ОЛИМПИАДА «ВЫСШАЯ ПРОБА». МАТЕМАТИКА

Материалы подготовила к публикации
Н. ПОХОДНЯ,
г. Москва

Материалы для подготовки к олимпиаде этого года, а также материалы прошлых лет можно найти на сайте https://olymp.hse.ru/mmo/math

В составлении задач олимпиады принимали участие студенты и преподаватели НИУ «Высшая школа экономики»: Э. Акопян, Н. Коданева, Д. Бродский, В. Короленков, А. Юран, А. Кузнецов, М. Пименов, П. Пучков, М. Туревский, К. Середа, М. Дидин, А. Браженко, Ф. Ивлев, Л. Горбунов, М. Алексеев, А. Акимов

История олимпиады

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» имеет почти двадцатилетний опыт проведения олимпиадных состязаний по математике. Олимпиада «Высшая проба» по математике является «наследницей» этого опыта. Наряду с олимпиадой по экономике это одна из старейших и заслуженных олимпиад среди предметных олимпиад «Высшая проба». С самого начала она вошла в перечень олимпиад школьников, утверждаемый Минобрнауки России, постоянно развивалась и прошла путь от олимпиады третьего уровня до олимпиады наивысшего, первого уровня, который был ей присвоен в 2013 году.

Организационные рамки проведения олимпиады не раз менялись, но формат олимпиадных заданий остается практически в неизменном виде.

На первом (отборочном) этапе олимпиады участникам предлагается решить задачи по основным разделам школьной математики. Диапазон сложности задач первого этапа — от совсем элементарных до задач средней сложности. Как правило, задачи больше идейные, нежели технические: их решение основано на идее, угадав которую, задачу можно решить устно или с минимальными вычислениями. Технически сложные задачи с длинными вычислениями на первом этапе не предлагаются.

Второй (заключительный) этап олимпиады включает в себя задачи различной сложности и тематики. Диапазон сложности задач второго этапа — от средних до очень трудных. Здесь могут предлагаться задачи, требующие тщательных рассуждений и кропотливых вычислений. Ряд задач знакомит участников с идеями не только элементарной математики, но также и современной науки. При этом задания составляются так, чтобы их решение не требовало знаний за пределами школьной программы, но поощряло искусное владение этими знаниями и творческий подход к их использованию. Для достижения хороших результатов участникам необходимо развивать свою математическую культуру — в школе и на математических кружках.

Цель олимпиады — популяризация математики, а также поиск талантливых молодых людей и приобщение их к науке. Для многих это также возможность поступить в лучшие вузы страны.

В методическую комиссию и жюри олимпиады традиционно входят ученые и преподаватели вузов, в том числе факультета математики НИУ ВШЭ. Многие из них сами были когда-то участниками математических олимпиад.

Из впечатлений участников олимпиады (интернет-опрос, стиль и орфография сохранены):

«Все задания олимпиады требовали особого трудолюбия, а их решение доставляло только удовольствие».

«Задачи были достойные, порадовали своей неординарностью».

«Понравилось разнообразие заданий: от простой алгебры до заданий на пространственное мышление».

Регламент и рекомендации по подготовке

Олимпиада «Высшая проба» проводится в два этапа.

Первый этап является отборочным. Его результат, если он привел к проходу на второй этап, далее не учитывается. Он проводится в дистанционном формате с автоматизированной проверкой ответов. Запись решений не предполагается.

Второй этап является заключительным, именно по его результатам определяются победители и призеры. По формату второй этап — классическая письменная олимпиада с полноценным оформлением и последующей проверкой решений. Часть задач — задачи на вычисление каких-то элементов, часть — задачи на доказательство различных утверждений, а часть задач содержит в себе и первое, и второе.

Время выполнения заданий — 180 минут.

Баллы за верные обоснованные решения каждой задачи указаны в скобках. Максимальный балл за всю работу равен 100.

Как и любая олимпиада высокого уровня, «Высшая проба» требует от участников не столько специфических знаний, сколько умения изобретательно применять и комбинировать знания, полученные во время основных школьных занятий, а также дополнительных занятий в формате очных кружков, дистанционных курсов или самостоятельной работы с литературой. Простого алгоритма, как развить в себе такие умения и тем самым подготовиться к олимпиаде, нет, на то она и олимпиада, но хорошее освоение школьной программы, дополнительные занятия математикой, самостоятельная работа и опыт участия в других олимпиадах, конечно, помогают.

Подчеркнем, что вариант олимпиады направлен не на непосредственную проверку знания формулировок определений, теорем и подобного, а состоит из математических задач, которые требуется решить. А чтобы подготовиться к решению задач, нужно решать задачи. Рекомендуем обратить особое внимание на сборники задач и на варианты различных олимпиад сопоставимого уровня, в частности, на этапы Всероссийской олимпиады школьников, на международную олимпиаду «Турнир городов», на Московскую и Санкт-Петербургскую математические олимпиады.

Приведем список тем и умений, на который рекомендуем обратить внимание в процессе подготовки к олимпиаде. Список не является полным перечислением всего, что может быть, а акцентирует внимание на наиболее важных для подготовки темах и методах, находящихся на границе школьной программы. Подразумевается, что основную школьную программу участник и так знает в достаточной степени. В связи с тем, что одни и те же методы и темы, но на разном уровне сложности встречаются в олимпиадах разных классов, и для формирования более полной картины мы не стали разбивать список на классы. Рекомендуем ориентироваться на школьную программу, включая материал дополнительных глав учебников, на литературу, перечисленную ниже, и на варианты прошлых лет олимпиад, перечисленных выше.

Перечень тем олимпиад

Полный перечень тем олимпиады с указанием их содержания можно найти по ссылке, приведенной в начале статьи.

Общая математическая культура

– Умение ясно формулировать определения, леммы и теоремы, используемые при решении задачи.

– Умение корректно формулировать отрицания данных утверждений, утверждения, эквивалентные данным, утверждения, являющиеся следствиями данных.

– Понимание того, что является, а что не является корректным и полным математическим доказательством.

– Знание основных типов вопросов в задачах и умение понимать, что требуется привести в качестве решения. Например, понимание того, что задача с формулировкой «Можно ли», как правило, в одном случае требует контрпримера, в другом — доказательства. Или понимание того, что ответ на вопрос про наибольшее или наименьшее возможное количество, как правило, состоит из двух частей — примера для искомого количества и доказательства того, что большим (меньшим) обойтись нельзя.

Комбинаторика и логика

– Полный перебор, грамотная организация перебора.

– Идея упорядочивания в комбинаторных и алгебраических задачах.

– Решение задач от противного и на принцип Дирихле.

– Принцип крайнего.

– Круги Эйлера и формула включений / исключений.

– Логические задачи. Анализ истинных и ложных высказываний. Таблицы истинности. Задачи про рыцарей и лжецов и про мудрецов.

– Четность: арифметика, разбиение на пары, чередование.

– Процессы: инварианты и полуинварианты, зацикливание, дискретная непрерывность.

– Алгоритмы и конструктивы: переправы, переливания. Взвешивания и теория информации.

– Метод математической индукции: задачи на постепенное конструирование; применение метода при решении задач разной природы (алгебра, комбинаторика, геометрия).

– Подсчет числа способов. Задачи на соответствие. Правила сложения и умножения. Факториал. Число сочетаний, бином Ньютона и треугольник Паскаля. Алгебраические тождества с числом сочетаний и их комбинаторный смысл. Метод «шаров и перегородок». Рекуррентные соотношения, производящие функции, числа Фибоначчи, числа Каталана.

– Игры: симметричные стратегии, выигрышные и проигрышные позиции, передача хода.

– Теория графов. Перевод условия задачи на язык графов. Лемма о рукопожатиях. Связность. Двудольные графы и подсчет двумя способами. Деревья. Эйлеровы и Гамильтоновы пути и циклы в графах. Раскраски графов. Планарные графы и формула Эйлера. Ориентированные графы.

Алгебра и теория чисел

– Алгебраические преобразования и формулы сокращенного умножения.

– Текстовые задачи: движение по прямой и по кругу, задачи на работу, сплавы и смеси.

– Десятичная запись числа и признаки делимости. Разложение числа на простые множители. Основная теорема арифметики. НОД и НОК. Алгоритм Евклида. Линейное представление НОД. Линейные Диофантовы уравнения.

– Арифметика остатков, сравнение по модулю. Малая теорема Ферма. Теорема Вильсона. Китайская теорема об остатках. Теорема Эйлера. Уравнения в целых числах.

– Работа с иррациональными числами.

– Системы счисления.

– Неравенства. Неравенства о средних. Транснеравенство. Неравенство Коши–Буняковского–Шварца. Метод Штурма. Неравенство Йенсена.

– Квадратный трехчлен: формулы корней, теорема Виета, график и его свойства.

– Многочлены: алгебра многочленов, теорема Безу, теорема о рациональных корнях, теорема Виета. Разложение многочлена на неприводимые. Интерполяционный многочлен.

– Перестановки. Умножение перестановок. Разложение в независимые циклы и порядок перестановки. Сортировки и разложение в произведение транспозиций. Четность перестановки.

– Линейная алгебра. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

– Функциональные уравнения и неравенства.

Геометрия

– Четвертый признак «равенства» треугольников.

– Дополнительные построения, связанные с осевой и центральной симметрией. Перекладывание отрезков. Удвоение медианы.

– Неравенство о соотношении углов и сторон в треугольнике. Неравенство треугольника.

– Параллелограмм Вариньона.

– Теоремы Чевы и Менелая.

– Вписанные и вневписанные окружности. Точки Жергона и Нагеля.

– Окружность девяти точек и прямая Эйлера.

– Вписанные углы, угол между касательной и хордой. Вписанные четырехугольники и вспомогательные окружности. Ортотреугольник и отражения ортоцентра. Лемма Фусса. Прямая Симсона. Середины дуг: лемма Архимеда и лемма о трезубце.

– Отрезки касательных и описанные четырехугольники.

– Пропорциональные отрезки, связанные с окружностью. Степень точки относительно окружности, радикальная ось, радикальный центр.

– Движения плоскости: классификация, композиция движений, применение при решении задач.

– Преобразования плоскости: гомотетия, поворотная гомотетия, изогональное сопряжение.

– Триангуляция многоугольника.

– Многоугольники на решетке. Формула Пика.

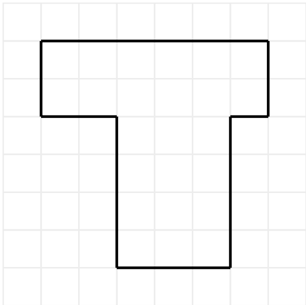
– Стереометрические задачи. Равногранные и ортоцентрические тетраэдры.

Варианты второго тура 2023/24 учебного года

Условия задач

7 класс

7.1. (*15 баллов*) Разрежьте фигуру на три равные части по сторонам клеток. Части можно поворачивать и переворачивать.



7.2. (*15 баллов*) Даны две одинаковые стопки из восьми карточек, на которых написаны числа 0, 1, 2, ..., 7. Можно ли разложить эти карточки по кругу так, чтобы нули лежали рядом, между единицами лежала ровно одна карточка, ..., между карточками с числом k лежало ровно k карточек, ..., между карточками с числом 7 лежало ровно 7 карточек?

7.3. (*15 баллов*) Полина и Вика загадали два целых числа: a и b, при этом оказалось, что $a > b$. Полина нашла значение выражения $a^3 - a^2 + 2024a$, а Вика нашла значение выражения $b^3 - b^2 + 2024b$. Могло ли Полинино число оказаться меньше Викиного?

7.4. (*15 баллов*) Дана таблица с 8 строками и 5 столбцами. Петя и Вася по очереди ставят в клетки таблицы крестики и нолики. За ход Петя ставит два крестика (или, если осталось одно незаполненное поле, 1 крестик), а Вася ставит один нолик. Начинает Петя. Игра заканчивается, когда все клетки таблицы заполнены. Если есть строка, заполненная только крестиками, побеждает Петя, иначе побеждает Вася. Кто из них может гарантировать себе победу?

7.5. (*20 баллов*) По кругу стоит шесть коробок, в одной из них камень. За ход можно из коробки взять один камень и положить по одному камню в соседние с ней коробки. А можно, наоборот, пару камней в коробках через одну заменить одним камнем в коробке между ними. Через некоторое количество ходов снова остался один камень. Может ли этот камень лежать в коробке, соседней с исходной?

7.6. (*20 баллов*) Назовем *расстоянием* между двумя клетками доски минимальное количество ходов, которое нужно шахматному коню, чтобы попасть из одной из них в другую. Назовем тройку клеток *правильной*, если попарные расстояния между ними одинаковые. Сколько правильных троек есть на доске 4×4? *Примечание.* Конь ходит на две клетки по вертикали и затем на одну клетку по горизонтали или, наоборот, на две клетки по горизонтали и на одну клетку по вертикали.

8 класс

8.1. (*15 баллов*) В школьную столовую собираются завезти шесть видов шоколадных батончиков. По ГОСТу требуется, чтобы цены батончиков были натуральными числами и суммарная стоимость шести различных батончиков была равна 101 рублю. Кроме того, администрация хочет установить цены так, чтобы для любых двух школьников, купивших одинаковое количество батончиков, не больше одного каждого вида, стоимости их покупок отличались меньше чем на некоторое натуральное d. При каком наименьшем d администрация сможет этого добиться?

8.2. (*15 баллов*) Даны две одинаковые стопки из девяти карточек, на которых написаны числа 0, 1, 2, ..., 8. Можно ли разложить эти карточки по кругу так, чтобы нули лежали рядом, между единицами лежала ровно одна карточка, ..., между карточками с числом k лежало ровно k карточек, ..., между карточками с числом 8 лежало ровно 8 карточек?

8.3. (*15 баллов*) Параллелепипед $6 \times 5 \times 5$ покрасили снаружи в синий цвет, а потом распилили на единичные кубики. Из какого наибольшего числа кубиков можно сложить синий снаружи параллелепипед без внутренних полостей, используя только кубики хотя бы с одной синей гранью?

8.4. (*15 баллов*) Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, для которых верно равенство

$$\sqrt{x-\sqrt{y}}+\sqrt{x+\sqrt{y}}=\sqrt{xy}.$$

8.5. (*20 баллов*) В треугольнике ABC проведена высота BH. Точка N симметрична точке H относительно середины стороны AC. Предположим, что $BN = AC$. Докажите, что ортоцентр делит отрезок BH в отношении $3 : 1$, считая от вершины.

8.6. (*20 баллов*) Дана таблица с n строками и десятью столбцами. Петя и Вася по очереди ставят в клетки таблицы крестики и нолики. За ход Петя ставит два крестика (или, если осталось одно незаполненное поле, 1 крестик), а Вася ставит один нолик. Начинает Петя. Игра заканчивается, когда все клетки таблицы заполнены.

Если есть строка, заполненная только крестиками, побеждает Петя, иначе побеждает Вася. Для какого минимального n Петя может гарантировать себе победу?

9 класс

9.1. (*15 баллов*) Петя задумал число x, а Вася — число y, причем Петино число оказалось больше. Затем Петя нашел значение выражения

$$\frac{x^3}{x^2+x+1},$$

а Вася — выражения

$$\frac{y^3}{y^2+y+1}.$$

Обязательно ли полученное Петей число будет больше Васиного?

9.2. (*15 баллов*) Имеется 26 карточек: по две штуки с числами 1, 2, 3, ..., 13. Требуется разложить эти карточки по стопкам так, чтобы:

– любые две одинаковые карточки лежали в одной стопке;

– если две карточки лежат в одной стопке, карточка с суммой чисел на них не лежит в той же стопке.

Каким минимальным количеством стопок можно обойтись?

9.3. (*15 баллов*) Диагонали трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) пересекаются в точке P. Известно, что периметры треугольников APB и CPD равны. Обязательно ли трапеция $ABCD$ является равнобедренной?

9.4. (*15 баллов*) Многие учащиеся математического кружка остаются в нем преподавать после выпуска. Будем говорить, что Ваня является *последователем* Саши, если Ваня учился у Саши или если Ваня учился у ученика Саши, ученика ученика Саши и так далее. Преподаватель кружка называется *народным*, если у него есть последователи и не менее половины из них — победители международной олимпиады IMO. Известно, что всего в кружке занималось 100 победителей IMO. Какое наибольшее количество народных преподавателей может быть в этом кружке, если у каждого человека не больше одного учителя и никто не является собственным последователем?

9.5. (*20 баллов*) Окружности S_1 и S_2 с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке K. На S_1 и S_2 выбраны точки B и A соответственно такие, что отрезки O_1A и O_2B касаются окружностей и пересекаются в точке C. Докажите, что углы AKC и KBC равны.

9.6. (*20 баллов*) Дан приведенный квадратный трехчлен f с целыми коэффициентами. Известно, что если $f(x)$ (x — целый) делится на некоторое простое $p > 2024$, то $f(x)$ делится на p^2. Докажите, что тогда это свойство верно и для всех простых $p < 2024$.

10 класс

10.1. (*15 баллов*) Можно ли число 2024 представить в виде $a^3 + b^2$, где a и b — натуральные числа?

10.2. (*15 баллов*) Сколько существует таких приведенных квадратных трехчленов $f(x) = x^2 + px + q$ с целыми коэффициентами, что $f(f(1000)) = 0$?

10.3. (*15 баллов*) В треугольнике ABC точка I — центр вписанной окружности, точки E и F — основания биссектрис BI и CI соответственно. Прямая AI пересекает описанную около треугольника EIF окружность в точке $T \neq I$. Докажите, что ортоцентр треугольника AEF равноудален от точек T и I.

10.4. (*15 баллов*) Многие учащиеся математического кружка остаются в нем преподавать после выпуска. Будем говорить, что Ваня является *последователем* Саши, если Ваня учился у Саши или если Ваня учился у ученика Саши, ученика ученика Саши и так далее. Преподаватель кружка называется *народным*, если у него есть последователи и не менее половины из них — победители международной олимпиады IMO. Известно, что всего в кружке занималось 100 победителей IMO. Какое наибольшее количество народных преподавателей может быть в этом кружке, если у каждого человека не больше одного учителя и никто не является собственным последователем?

10.5. (*20 баллов*) Окружность ω описана около треугольника ABC. Биссектриса AL пересекает ω в точке $S \neq A$. Докажите, что длина проекции отрезка AS на прямую AB больше длины отрезка AL.

10.6. (*20 баллов*) По кругу расставлены натуральные числа. Петя поделил каждое из них на натуральное число, ближайшее к среднему геометрическому соседних чисел. Оказалось, что все полученные числа — натуральные. Чему может быть равно наибольшее из них?

11 класс

11.1. (*15 баллов*) Можно ли число 2024 представить в виде $a^5 + b^3$, где a и b — натуральные числа?

11.2. (*15 баллов*) В некотором числе 10 единиц, 100 двоек, 1000 троек, ..., 10^9 девяток, расположенных в некотором порядке. Каждую секунду в нем стирают последнюю цифру. Правда ли, что в какой-то момент после начального получится число, делящееся на 9?

11.3. (*15 баллов*) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$, в котором $AB = BC = CD$, диагонали AC и BD пересекаются в точке E. Описанная окружность треугольника ADE пересекает сторону AB в точке $P \neq A$ и продолжение стороны CD в точке $Q \neq D$. Докажите, что отрезки AP и DQ равны.

11.4. (*15 баллов*) Есть $4n$ отрезков длиной x_1, x_2, …, x_{4n}, где $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, а при $k > 2$ выполнено равенство

$$x_k = x_{k-1} + x_{k-2}.$$

Сколькими способами эти отрезки можно разбить на четверки так, чтобы из отрезков каждой четверки можно было составить четырехугольник?

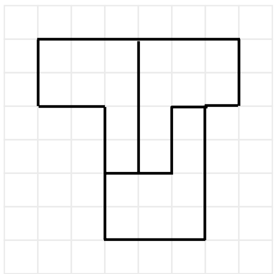
11.5. (*20 баллов*) Деревни некоторой языческой страны соединены дорогами так, что от любой деревни можно добраться до любой другой, не проходя ни через какую из них дважды, причем сделать это можно единственным способом. В каждой деревне живет свое племя туземцев. Каждое племя поклоняется одному из трех идолов: Камню, Ножницам или Бумаге. Известно, что Камень сильнее Ножниц, Ножницы сильнее Бумаги, а Бумага сильнее Камня. Каждое племя желает, чтобы их идол был не слабее, чем идол любого из соседствующих с ним племен. С этой целью каждый вечер ровно в 20:24 каждое племя смотрит на своих соседей и, если обнаруживает соседа с более сильным идолом, меняет свои верования, начиная поклоняться этому, более сильному идолу. Верно ли, что рано или поздно все племена начнут верить в одного и того же идола?

11.6. (*20 баллов*) Сфера касается всех ребер пирамиды, в основании которой лежит выпуклый 2024-угольник. Покрасим в шахматном порядке углы между последовательными ребрами при вершине вне многоугольника в синий и красный цвета. Докажите, что произведение синусов половинок синих углов равно произведению синусов половинок красных.

Ответы, решения, критерии оценивания

7 класс

7.1.



7.2. Расставим карточки по кругу в таком порядке:

5, 3, 1, 7, 1, 3, 5, 6, 4, 0, 0, 7, 2, 4, 6, 2.

Несложно проверить, что между одинаковыми карточками нужное количество других: например, между карточками с числом 4 расположены карточки с 0, 0, 7 и 2.

Ответ: можно.

7.3. Рассмотрим разность новых чисел:

$$a^3 - a^2 + 2024a - b^3 + b^2 - 2024b =$$
$$= (a - b)(a^2 + ab + b^2 - a - b + 2024) =$$
$$= (a-b)\cdot\frac{1}{2}\left(a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 + 4046\right) =$$
$$= \frac{1}{2}(a-b)\left((a+b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 + 4046\right).$$

Множитель в первых скобках положителен, поскольку $a > b$, а во вторых — поскольку равен сумме нескольких квадратов (каждый из которых неотрицателен) и положительного числа 4046. Получается, что новое Полинино число всегда будет больше Викиного.

Критерии оценивания:

А1) рассмотрена разность чисел — плюс 2 балла;

А2) в разности вынесено за скобки выражение $(a - b)$ — плюс 4 балла.

Критерии А1 и А2 суммируются.

В1) сделана попытка перебора положительных / отрицательных значений a и b, а также сравнения модулей, не доведенная до конца, — 0 баллов.

7.4. Если в таблице хотя бы 8 строк, побеждает Петя. Действительно, он может сначала в каждую строку поставить по крестику — это 4 хода. Вася за 4 хода поставит по нолику не более чем в 4 из этих строк. Дальше Петя выбирает 4 строки, которые пока не содержат ноликов, и за два хода ставит в них по второму крестику. Вася «испортит» не больше двух строк. Затем Петя одним ходом ставит по крестику в две строки без ноликов и еще одним ходом ставит два последних крестика в ту из этих строк, в которой не появилось нолика. Таким образом, Петя гарантирует себе победу.

7.5. Пронумеруем коробки по порядку числами от 1 до 6. Определим, как может меняться суммарное число камней в коробках с номерами 2, 3, 5 и 6. Если выполнить ход для тройки коробок 1, 2, 3 или 4, 5, 6, это число увеличится или уменьшится на два. Если выполнить ход для любой другой тройки коробок, это число не изменится.

В исходный момент суммарное число камней в коробках 2, 3, 5 и 6 равно нулю. Поскольку при любом ходе оно меняется на 2 или не меняется, оно всегда четно, а значит, не может стать равным 1.

Критерии оценивания:

не приведены.

7.6. *Примечание*. Конь ходит на две клетки по вертикали и затем на одну клетку по горизонтали или, наоборот, на две клетки по горизонтали и на одну клетку по вертикали.

Прежде всего покрасим доску шахматной раскраской (то есть в два цвета так, чтобы соседние по стороне клетки были разных цветов), заметим, что конь каждым своим ходом меняет цвет клетки, на которой стоит, на противоположный.

Теперь догадаемся, что все три клетки правильной тройки имеют один цвет. Действительно, в противном случае в тройке есть клетка, цвет которой совпадает с цветом одной из двух других клеток и не совпадает с цветом другой. Но тогда расстояния до них были бы различными, что ведет к противоречию. Значит, расстояние между клетками тройки должно быть кратно двум. Путем небольшого перебора можно убедиться, что это расстояние может быть равно только 2 или 4.

Посчитаем количество троек черного цвета (белые тройки считаются аналогично). Докажем вначале, что троек с расстоянием 4 не существует.

13	14	15	16
9	10	11	12
5	6	7	8
1	2	3	4

Поищем все пары клеток, расстояния между которыми равны 4. Вот их список: 1–6, 1–11, 6–16, 11–16, 3–9, 8–14. Между остальными парами расстояние 2 (для каждой пары несложно найти поле, через которое можно дойти от одной до другой). Однако никакие три из расстояний, перечисленных выше, не образуют тройку, значит, правильных троек с расстоянием 4 не существует.

Теперь посчитаем тройки с расстоянием 2. Будем говорить, что *пара клеток хорошая*, если расстояние между клетками равно 2. Заметим, что две черные клетки, лежащие в противоположных углах, образуют хорошую пару. Чтобы получилась хорошая тройка, к ним можно добавить любую черную клетку, лежащую на стороне и при этом не в углу. Также к любой из угловых клеток можно добавить хорошую пару клеток, лежащих на сторонах и не в углу. Таких хороших пар 4 (потому что не являющихся хорошими — две, см. выше). Итого, правильных троек с участием хотя бы одной угловой клетки $4 + 2 \cdot 4 = 12$. Теперь посмотрим на центральные клетки. Из аналогичных соображений сделаем вывод, что есть 4 правильных тройки с участием двух центральных клеток, кроме того, для каждой из них есть по 4 правильных тройки с неугловыми клетками на стороне, то есть тоже $4 + 2 \cdot 4 = 12$. Значит, правильных троек черного цвета $12 + 12 = 24$. Точно таким же образом можно посчитать правильные тройки белого цвета, их также 24. Итого, $24 \cdot 2 = 48$ правильных троек.

Ответ: 48.

Критерии оценивания:

А1) приведена шахматная раскраска — плюс 2 балла;

А2) сделан вывод о четности расстояния между клетками тройки и перебором введено ограничение на это расстояние: 2 или 4, — плюс 4 балла;

А3) доказано, что в правильной тройке расстояние между клетками только 2, — плюс 4 балла;

А4) проведен подсчет троек с расстоянием 2 между клетками — плюс 10 баллов.

Критерии А1–А4 суммируются.

8 класс

8.1. Если $d = 1$, то все цены должны быть равными. Однако 101 не делится на 6, поэтому этот случай невозможен. Сделаем цены такими: 5 батончиков по 17 рублей и один по 16 рублей. Тогда у двух школьников, купивших одинаковое количество батончиков, либо стоимости покупок равны, либо отличаются на 1 (если ровно один из них взял батончик за 16 рублей). Значит, искомое $d = 2$.

Ответ: 2.

Критерии оценивания:

А0) не снижались баллы, если в условии прочитали «не больше чем на d» вместо «меньше чем на d»;

А1) показано, что d не равно 1, — 15 баллов;

А2) приведен пример — 5 баллов;

А3) приведен обоснованный пример — 5 баллов.

Критерии А1, А2 и А3 суммируются.

8.2. Расставим карточки по кругу в таком порядке: 7, 5, 3, 1, 8, 1, 3, 5, 7, 6, 4, 0, 0, 8, 2, 4, 6, 2. Несложно проверить, что между одинаковыми карточками нужное количество других: например, между карточками с числом 4 расположены карточки с цифрами 0, 0, 8 и 2.

Ответ: можно.

Критерии оценивания:

не приведены.

8.3. Заметим, что есть три вида кубиков с синей гранью, а именно кубики с одной, двумя и тремя синими гранями.

Кубики с тремя синими гранями находятся только в вершинах параллелепипеда, так что их 8 штук.

Кубики с двумя синими гранями лежат на ребрах параллелепипеда, кроме его вершин. На одном ребре длиной 6 их поместится $6 - 2 = 4$, таких ребер 4, поэтому вместе на них $4 \cdot 4 = 16$ кубиков. На ребре длиной 5 таких кубиков $5 - 2 = 3$, а всего таких ребер 8, поэтому на них $3 \cdot 8 = 24$ кубика. Итого, есть $16 + 24 = 40$ кубиков с двумя синими гранями.

Кубики с одной синей гранью лежат на гранях параллелепипеда, за исключением его ребер. На гранях со сторонами 5 и 5 их по $(5 - 2)^2 = 9$, а на гранях со сторонами 5 и 6 — по $(5-2) \cdot (6-2) = 12$. Граней 5×5 — две, а граней 5×6 — четыре, поэтому всего кубиков с одной гранью $12 \cdot 4 + 9 \cdot 2 = 66$.

Для того чтобы сложить новый параллелепипед, в нашем распоряжении $8 + 40 + 66 = 114$ кубиков.

Покажем, что требуемый параллелепипед не удастся сложить из 113 или 114 кубиков. Поскольку 113 — простое число, параллелепипед из 113 кубиков мог бы быть только размером $113 \times 1 \times 1$, но тогда его крайние кубики должны были бы иметь по 5 синих граней, а таких у нас нет.

Число 114 раскладывается на множители как $2 \cdot 3 \cdot 19$. Но заметим, что для того, чтобы сложить параллелепипед с ребром 1, нам понадобятся кубики с хотя бы 4 синими гранями. Если же все ребра больше 1, то они могут быть равны только 2, 3 и 19. Но тогда у нас есть 4 ребра длиной 19. Для того чтобы они были синими, необходимо 8 кубиков с тремя синими гранями, а также не меньше $17 \cdot 4 = 68$ кубиков с двумя синими гранями, чего мы обеспечить не можем.

Теперь приведем пример для 112 кубиков. Искомый параллелепипед имеет размеры $4 \times 4 \times 7$. Тогда на его ребра уйдет 8 кубиков с тремя синими гранями и $2 \cdot 4 \cdot 2 + 5 \cdot 4 = 36$ кубиков с двумя синими гранями. Хотя бы одна грань каждого из оставшихся кубиков синяя, так что требуемый параллелепипед легко складывается.

Критерии оценивания:

А1) доказано, что примера больше чем с 114 кубиками нет, — 4 балла;

А2) доказано, что примера с 114 кубиками нет, — 5 баллов;

А3) доказано, что примера с 113 кубиками нет, — 1 балл;

А4) приведен пример с 112 кубиками — 5 баллов.

Критерии А1–А4 суммируются.

В1) допущена ошибка в подсчете кубиков в примере — до минус 3 баллов;

С1) доказано, что если параллелепипед с ребрами x, y, z можно собрать, то $xyz \le 114$, $x + y + z \le 16$, далее неверно — 6 баллов.

8.4. Заметим, что x, $y \ge 0$ из-за области определения квадратного корня. Если $x = 0$, то $y = 0$. Получили решение (0; 0), далее полагаем, что x, $y > 0$.

Возведем в квадрат обе части уравнения (это можно сделать, так как с обеих сторон неотрицательные числа). Имеем:

$$x - \sqrt{y} + x + \sqrt{y} + 2\sqrt{x^2 - y} = xy \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x(y-2) = 2\sqrt{x^2 - y}.$$

Правая часть последнего уравнения неотрицательна, поэтому $y \ge 2$. Возведя уравнение в квадрат еще раз, получаем:

$$x^2y^2 - 4x^2y + 4x^2 = 4x^2 - 4y \Leftrightarrow x^2(y^2 - 4y) = -4y \Leftrightarrow$$
$$x^2(4y - y^2) = 4y \Leftrightarrow x^2(4 - y) = 4.$$

Последний переход возможен в силу положительности y.

Заметим, что при $y \ge 4$ правая часть не больше 0, однако 4 больше нуля, поэтому такие случаи нам не подходят. Значит, $y \le 3$. Вспоминая, что $y \ge 2$, понимаем, что достаточно рассмотреть случаи $y = 2$ и $y = 3$.

При $y = 2$ получаем, что $x^2 = 2$, что невозможно для натуральных x.

При $y = 3$ получаем, что $x^2 = 4$, откуда $x = 2$. Итак, второе решение — пара (2; 3).

Ответ: (0; 0), (2; 3).

Критерии оценивания:

А1) избавились от корней — 4 балла;

А2) дан только ответ (полный и правильный) — 2 балла.

Критерии А1 и А2 суммируются.

В1) осуществлен неравносильный переход без проверки с помощью подстановки, остальное верно — минус 3 балла;

В2) потеряно решение (0; 0), остальное верно — минус 1 балл.

Критерии В1 и В2 могут применяться одновременно.

8.5. Для удобства будем считать, что $AB \le BC$ (тогда $AH \le HC$). Продлим основание AC за вершину A и отметим на продолжении такую точку M, что $AM = AH$. Проведем из точки N перпендикуляр NX к прямой MB. Поскольку

$$BN = AC = AN + NC = AN + AM = MN,$$

треугольник MNB равнобедренный, а высота NX, проведенная к основанию, является медианой. То есть $MX = XB$. Проведем через точку X среднюю линию XT треугольника MBH, параллельную MH. Тогда $XT = 0{,}5MH = NC$ и $XT \parallel NC$. Следовательно, $CNXT$ — параллелограмм и $NX \parallel CT$. То есть CT и MB взаимно перпендикулярны, а точка T — точка пересечения высот треугольника MBC.

Пусть S — точка пересечения высот треугольника ABC. Рассмотрим прямые MT и AS: они параллельны, AS делит отрезок MH пополам. Значит, AS делит отрезок TH пополам. Поскольку T — середина BH, получим требуемое: $BS : SH = 3 : 1$.

Ответ: 3 : 1

Критерии оценивания:

А) $BN = AC$ не используется — 0 баллов.

8.6. Если в таблице хотя бы 256 строк, побеждает Петя. Действительно, он может сначала в каждую строку поставить по крестику —это 128 ходов. Вася за 128 ходов поставит по нолику не более чем в 128 из этих строк. Дальше Петя выбирает 128 строк, которые пока не содержат ноликов, и ставит в них по второму крестику — 64 хода. Вася «испортит» не больше 64 строк. И так далее до получения Петей двух строк с 8 крестиками. Вася «испортит» из них не больше одной, и Петя сможет поставить 2 крестика в другую.

Теперь докажем, что при меньшем числе строк Вася может гарантировать себе победу. Пусть Вася ставит нолик в ту же строку, что и Петя, если тот поставил два крестика в одну строку. В ином случае Вася ставит нолик в одну из строк с наибольшим числом крестиков среди тех, в которых еще нет ноликов. Если ни одно из этих действий невозможно, Вася может ставить нолик на любое свободное место.

Пусть победил Петя. Забудем про все ходы, на которых все символы были поставлены в одну строку, и соответствующие им строки; в таких строках есть хотя бы по одному нолику, значит, ни в одной из них Петя не сможет поставить 10 крестиков. Тогда за ход до победы у Пети была строка хотя бы с 8 крестиками и без 0. Если Вася не поставил туда 0, была еще хотя бы одна строка хотя бы с 8 крестиками. Она могла получиться, только если строк с 7 крестиками было не меньше 4: если в двух строках хотя бы с 7 крестиками не стоят нули, то было еще хотя бы две строки, в которых не меньше 7 крестиков и в которые Вася поставил нолики.

Аналогичным образом доказываем, что строк с 6 крестиками должно было быть хотя бы 8, с 5 крестиками— 16, ..., с 1 крестиком — 256.

Критерии оценивания:

А1) приведена стратегия для Пети для 256 строк и доказано, что она приведет к успеху, — 10 баллов;

А2) стратегия на 512 или 1024, потому что не учтено, что в конце в одну строку можно поставить два крестика, — 7 баллов;

В1) приведена оценка (доказательство, что Вася победит, если сторона меньше 256) — 10 баллов.

9 класс

9.1. Рассмотрим разность новых чисел:

$$\frac{x^3}{x^2+x+1}-\frac{y^3}{y^2+y+1}=\frac{x^3\left(y^2+y+1\right)-y^3\left(x^2+x+1\right)}{\left(x^2+x+1\right)\left(y^2+y+1\right)}.$$

Заметим, что при любом x

$$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0,$$

поэтому знаменатель полученной дроби всегда положителен. Рассмотрим числитель:

$$x^3y^2 - y^3x^2 + x^3y - y^3x + x^3 - y^3 =$$
$$= x^2y^2(x - y) + xy(x^2 - y^2) + (x^3 - y^3) =$$
$$= (x - y)(x^2y^2 + xy(x + y) + x^2 + xy + y^2).$$

Множитель $(x - y)$ положителен, поскольку Петино число больше Васиного. Рассмотрим второй множитель как квадратный трехчлен относительно x:

$$x^2(1 + y + y^2) + x(y + y^2) + y^2.$$

Его дискриминант равен

$$-3y^4 - 2y^3 - 3y^2 = -y^2(3y^2 + 2y + 3).$$

Трехчлен $3y^2 + 2y + 3$ принимает только положительные значения, а значит, дискриминант неположителен. Равняться нулю он может, только если $y = 0$, но в этом случае $x = 0$, что противоречит условию. Тогда дискриминант строго отрицателен, а поскольку выражение $1 + y + y^2$, стоящее при x^2, всегда положительно, рассмотренный квадратный трехчлен принимает только положительные значения. Значит, разность новых чисел всегда больше нуля, поэтому полученное Петей число всегда будет больше Васиного.

Ответ: возможно.

Критерии оценивания:

А1) рассмотрена разность чисел из условия — плюс 1 балл;

А2) приведено к общему знаменателю, объяснено, что знаменатель больше 0, — плюс 2 балла;

А3) вынесено за скобки выражение $(x - y)$ — плюс 2 балла.

Критерии А1, А2 и А3 суммируются.

9.2. Докажем, что двумя стопками обойтись не удастся. Предположим противное. Пусть карточки с числом 1 лежат в первой стопке, тогда карточки с двойкой должны лежать во второй, а с четверкой — снова в первой. Карточки с тройкой нельзя класть в первую стопку (так как $1 + 3 = 4$), значит, они лежат во второй. Но тогда карточки с числом 5 нельзя положить ни в первую стопку (так как $1 + 4 = 5$), ни во вторую ($2 + 3 = 5$). Противоречие.

Теперь приведем пример для трех стопок (число обозначает карточку с таким числом).

Первая стопка: 1, 1, 4, 4, 10, 10, 13, 13.

Вторая стопка: 2, 2, 3, 3, 11, 11, 12, 12.

Третья стопка: 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 9.

Ответ: тремя стопками.

Критерии оценивания:

А1) дана оценка (доказано, что двумя стопками обойтись не удастся) — плюс 5 баллов;

А2) приведен правильный пример (на три стопки) — плюс 10 баллов.

Критерии А1 и А2 суммируются.

9.3. Заметим, что у треугольников APB и CPD равны также и площади. Действительно, площади треугольников ABD и ACD равны, поскольку они имеют общую сторону и равные высоты, проведенные к этой стороне, а при вычитании из площадей этих треугольников площади треугольника APD получаются площади треугольников APB и CPD.

Следовательно, у этих треугольников равны радиусы вписанных окружностей (из формулы $S = pr$, здесь через p обозначен полупериметр данных треугольников). Из равенства радиусов вписанных окружностей получаем, что отрезки касательных, проведенных из точки P к вписанным окружностям данных треугольников, тоже равны. Далее заметим, что эти отрезки равны $p - AB$ и $p - CD$ соответственно, следовательно, $AB = CD$.

Ответ: обязательно.

Критерии оценивания:

А1) показано равенство площадей APB и CPD (можно без доказательства) — плюс 2 балла;

А2) доказано равенство радиусов вписанных окружностей APB и CPD (с доказательством) — плюс 3 балла.

Критерии А1 и А2 суммируются.

9.4. Построим ориентированный граф, вершинами которого будут учащиеся и преподаватели кружка, а ребро проводится от учителя к его ученику. Таким образом, наш граф представляет собой набор непересекающихся деревьев.

Пример. Возьмем путь на 201 вершине, ориентируем ребра сверху вниз, в нижние 100 вершин поставим победителей IMO. Тогда все вершины, кроме самой нижней, будут народными учителями.

Оценка. Рассмотрим все вершины, которые соответствуют народным учителям и никакой из предков которых не является народным учителем. Пусть в поддереве (не считая саму вершину) некоторой такой вершины s победителей IMO. Поскольку выбранной вершине соответствует народный учитель, среди его последователей не больше s человек, не являющихся победителями IMO. Значит, всего в поддереве (считая корень) не больше $(2s + 1)$ вершин. Из них народным учителям могут соответствовать не больше $2s$ вершин, так как найдется хотя бы один человек, который никого не учил. Таким образом, число народных учителей в поддереве не может превышать число победителей IMO более чем в 2 раза. Поскольку поддеревья, соответствующие выбранным нами народным учителям, не пересекаются, то просуммировав по ним число народных учителей, получим, что оно не превышает удвоенного числа победителей, то есть 200.

Критерии оценивания:

приведен пример — 5 баллов.

9.5. Заметим, что четырехугольник O_1BAO_2 вписанный, причем коэффициент подобия треугольников O_1BC и O_2AC равен $\frac{r}{R}$, где r и R — радиусы окружностей S_1 и S_2 соответственно. Следовательно,

$$O_1C : O_2C = r : R = O_1K_2 : O_2K,$$

значит, CK — биссектриса треугольника O_1CO_2.

Обозначим угол KO_2A через 2α, угол KO_1B через 2β, тогда:

$$\angle O_1KB = 90^\circ - \beta,$$
$$\angle O_2KA = 90^\circ - \alpha,$$
$$\angle BKA = \alpha + \beta,$$
$$\angle CAK = \alpha, \angle CBK = \beta.$$

Пусть:

$$\angle BKC = x,$$
$$\angle AKC = y,$$

тогда, так как углы O_1CK и O_2CK равны, получаем:

$$x + \beta = y + \alpha.$$

Наконец заметим, что

$$x + y = \alpha + \beta$$

из подсчета углов при вершине K. Из полученной системы уравнений находим требуемое:

$$\angle AKC = y = \beta = \angle KBC.$$

Критерии оценивания:

доказано, что CK — биссектриса треугольника O_1CO_2 — 10 баллов.

9.6. Пусть

$$f(x) = x^2 + bx + c$$

и для некоторого $p > 2024$ есть целый x такой, что $f(x)$ делится на p. Тогда

$$f(x + p) = (x + p)^2 + b(x + p) + c = \\ = f(x) + p(2x + p + b)$$

тоже делится на p, а значит, выражения

$$x^2 + bx + c$$

и

$$(x + p)^2 + b(x + p) + c$$

делятся на p^2. Отсюда следует, что $2px + bp$ делится на p^2, а $(2x + b)$ делится на p. Возведем в квадрат и вычтем $4f(x)$; полученное выражение будет также делиться на p^2:

$$4x^2 + 4bx + b^2 - 4x^2 - 4bx - 4c = b^2 - 4c.$$

Значит, если $b^2 - 4c \neq 0$, таких конечное число и все они находятся среди делителей $(b^2 - 4c)$. Назовем их $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Покажем, что так не бывает, предъявив еще одно такое p. Например, еще простой делитель найдется у

$$f\left(cp_1p_2\ldots p_k\right) = c\left(cp_1^2\ldots p_k^2 + bp_1\ldots p_k + 1\right),$$

потому что число в скобках больше всех наших простых и оно с ними всеми взаимно просто.

Таким образом, $b^2 - 4c = 0$, а значит, $f(x)$ имеет вид $(x + t)^2$, где t — целое число. Тогда если $(x + t)^2$ делится на произвольное простое p, то $(x + t)$ также делится на p, а значит, $(x + t)^2$ делится на p^2.

Ответ: да, верно.

Критерии оценивания:

не приведены.

10 класс

10.1. Заметим, что

$$2024 = 1000 + 1024 = 10^3 + 32^2.$$

Ответ: да, можно.

Критерии оценивания:

утверждается, что нельзя, в доказательстве остатки / делимость — 0 баллов;

идея перебора + ошибка в вычислениях / при переписывании степеней из условия — 5 баллов.

10.2. Пусть $f(1000) = a$. Тогда, согласно условию, число a — корень трехчлена f, то есть

$$f(x) = (x - a)(x - b),$$

где b — второй корень трехчлена. Поскольку $a = f(1000)$ целое число, число b также целое. Заметим, что b однозначно задается выбором a:

$$a = f(1000) = (1000 - a)(1000 - b),$$

откуда

$$b = \frac{a}{1000 - a},$$

потому в действительности нам достаточно посчитать количество таких целых чисел a, что число $\frac{a}{1000 - a}$ также целое.

Итак, задача свелась к подсчету количества таких целых a, что $a \,\vdots\, (1000 - a)$. Это условие равносильно делимости 1000 на $(1000 - a)$, поэтому количество искомых a равно числу целых делителей 1000. Это число равняется $2 \cdot 4 \cdot 4 = 32$ (дополнительный множитель двойка появился из-за того, что отрицательные a нам также подходят).

Ответ: 32.

Критерии оценивания:

посчитано значение $f(f(1000))$ без дальнейших содержательных продвижений, или рассмотрен только случай $q = 0$, или рассматриваются действительные p и q вместо целых, или рассмотрен дискриминант без дальнейшего перехода к уравнениям в целых числах — 0 баллов;

рассмотрение дискриминанта с переходом к уравнениям в целых числах; получилось уравнение вида $ab = 4000$, где a и b целые; число решений не найдено или найдено неверно — 7 баллов;

начало авторского решения; написано выражение $\frac{a}{1000 - a}$, которое должно быть целым, или другое аналогичное выражение; дальнейших продвижений нет — 4 балла;

кроме предыдущего, есть разумная попытка рассмотрения делителей 1000 с существенными проблемами (например, не объясняется, почему нужно рассматривать их или почему им соответствуют трехчлены с целыми коэффициентами) — 7 баллов;

авторское решение; потеряны отрицательные числа — минус 2 балла;

появление 33-го случая, который на самом деле не подходит, — минус 1 балл;

утверждается без доказательства то, что число делителей 1000 равно 16, — минус 2 балла.

10.3. Обозначим через O и H центр описанной окружности треугольника FIE и ортоцентр треугольника FAE соответственно. Заметим, что нам достаточно показать, что $OH \perp AI$, так как перпендикуляр из центра O на хорду TI является серединным перпендикуляром к ней.

Для начала покажем, что точки F, O, H и E лежат на одной окружности, а именно на окружности Γ, симметричной описанной окружности треугольника AEF относительно прямой FE. То, что на этой окружности лежит ортоцентр, хорошо известно.

Поскольку

$$\angle FIE = 90° + \frac{1}{2}\angle BAC > 90°,$$

точки I и O находятся в разных полуплоскостях относительно прямой EF, а значит, точки A и O

находятся в одной полуплоскости относительно этой прямой. Тогда

$$\angle FOE = 2(180° - \angle FIE) =$$
$$= 2\left(180° - 90° - \frac{1}{2}\angle BAC\right) = 180° - \angle BAC,$$

потому $O \in \Gamma$.

Если точки H и E лежат в разных полуплоскостях относительно FO, то

$$\angle OHE = \angle OFE = 90° - \frac{1}{2}\angle FOE = 90° - \angle FTE =$$
$$= 90° - \angle EIC = 90° - 90° + \frac{1}{2}\angle BAC = \angle IAB.$$

Поэтому, так как $EH \perp AF$, получаем: $OH \perp AI$.

Если же точки H и E лежат в одной полуплоскости относительно FO, то аналогичным образом докажем, что $\angle OHF = \angle IAC$, и также получим: $OH \perp AI$.

Таким образом, мы доказали, что если точки O и H различны, то прямая OH является серединным перпендикуляром к TI, а значит, $HT = HI$. Если же точки O и H совпадают, то H равноудалена от точек T и I, поскольку является центром окружности, на которой они лежат.

Критерии оценивания:

не разобран хотя бы один вырожденный случай (написанное решение для него не работает), например, $AB = AC$, или угол BAC прямой, или один из углов EFA или FEA прямой — минус 1 балл;

решение опирается на взаимное расположение точек, рассмотрен только один из возможных случаев — минус 2 балла;

доказано, что точки E, F, H, O (центр описанной окружности EFI) лежат на одной окружности — 6 баллов.

10.4. Построим ориентированный граф, вершинами которого будут учащиеся и преподаватели кружка, а ребро проводится от учителя к его ученику. Таким образом, наш граф представляет собой набор непересекающихся деревьев.

Пример. Возьмем путь на 201 вершине, ориентируем ребра сверху вниз и в нижние 100 вершин поставим победителей IMO. Тогда все вершины, кроме самой нижней, будут народными учителями.

Оценка. Рассмотрим все вершины, которые соответствуют народным учителям и никакой из предков которых не является народным учителем. Пусть в поддереве (не считая саму вершину) некоторой такой вершины s победителей IMO. Поскольку выбранной вершине соответствует народный учитель, среди его последователей не больше s человек, не являющихся победителями IMO. Значит, всего в поддереве (считая корень) не больше $(2s + 1)$ вершин. Из них народным учителям могут соответствовать не больше $2s$ вершин, так как найдется хотя бы один человек, который никого не учил. Таким образом, число народных учителей в поддереве не может превышать число победителей IMO больше, чем в 2 раза.

Поскольку поддеревья, соответствующие выбранным нами народным учителям, не пересекаются, просуммировав по ним число народных учителей, получим, что оно не превышает удвоенного числа победителей, то есть 200.

Ответ: 200.

Критерии оценивания:

верная оценка — 11 баллов;

верный пример, возможно, с неверной оценкой (например, с суммированием победителей по несколько раз) — 4 балла;

пример на 199, легко превращающийся в пример на 200, — 2 балла;

другой неверный пример — 0 баллов;

пример + идея рассматривать народных учителей, которые не являются последователями других народных учителей, без дальнейших продвижений — 6 баллов;

решение аналогично авторскому; без пояснений предполагается, что корень дерева — народный преподаватель ,— 9 баллов;

решение аналогично авторскому; потеряно утверждение, что в дереве есть лист, не корень, он не народный учитель — 13 баллов.

10.5. Заметим, что проекции отрезка AS на стороны AB и AC равны, потому без ограничения общности будем считать, что $AB > AC$. Обозначим через K и M проекции точки S на стороны AB и BC соответственно. Заметим, что точка M — середина отрезка BC и что она лежит на отрезке BL. Четырехугольник $BKMS$ вписанный, поэтому

$$\angle AKL < \angle AKM = \angle BSM =$$
$$= 90° - \angle CBS = 90° - \angle BAS = 90° - \angle KAL,$$

потому

$$\angle AKL + \angle KAL = 90°,$$

следовательно, угол KLA тупой, откуда $AK > AL$.

Критерии оценивания:

сформулировано, что проекции точки S на прямые AB и AC и середина отрезка DC лежат на одной прямой — прямой Симпсона, и нет других комментариев про взаимное расположение проекций — минус 2 балла;

без доказательства используется, что точка K лежит на отрезке AB; если не применим предыдущий критерий — минус 6 баллов;

неравенство делится на косинус половины угла треугольника; ничего не сказано про положительность косинуса — минус 2 балла;

доказано нестрогое неравенство — минус 3 балла;

не разобран хотя бы один вырожденный случай (написанное решение для него не работает) — минус 2 балла;

используется утверждение, что медиана не короче биссектрисы, без доказательства — минус 2 балла.

10.6. *Примеры*. 1) 1, 1, 1; 2) 1, 1, 2; 3) 1, 2, 6, 2, 1.

Оценка. Предположим противное: пусть нам удалось придумать расстановку, в которой одно из отношений не меньше 4. Пусть по кругу стоят числа $a_0, \ldots, a_{n-1}$ (позиции будут нумероваться по модулю n).

Если ближайшее число к $\sqrt{a_i a_{i+2}}$ это s, то

$$a_i a_{i+2} \le s(s+1),$$

то есть среди этих чисел есть число, которое не больше s. Также для любого натурального k не может быть такого, что одно из этих чисел больше sk, а другое больше $\frac{s}{k}$, потому что

$$(sk+1)\cdot\frac{s+1}{k} = s^2+s+\frac{s+1}{k} > s(s+1).$$

Пусть, не умаляя общности, мы поделили a_0 на округленное число $\sqrt{a_{n-1}a_1}$ и получили хотя бы 4. Тогда какое-то из чисел a_1 или a_{n-1} хотя бы в 4 раза меньше, чем a_0. Не умаляя общности $\frac{a_0}{a_1} \ge 4$.

Пусть $x_i = \frac{a_i}{a_{i+1}}$, тогда $x_0 \ge 4$. Произведение всех иксов равно 1, значит, есть $x_i < 1$. Рассмотрим минимальное j такое, что $x_j \le 3$, Тогда $x_j = 3$, так как иначе рядом с числом a_j есть одно число больше $3a_j$, а другое число больше $\frac{a_j}{3}$. Противоречие с уже доказанным для $k = 3$.

Таким образом, у нас есть $x_j = 3$. Заметим, что

$$\frac{x_t}{x_{t+1}} = \frac{a_t a_{t+2}}{a_{t+1}^2} \le \frac{a_{t+1}\left(a_{t+1}+1\right)}{a_{t+1}^2} = 1+\frac{1}{a_{t+1}}.$$

Неравенство следует из того, что при $a_{t+1} \vdots s$

$$a_t a_{t+2} \le s(s+1).$$

Поэтому

$$\frac{4}{3} \le \frac{x_0}{x_j} = \frac{x_0 x_1}{x_1 x_2}\cdots\frac{x_{j-1}}{x_j} \le \left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_j}\right).$$

Но $a_j = 3a_{j+1}$, тогда $a_{j+1} \ge 2$, то есть $a_j \ge 6$. При этом для k от 0 до j: $a_{j-k} \ge 3^k a_j$, потому что отношения соседних не меньше 3. Тогда

$$\frac{4}{3} \le \left(1+\frac{1}{6}\right)\left(1+\frac{1}{18}\right)\ldots$$

То есть

$$\frac{3}{4} \ge \left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{19}\right)\ldots$$

Но по индукции верно неравенство

$$(1-u_1)\ldots(1-u_n) \ge 1-u_1-\ldots-u_n.$$

Следовательно,

$$\frac{3}{4} \ge 1-\frac{1}{7}-\frac{1}{19}-\frac{1}{55}-\ldots > 1-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}-\ldots > 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Противоречие. Таким образом, отношения больше 3 получить невозможно.

Ответ: 1, 2, 3.

Критерии оценивания:

пример для 3 — 2 балла;

примеры для 1 и 2 — 2 балла;

пример только для 1 или только для 2 — 0 баллов.

11 класс

11.1. Заметим, что

$$2024 = 1024 + 1000 = 4^5 + 10^3.$$

Ответ: можно.

Критерии оценивания:

только верный ответ — 0 баллов;

сформулировано и, возможно, доказано, что если $a^5 + b^3 = 2024$, то $a < 5$, или аналогичное. Далее верный результат не получен (например, далее ничего нет, или разобраны не все случаи, или результат неверен из-за арифметической ошибки) — 8 баллов.

11.2. Остаток от деления числа на 9 равен остатку суммы цифр числа при делении на 9. Мысленно выкинем из числа все девятки, так как они не меняют остаток суммы цифр при делении на 9. В нашем числе есть 10^8 восьмерок, а остальных цифр 10 + 100 + … = 11 111 110. Разобьем наши 111 111 110 цифр на 11 111 111 блоков по десять цифр. Если в каждом блоке не больше 9 восьмерок, то всего их не более чем $9 \cdot 11\,111\,111 < 10^8$, значит, найдется блок из 10 подряд идущих восьмерок. Пусть после стирания первой из них (если идти справа налево) сумма оставшихся цифр равна x. Тогда при последовательном стирании следующих восьми восьмерок суммы оставшихся цифр равны $(x-8)$, $(x-16)$, …, $(x-64)$. Эти девять чисел дают попарно различные остатки при делении на девять (разность любых двух различных из них не кратна 9, ибо числа 8, 16, …, 64 не кратны 9), потому среди них найдется кратное девяти.

Ответ: утверждение верно.

Критерии оценивания:

под восьмерками «подряд» ниже подразумеваются такие восьмерки, между которыми нет цифр, отличных от девяток (и от самих этих восьмерок). Если в работе «доказательство» того, что в числе найдется девять восьмерок «подряд», состоит лишь из ссылки на то, что восьмерок больше $\frac{8}{9}$ от 111 111 110 — всех отличных от девяток цифр, то работа оценивается так же, как если бы в ней вообще не было попытки доказательства приведенного утверждения. Аналогично с утверждением про восемь восьмерок «подряд»;

только верный ответ, и/или формулировка признака делимости на 9, и/или наблюдение, что девятки «можно выкинуть», и/или аналогичное — 0 баллов;

есть рассуждение вида «Когда вычеркиваются по одной подряд ищущие восьмерки, то остаток остающегося от деления на 9 каждый раз меняется на 1, поэтому если много подряд вычеркнуть, то где-то будет кратное 9», а далее утверждается, что «Восьмерок много, а поэтому где-то будет много подряд», при этом строгий смысл слова «много» никак не прояснен; сюда же относится случай, когда вместо слова «много» написано конкретное число, большее 10; других продвижений нет — 4 балла;

сформулировано, что найдется 8 восьмерок «подряд»; далее нужное утверждение выведено в предположении (возможно, неявном), что самая левая из них — не первая цифра в числе, а самая правая — не последняя цифра в числе; других продвижений нет — 4 балла;

сформулировано, что найдется 9 восьмерок «подряд»; далее нужное утверждение выведено в предположении (возможно, неявном), что самая левая из них — не первая цифра в числе; других продвижений нет — 6 баллов;

задача полностью сведена к доказательству того, что найдется 10 восьмерок «подряд», или того, что найдется 9 подряд, или того, что найдется 8 «подряд» среди цифр со второй по предпоследнюю; других продвижений нет — 8 баллов;

доказано, что найдется восемь восьмерок «подряд»; доказательство легко адаптируется к доказательству того, что они найдутся и среди цифр со второй по предпоследнюю; далее нужное утверждение выведено в предположении (возможно, неявном), что самая левая из них — не первая цифра в числе, а самая правая — не последняя цифра в числе; а эти случаи не разобраны или разобраны неверно — 11 баллов;

доказано, что найдется девять восьмерок «подряд», далее нужное утверждение выведено в предположении (возможно, неявном), что самая левая из них — не первая цифра в числе; случай, когда она первая, не разобран или разобран неверно — 13 баллов.

11.3. Пусть окружность из условия пересекает отрезок AB в точке P, а продолжение отрезка CD — в точке Q. Заметим, что Q лежит именно на продолжении CD за точку D, ибо в противном случае точка E лежала бы строго внутри треугольника QAD и не лежала бы на его описанной окружности, что противоречит условию. Кроме того, $P \neq B$, так как иначе прямая BD имела бы с окружностью из условия три попарно различные общие точки: E, D, B.

Так как хорды, на которые опираются равные вписанные углы, равны, то достаточно доказать, что $\angle PEA = \angle DEQ$. Это и сделаем. Из теоремы о внешнем угле треугольника получаем:

$$\angle AEP = \angle BPE - \angle BAE$$

и

$$\angle DEQ = \angle CDE - \angle DQE,$$

поэтому нам достаточно проверить равенство

$$\angle BPE + \angle DQE = \angle CDE + \angle BAE.$$

Покажем, что каждая из этих сумм равна углу BEA. Действительно, пользуясь теоремой о внешнем угле треугольника, равнобедренностью треугольников ABC и BCD, а также тем, что A, P, E, D, Q — последовательные точки на окружости, имеем равенства

$$\angle BPE + \angle DQE = \angle EDA + \angle EAD = \angle BEA$$

и

$$\angle CDE + \angle BAE = \\ = \angle CBE + \angle BCE = \angle BEA.$$

Критерии оценивания:

оценка не снижается за отсутствие доказательства того, что Q лежит на луче CD, и того, что $P \neq B$; оценка не повышается за непосредственно доказательство этого;

задача только сведена к доказательству одного из утверждений: $\angle PEA = \angle DEQ$, $\angle (AB; PD) = \angle (PD; CD)$, $PD \parallel AQ$, или аналогичные переформулировки — 0 баллов;

задача решена только в предположении (возможно, неявном), что AB не параллельна CD, или что лучи AB и DC пересекаются, или что лучи BA и CD пересекаются, но решение напрямую переписывается в ориентированных углах и становится полностью верным — 13 баллов.

11.4. Ясно, что из четырех отрезков $a \le b \le c \le d$ можно составить четырехугольник тогда и только тогда, когда $a + b + c > d$. Поэтому из четырех чисел Фибоначчи: F_{a1}, F_{a2}, F_{a3}, F_{a4} $(0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4)$, можно составить треугольник тогда и только тогда, когда:

$$a_3 = a_4 - 1,\ a_2 = a_4 - 2.$$

В этом случае

$$F_{a1} + F_{a2} + F_{a3} > F_{a2} + F_{a3} = F_{a4},$$

а иначе

$$F_{a1} + F_{a2} + F_{a3} = \\ = F_{a3} + F_{a2} + F_{a1} \le F_{a4-1} + F_{a4-3} + F_{a4-4} = F_{a4},$$

то есть иначе нельзя. То есть подходят четверки, образованные какими-то тремя последовательными числами Фибоначчи и еще одним, меньшим их, и только такие четверки подходят. Перейдем от чисел Фибоначчи к их номерам: понятно, что искомых разбиений столько же, сколько разбиений на четверки чисел от 1 до $4n$ таких, что в каждой четверке есть три последовательных числа и одно, меньшее их; поэтому далее считаем количество таких разбиений. В каждом таком разбиении пронумеруем четверки натуральными числами от 1 до n всеми возможными способами (этим мы домножим количество способов на $n!$). Далее посчитаем количество способов разбить отрезки на такие занумерованные четверки.

Выберем произвольное разбиение на занумерованные четверки, пройдем по возрастанию по числам от 1 до $4n$. Проходя меньший элемент в j-й четверке, запишем «над ним» число j; проходя тройку больших элементов в j-й четверке, запишем «над ней» число j. Таким образом, разбиению сопоставилась последовательность из $2n$ чисел, в которой каждое из чисел 1, ..., n встречается ровно 2 раза.

Это соответствие взаимно однозначное, так как есть обратное. Выберем произвольную такую последовательность из $2n$ чисел, последовательно пройдемся по ее членам, записывая последовательные натуральные числа (начиная с единицы) и относя их к четверкам следующим образом. Встретив число j в первый раз — запишем «над ним» одно следующее число и отнесем его к j-й четверке, а встретив во второй раз — запишем «над ним» три следующих натуральных числа и отнесем их к j-й четверке. Ясно, что будут выписаны в точности числа от 1 до $4n$, и для каждого натурального j, не превосходящего n, к j-й четверке будут отнесены четыре числа, образующие подходящую четверку. По построению тривиально, что построенные соответствия взаимно обратны друг другу.

Итак, количество разбиений на занумерованные четверки совпадает с количеством последовательностей из $2n$ чисел, в которых каждое из чисел 1, ..., n встречается ровно 2 раза. А таких последовательностей ровно $\frac{(2n)!}{2^n}$. Разделив на $n!$, получаем окончательный ответ на исходный вопрос задачи:

$$\frac{(2n)!}{2^n n!}=\frac{(2n)!}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}=(2n-1)!!.$$

Ответ: $(2n-1)!!$.

Критерии оценивания:

оценка не снижается за отсутствие доказательства утверждения «Из отрезков длиной $a \le b \le c \le d$ можно составить четырехугольник, следовательно, $a + b + c > d$». Оценка не повышается непосредственно за формулировку и доказательство этого утверждения;

приведен только верный ответ — 2 балла;

задача только сведена к нахождению количества способов разбить числа 1, 2, ..., $4n$ на четверки так, чтобы в каждой вместе с максимальным числом были 2 предыдущих, или аналогичное. Или доказано только, что если из четырех из данных отрезков можно составить четырехугольник и если x_k максимальный из них, то среди этих 4 отрезков есть x_{k-1} и x_{k-2} — 2 балла;

есть продвижения из обоих критериев выше; далее ничего содержательного — 4 балла;

задача верно сведена к нахождению количества способов разбить числа 1, 2, ..., $4n$ на четверки так, чтобы в каждой вместе с максимальным числом были 2 предыдущих; далее не доказано, но явно сформулировано, что «способы разбиения чисел на четверки находятся во взаимно однозначном соответствии со способами разбить числа 1, 2, ..., $2n$ на пары»; как именно строится соответствие, не описано; возможно, есть верный ответ; нет других продвижений в решении задачи — 6 баллов;

доказано, что ответом является количество способов разбить $2n$-элементное множество на неупорядоченные пары, но это количество найдено неверно или не найдено; в частности, сюда относится случай, когда при подсчете этого получен ответ в $n!$ раз больше правильного из-за того, что по факту подсчитано количество способов последовательно выбрать n непересекающихся пар, — 13 баллов;

из утверждения о том, что если из четырех из данных отрезков можно составить четырехугольник и если x_k максимальный из них, то среди этих 4 отрезков есть x_{k-1} и x_{k-2}, верно найдено искомое количество разбиений; доказательство утверждения неверное, или неполное, или отсутствует; более ничего — 13 баллов.

11.5. Рассмотрим граф, вершины которого отвечают племенам, а ребра проводятся между вершинами, которые отвечают соседним племенам. Согласно условию этот граф является деревом.

Докажем утверждение задачи индукцией по n — количеству вершин в дереве. База индукции при $n = 1$ очевидна, так как в этой ситуации вообще не происходит смены вероисповедания единственного существующего племени.

Предположим, что мы уже доказали утверждение задачи для любого n-вершинного дерева, покажем, что тогда оно верно и для любого $(n + 1)$-вершинного дерева G. Пусть v — произвольная висячая вершина дерева G и она соединена с вершиной u. Покажем, что ситуация, в которой идол v сильнее идола u, произойдет не больше одного раза.

Действительно, пусть в какой-то момент произошла указанная ситуация. Тогда прямо после этого идол u стал таким же, как идол v. После этой ситуации идол v менялся тогда и только тогда, когда идол u становился сильнее него. При этом при изменении идола v идол u либо оставался неизменным, либо становился сильнее уже нового идола v. Итак, в каждый момент времени будет происходить одна из двух ситуаций: либо у v и u одинаковый идол, либо идол v слабее идола u.

Значит, найдется такой момент времени, после которого вершина v вообще никак не влияет на то, как меняются идолы у остальных вершин, причем идол v не сильнее идола u. Тогда, согласно индукционному предположению, рано или поздно все вершины-племена, кроме, быть может, v, будут верить в одного и того же идола. В этот же момент времени идол v не сильнее идола u, поэтому на следующий день идолы у всех племен гарантированно будут одинаковыми.

Ответ: верно.

Критерии оценивания:

нет ничего, кроме переформулировки на языке графов; нет развитой идеи индукции; нет развитой идеи рассматривать висячую вершину; верного ответа нет — 0 баллов.

11.6. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_{2024}$ — основание пирамиды, а O — ее вершина вне основания. Пусть $B_1, B_2, \ldots, B_{2024}$ — точки, в которых сфера из условия касается отрезков $OA_1, OA_2, \ldots, OA_{2024}$ соответственно, а $T_1, T_2, \ldots, T_{2024}$ — точки, в которых она касается отрезков $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{2024}A_1$ соответственно. Далее: $OB_1 = OB_2 = \ldots = OB_{2024}$ (отрезки касательных к сфере из точки O), обозначим длину каждого из них за z. Рассмотрим треугольник A_1OA_2 и обозначим его угол при вершине O через φ (пусть он для определенности синий), а длины отрезков A_1B_1, A_2B_2 обозначим через x, y соответственно. Имеем:

$$A_1T_1 = A_1B_1 = x$$

(отрезки касательных к сфере из точки A_1), и аналогично

$$A_2T_1 = A_2B_2 = y.$$

Согласно теореме косинусов для треугольника A_1OA_2:

$$(x+y)^2 = (z+x)^2 + (z+y)^2 - 2(z+x)(z+y)\cos\varphi,$$

$$xy = z^2 + xz + yz - (z+x)(z+y)\cos\varphi.$$

Откуда, прибавив к обеим частям xy, получим:

$$2xy = (z+x)(z+y)(1-\cos\varphi).$$

Или

$$\sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1-\cos\varphi}{2} = \frac{xy}{(z+x)(z+y)} = \frac{A_1B_1\cdot A_2B_2}{OA_1\cdot OA_2}.$$

Аналогично получаем равенства для всех синих углов; перемножив их, получим, что квадрат произведения синусов половинок синих углов равен

$$\frac{A_1B_1\cdot A_2B_2\cdot\ldots\cdot A_{2024}B_{2024}}{OA_1\cdot OA_2\cdot\ldots\cdot OA_{2024}}.$$

Аналогично этому же произведению равен квадрат произведения синусов половинок красных углов. Осталось лишь заметить, что оба произведения положительны, поэтому и сами они равны.

Критерии оценивания:

не приведены.

КАК СТАТЬ АВТОРОМ ЖУРНАЛА «МАТЕМАТИКА»?

Сделать это несложно: надо лишь написать статью и прислать ее в редакцию журнала. И еще одно условие — она должна быть интересна и полезна вашим коллегам. Требования к оформлению статьи:

- Материал должен быть напечатан на компьютере или на пишущей машинке.

- Рисунки должны быть четкими, аккуратными, выполненными на белой нелинованной или клетчатой бумаге с помощью чертежных инструментов. Если вы хорошо владеете компьютером, можете воспользоваться для этого программой Corel Draw.

- Рисунки надо пронумеровать, нумерация должна соответствовать их нумерации в тексте.

- Фотографии должны быть цветными. Формат фотографий, отпечатанных на бумаге, не менее 10 × 15 см. Размер цифровых фотографий не менее 800 × 600 пикселей, формат JPG, качество, используемое при сохранении JPG-файлов, высокое (high).

Прислать статью можно по почте или по электронной почте. Всю необходимую для этого информацию вы найдете на странице 2 журнала.