; b] = \{a, b\}$, то a называется *непосредственным предшественником* элемента b , а b — *непосредственным последователем* элемента a .
 - а) Приведите пример линейно упорядоченного множества, в котором ни у одного элемента нет ни непосредственного последователя, ни непосредственного предшественника.
 - б) Покажите, что если в линейно упорядоченном множестве ни у одного элемента нет непосредственного последователя, то ни у одного элемента нет и непосредственного предшественника.
 - в) Приведите пример линейно упорядоченного множества, в котором у каждого элемента есть непосредственный последователь, но существуют неминимальные элементы, у которых нет непосредственного предшественника.

- (8) Обозначим через $E(X)$ множество отношений эквивалентности на множестве X . Согласно задаче 3 отношение "быть изоморфными" является отношением эквивалентности на $E(X)$. Для конечного множества X (пусть $|X| = n$) установите биекцию между фактормножеством множества $E(X)$ по отношению "быть изоморфными" и множеством диаграмм Юнга площадью n .
- (9) Докажите, что на $\mathbb{Z}/n$ нельзя ввести никакого нетривиального отношения частичного порядка $\prec$, с которым была бы согласована операция сложения на $\mathbb{Z}/n$, то есть такого, что из $a \prec b$ следует, что $a + c \prec b + c$ для любого $c \in \mathbb{Z}/n$.
- (10) Докажите, что на конечном множестве можно ввести единственное (с точностью до изоморфизма) отношение линейного порядка. Придумайте бесконечно много попарно не изоморфных отношений линейного порядка на $\mathbb{N}$.
- (11) Обозначим через D_n множество делителей натурального числа n и введем на нем отношение порядка: $a \prec b$, если число a является делителем числа b (т.е. $a \mid b$). При каких значениях n ЧУМ D_n изоморфен ЧУМу 2^X всех подмножеств некоторого конечного множества X (с отношением $\subset$)?
- (12) Пусть на множестве X введено некоторое отношение частичного порядка $\prec$. Введем на X новое отношение порядка $\prec^*$ так: $a \prec^* b$, если $b \prec a$. ЧУМ $(X; \prec^*)$ называется *двойственным* к ЧУМу $(X; \prec)$; если же эти два ЧУМа изоморфны, то ЧУМ $(X; \prec)$ называется *самодвойственным*.
- а) Сколько существует различных (с точностью до изоморфизма) самодвойственных отношений частичного порядка на множестве из 4 элементов? Нарисуйте их диаграммы Хассе.
 - б) Покажите, что ЧУМ $(2^X, \subset)$ является самодвойственным для любого множества X .
 - в) При каких значениях n ЧУМ D_n из задачи 11 является самодвойственным?
 - г) Придумайте какое-нибудь отношение линейного порядка на $\mathbb{N}$, чтобы получившийся ЧУМ оказался самодвойственным.
- (13) Сколько существует попарно неизоморфных ЧУМов, состоящих из n элементов, в которых максимальная по длине цепь содержит $n - 1$ элемент? Сколько из них являются самодвойственными?
- (14) Обозначим множество непустых цепей некоторого ЧУМа X через $C(X)$; покажите, что отношение включения превращает $C(X)$ в ЧУМ.
- а) Докажите, что если X — конечное множество, то длина любой цепи в $C(X)$ не превосходит максимума длин цепей в X .
 - б) Пусть $X = \{1, 2, \dots, n\}$ — конечное линейно упорядоченное множество. Сколько в $C(X)$ цепей максимальной длины? Сколько в $C(X)$ антицепей максимальной длины?
- (15) Пусть X — конечное множество. Чего больше:
- а) отношений эквивалентности на X или отношений частичного порядка на X ?
 - б) классов относительно изоморфизма отношений эквивалентности на X или классов относительно изоморфизма отношений частичного порядка на X ?

- (16) Пусть $(M; \prec_M)$ и $(N; \prec_N)$ — два частично упорядоченных множества, причем $M \cap N = \emptyset$. Тогда на их объединении $M \sqcup N$ можно определить отношение частичного порядка $\prec_\sqcup$ таким образом, чтобы все элементы одного и того же множества сравнивались в соответствии с уже имеющимся на этом множестве отношением, а все элементы множества M оказались меньше всех элементов множества N . (Заметьте, что тут важен порядок M и N !) Формально говоря, если описывать эти отношения как подмножества прямого произведения $\prec_M \subset (M \times M)$ и $\prec_N \subset (N \times N)$, то отношение частичного порядка $\prec_\sqcup \subset ((M \sqcup N) \times (M \sqcup N))$ будет определяться как $\prec_\sqcup = \prec_M \cup \prec_N \cup (M \times N)$.¹ Докажите, что $\prec_\sqcup$, действительно, является отношением частичного порядка на $M \sqcup N$. Придумайте такое подмножество $X \subset \mathbb{Q}$ (с обычным отношением линейного порядка $\leq$) чтобы ЧУМы $(X, \leq)$ и $(\mathbb{N} \sqcup \mathbb{N}, \prec_\sqcup)$ оказались изоморфны.
- (17) Пусть $(M; \prec_M)$ и $(N; \prec_N)$ — два частично упорядоченных множества. Тогда на их произведении $M \times N$ можно определить два отношения частичного порядка: "покоординатное" $(x, y) \prec_C (x', y')$, если $x \prec_M x'$ и $y \prec_N y'$ и "лексикографическое" $(x, y) \prec_L (x', y')$ если $x \prec_M x'$ и $x \neq x'$ либо если $x = x'$ и $y \prec_N y'$.
- Покажите, что $\prec_C$ и $\prec_L$, действительно, являются отношениями частичного порядка на $M \times N$, причем из $(x, y) \prec_C (x', y')$ следует, что $(x, y) \prec_L (x', y')$, но не наоборот.
 - Покажите, что если $\prec_M$ и $\prec_N$ — отношения линейного порядка, то то же верно и про $\prec_L$, но не про $\prec_C$.
 - Покажите, что для обычного отношения порядка на множестве $\{0, 1\}$ (т.е. $0 \leq 1$) ЧУМ $\{0, 1\}^n$ с покоординатным отношением порядка $\prec_C$ изоморфен ЧУМу $(2^X; \subset)$, где X — конечное множество, состоящее из n элементов.
 - Покажите, что для обычного отношения порядка на множестве $\{0, 1\}$ (т.е. $0 \leq 1$) ЧУМ $\{0, 1\}^n$ с лексикографическим отношением порядка $\prec_L$ изоморфен отрезку натурального ряда $[0, 2^n - 1] \subset \mathbb{Z}$, причем изоморфизм представляет собой запись натуральных чисел в позиционной двоичной системе счисления, т.е. вектору $(a_1, \dots, a_n) \in \{0, 1\}^n$ сопоставляется целое число $a_1 2^{n-1} + a_2 2^{n-2} + \dots + a_{n-1} 2^1 + a_n 2^0 \in [0, 2^n - 1]$.
 - Для лексикографического отношения порядка $\prec_L$ на плоскости $\mathbb{R}^2$, построенного из стандартных отношений порядка на $\mathbb{R}$, нарисуйте отрезок $[(1, 2); (2, 1)]$.
- (18) Пусть R — рефлексивное и транзитивное отношение на множестве X . Определим на X новое отношение $\sim_R$ так: $a \sim_R b$, если одновременно aRb и bRa . Докажите, что $\sim_R$, действительно, является отношением эквивалентности. Определим на фактор-множестве $X / \sim_R$ новое отношение $\prec_R$ так: $[a] \prec_R [b]$, если aRb (здесь $a, b \in X$, $[a]$ и $[b]$ — классы эквивалентности). Докажите, что $\prec_R$ является отношением частичного порядка на фактор-множестве $X / \sim_R$.

¹Напомним, что прямое произведение $(M \sqcup N) \times (M \sqcup N)$ есть несвязное объединение четырех произведений: $((M \sqcup N) \times (M \sqcup N)) = (M \times M) \sqcup (N \times N) \sqcup (M \times N) \sqcup (N \times M)$.