V МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПРАЗДНИК В «МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ВЕРТИКАЛИ»

Задачи и решения подготовили:
Э. АКОПЯН, А. БЛИНКОВ, Т. ГОЛЕНИЩЕВА-КУТУЗОВА, А. ГРИБАЛКО, С. ДОРИЧЕНКО, М. ЕВДОКИМОВ, П. ЗАКОРКО, А. ЗАСЛАВСКИЙ, О. ЗАСЛАВСКИЙ, Т. КАЗИЦЫНА, В. КЛЕПЦЫН, М. КОЛОДЕЙ, Т. КОРЧЕМКИНА, Г. МЕРЗОН, Г. МИНАЕВ, В. РАДИОНОВ, И. РАСКИНА, И. РУССКИХ, Б. ФРЕНКИН, А. ХАЧАТУРЯН, М. ХАЧАТУРЯН, Е. ЧЕРНЫШЕВА, А. ШАПОВАЛОВ, И. ЯЩЕНКО

Материалы предыдущих лет публикуются на сайте mccme.ru/matprazdnik

Математический праздник для школьников 6-х и 7-х классов проходит ежегодно с 1990 года, то есть почти 35 лет. В первые годы олимпиада проходила в различных зданиях Московского государственного университета, в последние годы — во множестве точек в Москве, и не только.

С 2020 года параллельно с классическим Математическим праздником проходит Математический праздник в «Математической вертикали», задачи на нем более простые. Он также проводится в очном формате, на выполнение заданий отводится 2 часа (120 минут).

1 декабря 2024 г. впервые, в рамках Дня математика, прошла интернет-олимпиада для учащихся 6–7-х классов под названием «Приглашение на Математический праздник».

Принять участие в ней могли все желающие через систему «Сириус. онлайн»; зарегистрироваться можно было заранее или непосредственно перед олимпиадой. Московские школьники могли принять участие в олимпиаде через МЭШ.

Условия задач

6 класс

1. **(*4 балла*) (*Т. Казицына*) Белая, серая, черная, рыжая и желтая мышки едят сыр только своего цвета. Федя знает, что мышки живут в пяти норках вдоль стены (рис. 1), при этом белая мышка живет рядом с серой и рядом с черной, а рыжая и серая не живут рядом. Федя положил перед норками сыр: перед первой (самой левой) норкой — серый, перед второй — рыжий, перед третьей — белый, перед четвертой — желтый, перед пятой — черный. В результате ни один кусок не оказался съеден. Для каждой норки запишите, какая мышка в ней живет.**

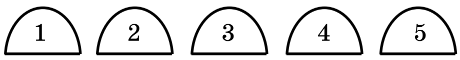

Рис. 1

2. **(*5 баллов*) (*Т. Казицына*) У Кати и Маши расчески одинаковой длины. У каждой расчески все зубчики одинаковые, а расстояния между зубчиками равны ширине зубчика. В Катиной расческе 11 зубчиков (рис. 2). Сколько зубчиков в Машиной расческе, если они в пять раз уже зубчиков Катиной расчески?**

Рис. 2

3. (*5 баллов*) (*Т. Казицына*) Из прямоугольника 3×6 вырезали одну клетку (рис. 3). Присоедините эту клетку к прямоугольнику в другом месте так, чтобы получилась фигура, которую можно разрезать на две одинаковые. Нарисуйте получившуюся фигуру и как ее нужно разрезать.

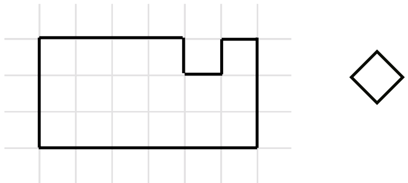

Рис. 3

4. (*7 баллов*) (*А. Шаповалов*) В сумме

П,Я + Т,Ь + Д,Р + О,Б + Е,Й

все цифры зашифрованы буквами (разными буквами — разные цифры). Оказалось, что все пять слагаемых нецелые, но сама сумма является целым числом. Каким именно?

а) (*4 балла*) Приведите пример, как такое может быть.

б) (*3 балла*) Найдите все целые числа, которым может равняться такая сумма. *Для каждого возможного значения приведите пример, как оно получается.*

5. (*8 баллов*) (*М. Евдокимов*) Миша сложил из восьми брусков куб (рис. 4). Все бруски имеют один и тот же объем, серые бруски одинаковые, белые бруски тоже одинаковые.

а) (*3 балла*) Во сколько раз короткое ребро черного бруска меньше ребра куба?

б) (*5 баллов*) Какую часть ребра куба составляют длина, ширина и высота белого бруска?

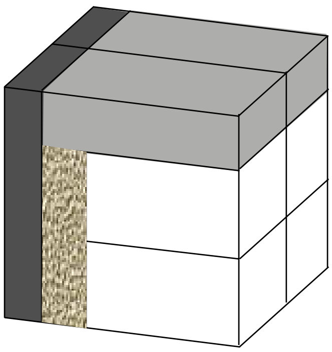

Рис. 4

6. (*9 баллов*) (*А. Шаповалов*) Решил шах проверить придворного мудреца. «Вот тебе шесть шкатулок, — сказал шах, — с надписями 1, 2, 3, 4, 5, 6 на крышках. В каждой шкатулке золотая монета, которая весит ровно столько граммов, сколько написано. Ты расставляешь шкатулки как угодно в клетках прямоугольника, который я тебе укажу. Потом я втайне от тебя меняю местами монеты в каких-то двух шкатулках, стоящих в соседних по стороне клетках (или ничего не меняю). Затем ты укажешь на несколько шкатулок, а я назову тебе общий вес монет в них. Если после этого правильно определишь, какие монеты я переложил, останешься при дворе. А не сможешь — прогоню вон!»

Как может действовать мудрец, чтобы выдержать испытание, если прямоугольник, в клетках которого нужно расставить шкатулки, имеет размер:

а) (*4 балла*) 1×6; б) (*5 баллов*) 2×3?

7 класс

1. (*4 балла*) (*Т. Казицына*) У Кати и Маши расчески одинаковой длины. У каждой расчески все зубчики одинаковые, а расстояния между зубчиками равны ширине зубчика. В Катиной расческе 11 зубчиков (см. рис. 2). Сколько зубчиков в Машиной расческе, если зубчики в пять раз уже зубчиков Катиной расчески?

2. (*4 балла*) (*А. Шаповалов*) В сумме

П,Я + Т,Ь + Д,Р + О,Б + Е,Й

все цифры зашифрованы буквами (разными буквами — разные цифры). Оказалось, что все пять слагаемых не целые, но сама сумма является целым числом. Приведите пример, как такое может быть.

3. (*5 балла*) (*И. Русских*) Коля пришел в музей современного искусства и увидел квадратную картину в раме необычной формы (рис. 5), состоящей из 21 равного треугольника. Коля заинтересовался, чему равны углы этих треугольников. Помогите ему их найти.

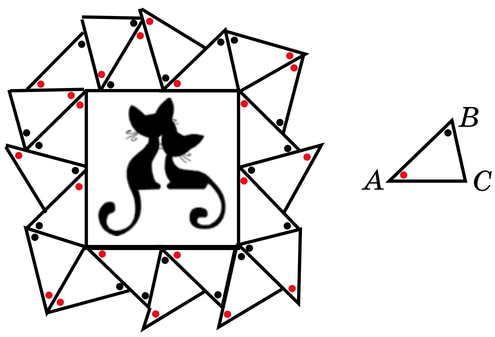

Рис. 5

4. (*5 баллов*) (*И. Ященко*) Расставьте в клетки квадрата 3×3 различные целые положительные числа, каждое из которых меньше 20, так, чтобы в любой паре соседних по стороне клеток одно число делилось на другое.

5. (*7 баллов*) (*Т. Голенищева-Кутузова*) На продолжении основания AC равнобедренного треугольника ABC выбрали точку K так, что

$CK = 1$ (рис. 6). Точка H на стороне AB такова, что KH и AB перпендикулярны, $AH = 1$. Найдите периметр треугольника ABC, если $AC = 2$.

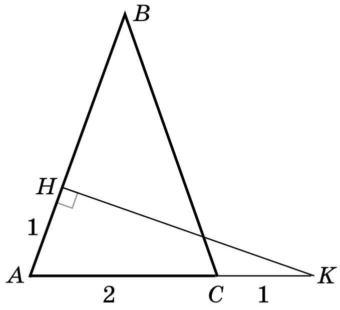

Рис. 6

6. (*9 баллов*) (*А. Шаповалов*) Решил шах проверить придворного мудреца. «Вот тебе шесть шкатулок, — сказал шах, — с надписями 1, 2, 3, 4, 5, 6 на крышках. В каждой шкатулке золотая монета, которая весит ровно столько граммов, сколько написано. Ты расставляешь шкатулки как угодно в клетках прямоугольника, который я тебе укажу. Потом я втайне от тебя меняю местами монеты в каких-то двух шкатулках, стоящих в соседних по стороне клетках (или ничего не меняю). Затем ты укажешь на несколько шкатулок, а я назову тебе общий вес монет в них. Если после этого правильно определишь, какие монеты я переложил, останешься при дворе. А не сможешь — прогоню вон!»

Как может действовать мудрец, чтобы выдержать испытание, если прямоугольник, в клетках которого нужно расставить шкатулки, имеет размер:

а) (*4 балла*) 1×6; б) (*5 баллов*) 2×3?

Ответы, решении, комментарии и критерии проверки

6 класс

1. В первой норке живет рыжая мышка, во второй — желтая, в третьей — черная, в четвертой — белая, в пятой — серая.

Белая мышка живет между двумя другими, но не в третьей норке (иначе белый сыр перед ней был бы съеден). Значит, белая мышка живет либо во второй норке, либо в четвертой.

Если белая мышка живет во второй норке, то ее соседка, серая мышка, живет не в первой, а в третьей норке, черная — в первой, а рыжая живет не рядом с серой, то есть не в четвертой, а в оставшейся, пятой норке. Но тогда в четвертой должна жить желтая, а желтый сыр перед ней оказался не съеден — противоречие. Значит, белая мышка живет не во второй, а в четвертой норке.

Тогда ее соседка, черная мышка, живет в третьей норке, серая — в пятой; рыжая из оставшихся двух норок может жить только в первой, и тогда желтая — во второй (рис. 7).

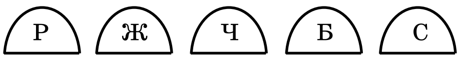

Рис. 7

Критерии проверки:

– верно вписаны все буквы/цвета — 4 балла;

– написано два ответа, один из которых верный, а второй нет, — 2 балла;

– вариант ЧБСРЖ (ни один сыр не съеден, но не учтено условие, что рыжая и серая мышки не живут рядом) — 1 балл;

– если не все норки заполнены — 0 баллов.

2. 53.

Наложим Катину расческу на Машину так, чтобы их края совместились. Один зубчик Катиной расчески закроет три зубчика Машиной и два промежутка между ними. В один просвет между Катиными зубчиками попадет три Машиных промежутка и два зубчика.

Всего на Катиной расческе 11 зубчиков и 10 промежутков, что соответствует $11 \cdot 3 + 10 \cdot 2 = 53$ зубчикам Машиной расчески.

Можно рассуждать по-другому. В Катиной расческе 11 зубчиков и 10 промежутков между ними. Всего $11 + 10 = 21$ одинаковый отрезок. В Машиной расческе таких отрезков $21 \cdot 5 = 105$, в них зубчиков на один больше, чем промежутков. То есть зубчиков 53, а промежутков 52.

Критерии проверки:

– верный ответ 53 — 5 баллов;

– ответ 52 (подсчитаны промежутки вместо зубчиков) — 1 балл;

– ответ 105 (подсчитано суммарное число зубчиков и промежутков) — 1 балл.

3. Несколько примеров присоединения и разрезания показаны на рисунке 8:

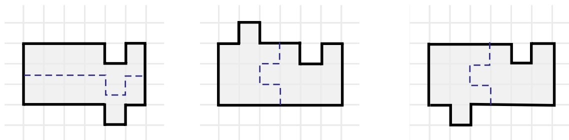

Рис. 8

Комментарий. Части одинаковые, а значит, можно одну из частей переместить как единое целое, чтобы она наложилась на другую. В первом примере для этого надо ее сдвинуть параллельно самой себе, во втором —повернуть вокруг некоторой точки, а в третьем — сначала сдвинуть, а потом перевернуть на другую сторону. Эти перемещения называют движениями плоскости, они не меняют расстояния между точками фигуры, и поэтому фигура сохраняет свою форму и размеры. Движения, которые мы видим в этих примерах, называются соответственно параллельным переносом, поворотом и скользящей симметрией.

Теорема Шаля гласит, что всякое движение плоскости относится к одному из трех данных типов. Мишель Шаль — известный французский геометр XIX века.

Критерии проверки:

– верно присоединена клетка, верное разрезание — 5 баллов;

– приведены примеры, среди которых есть как верный, так и неверные, — 4 балла;

– разрезание по форме верное, но неточное (ошибка на полклетки) — 2 балла;

например,

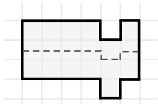

Рис. 9

– верно пришита клетка, разрезания нет или неверное — 0 баллов.

4. 27 (пример $0{,}5 + 1{,}6 + 7{,}4 + 8{,}3 + 9{,}2 = 27$) и 18 (пример $0{,}9 + 1{,}8 + 3{,}7 + 5{,}4 + 6{,}2 = 18$).

Сумма

$$Я + Ь + Р + Б + Й$$

должна оканчиваться нулем.

Сумму 10 получить можно, только если взять пять наименьших цифр ($0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$), но такой пример не получится составить, так как ноль не может стоять после запятой (тогда дробь будет целым числом вопреки условию).

Максимальная сумма пяти цифр:

$$9 + 8 + 7 + 6 + 5 = 35,$$

так что получить можно только суммы 20 и 30.

Заметим, что все буквы различны, то есть все десять цифр участвуют в записи по одному разу.

Общая сумма всех десяти цифр равна 45. Поэтому если сумма цифр после запятой равна 20, то при суммировании после запятой мы получим 0, а в предыдущий разряд перенесем 2. Эта 2 добавится к сумме цифр до запятой, которая равна $45 – 20 = 25$, и мы находим ответ: 27.

Аналогично если сумма цифр после запятой равна 30, то ответ будет равен $45 – 30 + 3 = 18$.

Комментарий. Примеров в этой задаче очень много: есть 86 400 способов получить сумму 27 и 72 000 способов получить сумму 18.

Критерии проверки:

а) Верно записана сумма (все слагаемые нецелые, цифры различные), но сама сумма не подсчитана — 4 балла;

– верно записана сумма (все слагаемые нецелые, цифры различные), но сама сумма подсчитана неверно — 3 балла;

– ответ записан в виде «Я = 1, Ь = 5, Р = 2, Б = 3, Й = 9» — приведены верные значения только для букв, обозначающих дробные части, — 3 балла;

– приведены примеры, среди которых есть как верный, так и неверные, либо в пункте «а» приведен неверный пример, а в пункте «б» есть верный — 2 балла;

– приведен пример, в котором все дробные части верны (различные, среди них нет нуля), а в целых частях одна ошибка — 1 балл.

При оценивании пункта «б» учитывается то, что написано в пункте «а».

б) Приведено два верных примера для обоих значений суммы, суммы подсчитаны верно, неверных примеров не приведено — 3 балла;

– приведено два верных примера для обоих значений суммы (неверных не приведено), но значения суммы не записаны — 2 балла;

– приведено два верных примера для обоих значений суммы (неверных не приведено), суммы вычислены, они получились разными, но при этом при вычислении допущена арифметическая ошибка — 2 балла;

– среди приведенных примеров есть оба верных (для двух разных значений суммы), но также есть и неверные — 1 балл.

5. а) В 8 раз; б) $\frac{7}{10}$, $\frac{1}{2}$ и $\frac{5}{14}$.

Будем считать, что ребро куба равно 1, тогда его объем тоже 1, а объем каждого из восьми брусков равен $\frac{1}{8}$. Очевидно, что ширина серого и белого брусков равна $\frac{1}{2}$. Два измерения черного бруска равны по 1, значит, третье равно $\frac{1}{8}$. То есть длина серого бруска равна $1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$.

Теперь мы можем найти высоту серого бруска, разделив объем на произведение длины и ширины:

$$\frac{1}{8}:\left(\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{7}.$$

Оставшаяся часть высоты куба — удвоенная высота белого бруска, значит, высота белого бруска равна $\left(1-\frac{2}{7}\right):2=\frac{5}{14}$.

Теперь найдем длину белого бруска тем же приемом, что и высоту серого бруска:

$$\frac{1}{8}:\left(\frac{5}{14}\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{10}.$$

Критерии проверки:

а) Верный ответ «8» — 3 балла;

– неверный ответ — 0 баллов.

б) Среди ответов есть несокращенная дробь, равная $\frac{1}{2}$, но записанная не в виде $\frac{1}{2}$ или 0,5, а остальные числа неверны (например $\frac{3}{6}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{4}$) — 0 баллов.

Следующие баллы складываются (если в ответ вынесено не больше 3 чисел).

б) Среди ответов есть $\frac{1}{2}$ или 0,5. Либо есть несокращенная дробь, равная $\frac{1}{2}$, и при этом среди остальных чисел есть еще хотя бы одно верное (равное $\frac{5}{14}$ или $\frac{7}{10}$) — добавляется 1 балл;

– среди ответов есть число $\frac{5}{14}$ — добавляются 2 балла;

– среди ответов есть число $\frac{7}{10}$ — добавляются 2 балла.

Если все три дроби верны, но записаны в несокращенном виде, то оценка не снижается.

6. а) Мудрец может расположить шкатулки, например, так:

1	6	2	5	3	4

а шаху указать те шкатулки, где на крышках написаны числа 1, 2 и 3.

Если шах ничего не поменяет, то сумма будет равна $1 + 2 + 3 = 6$.

Если он поменяет 6 и 1, то сумма увеличится на 5 и будет равна 11.

Если поменяет 6 и 2, то сумма увеличится на 4 и будет равна 10.

Если поменяет 5 и 2, то сумма увеличится на 3 и будет равна 9.

Если поменяет 5 и 3, то сумма увеличится на 2 и будет равна 8.

Если поменяет 4 и 3, то сумма увеличится на 1 и будет равна 7.

Комментарий. Шкатулки можно распределить по клеткам и по-другому, а вот спрашивать нужно либо про сумму монет в клетках, стоящих на четных местах, либо про сумму монет в клетках, стоящих на нечетных местах.

б) Мудрец может расположить шкатулки, например, так:

4	5	1
2	6	3

И указать шаху те шкатулки, где на крышках массы 2, 3 и 5. Если шах назовет сумму 10, значит, он ничего не менял.

Если он менял местами какие-то монеты, то сумма всякий раз будет другой:

Что менял шах	Сумма
Ничего	10
4 и 2	12
5 и 6	11
1 и 3	8
4 и 5	9
2 и 6	14
5 и 1	6
6 и 3	13

Как видим, все суммы разные, так что по сумме мудрец сможет понять, менялись ли монеты и какие, и назвать их правильно.

Комментарий. Как мог рассуждать мудрец, придумывая пример? Раскрасим прямоугольник 2×3 в шахматном порядке. Ясно, что надо назвать либо три белые клетки, либо три черные, в противном случае среди названных (или не названных) будут две соседние, и мудрец не сможет определить, поменял в них шах монеты или нет.

Возможные суммы в трех шкатулках меняются в диапазоне от 6 до 15, причем сумма от замены монет может увеличиться или уменьшиться на 1, 2, 3, 4 или 5. Чтобы восемь сумм (исходная и при любом из семи обменов) были различны, исходная сумма должна быть примерно в середине ряда (равняться 10 или 11). Дальше можно действовать подбором.

Критерии проверки:

а) Верно выделены клетки, про которые должен задать вопрос мудрец, — три клетки, идущие через одну (шахматная раскраска), — 1 балл;

– верно расставлены шкатулки по клеткам и верно выделены клетки, про которые спрашивать. Обоснования нет или голословно утверждается, что дальше по сумме можно определить, что поменял мудрец, или приводится несколько вариантов возможной замены монет, но рассмотрено не больше одного случая — 2 балла;

– верный пример расстановки и вопрос, но из шести возможных вариантов действий мудреца один пропущен — 3 балла;

– верный пример расстановки и вопрос, верно разобраны все 6 случаев — 4 балла.

б) Верно выделены клетки, про которые должен задать вопрос мудрец — три клетки «галочкой» (клетки, расположенные в шахматном порядке); при этом не утверждается, что, помимо этого, нужно задавать еще какие-то вопросы, — 1 балл;

– верно расставлены шкатулки по клеткам и верно выделены клетки, про которые спрашивать; разбор вариантов перестановок не проведен, но утверждается, что дальше все определить можно, или приводятся несколько примеров, но не рассмотрено больше одного случая — 3 балла;

– верное распределение монет по шкатулкам, верный вопрос, при разборе один из восьми вариантов упущен — 4 балла;

– верное распределение монет по шкатулкам, верный вопрос, правильно разобраны все 8 вариантов — 5 баллов.

7 класс

1. См. задачу 2 для 6-го класса.

2. См. задачу 4 (а) для 6-го класса.

3. 45°, 60° и 75°.

Посмотрим на левый верхний угол картины (см. рис. 5 из условий). Видно, что два угла, равных углу A, в сумме дают 90°. Значит, угол A равен 45°.

Посмотрим теперь на правый верхний угол картины: три угла, равных углу C, один угол, равный углу A, и угол квадрата составляют полный угол в 360°. Значит,

$$3\angle C = 360° - 90° - 45° = 225°,$$

то есть угол C равен $225° : 3 = 75°$. Тогда угол B равен $180° - 45° - 75° = 60°$.

Критерии проверки:

– верный ответ: $\angle A = 45°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 75°$, — 5 баллов;

– верный набор углов, но порядок перепутан — 3 балла;

– верно найдены два угла, третий не найден (поле не заполнено) — 3 балла;

– два угла найдены верно, а третий неверно — 2 балла;

– верно найден $\angle A = 45°$, остальные углы не найдены или найдены неверно — 1 балл;

– верно найден угол B, остальные углы не найдены или найдены неверно — 0 баллов;

– верно найден угол C, остальные углы не найдены или найдены неверно — 0 баллов.

4. Больше всего соседей у центральной клетки — поставим туда 1. В соседние с центральной клеткой поставим числа поменьше — 2, 3, 4, 5. На центральное число все они делятся (на 1 делится любое число). А чтобы условие выполнялось и для угловых клеток, поставим в каждый угол произведение его соседей. Так получается один из возможных примеров:

10	2	8
5	1	4
15	3	12

Критерии проверки:

– верный пример — 5 баллов;

– пример, в котором есть число, равное 20, а все остальные числа меньше — 1 балл;

– пример, в котором есть число, большее 20, — 0 баллов;

– в таблице есть повторяющиеся числа — 0 баллов;

– в таблице есть число 0 — 0 баллов.

5. 8.

Пусть M — середина AC, тогда $AM = MC = 1$; BM — медиана в равнобедренном треугольнике, проведенная к основанию, поэтому она также является высотой (рис. 11).

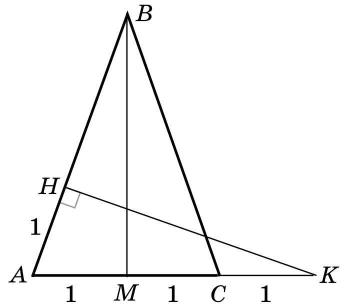

Рис. 11

Тогда треугольники AKH и ABM равны по стороне и двум прилежащим к ней углам:

$$AH = AM = 1,$$

угол A общий, углы AHK и AMB прямые, тогда

$$AB = AK = 3.$$

Так как треугольник ABC равнобедренный, то его периметр равен

$$2AB + AC = 2 \cdot 3 + 2 = 8.$$

Критерии проверки:

– указан только верный ответ «8» (решения нет) — 1 балл;

– указан верный ответ «8» и приведены верные утверждения, но они не доказаны (нет рисунка с отмеченными равными элементами) — 2 балла;

– есть план решения (выполнены дополнительные построения, показаны равные треугольники), равенство треугольников доказано не полностью или есть погрешности в этом доказательстве; по модулю это решение верное — 3 балла;

– обоснованно найдены длины всех отрезков на рисунке (есть все необходимые доказательства), но дальше при суммировании приписывается лишнее слагаемое / опускается слагаемое или использована неверная формула для периметра, отсюда получен неверный результат — 5 баллов;

– верное решение с арифметической ошибкой — 6 баллов;

– полное обоснованное решение, получен верный ответ — 7 баллов.

6. См. задачу 6 для 6-го класса.