

2. Инварианты

1. Разменный автомат меняет одну монету на три других. Можно ли с его помощью разменять металлический рубль на 26 монет?

2. На доске написаны числа от 1 до 20. Можно стереть любые два числа a и b и записать вместо них число $a + b - 1$. Такую операцию повторяем, пока не останется одно число. Какое число получится в итоге?

3. Над девятизначным числом разрешается производить следующее действие: любую цифру числа можно заменить на последнюю цифру суммы цифр этого числа. Можно ли с помощью таких действий из числа 133355555 получить число 123456789?

4. Четыре блохи играют в чехарду на большом листе клетчатой бумаги. Каждую секунду одна из блох перепрыгивает через какую-то другую и, летя над той же прямой, пролетает расстояние, вдвое большее, чем было между блохами до прыжка. Сейчас блохи сидят в четырёх вершинах одной клетки. Могут ли все четыре блохи через некоторое время оказаться на одной прямой?

5. На 44 деревьях, расположенных по окружности, сидели 44 весёлых чижа (на каждом дереве по чижу). Время от времени два чижа одновременно перелетают на соседние деревья в противоположных направлениях (один – по часовой стрелке, другой – против). Могут ли чижи собраться на одном дереве?

6. Можно ли разрезать выпуклый 17-угольник на 14 треугольников?

7. На доске в лаборатории написаны два числа. Каждый день старший научный сотрудник Петя стирает с доски оба числа и пишет вместо них их среднее арифметическое и среднее гармоническое. Утром первого дня на доске были написаны числа 1 и 2. Найдите произведение чисел, записанных на доске вечером 1999-го дня.

8. Вершины 2019-угольника покрашены в два цвета: 1010 синих и 1009 красных. Сторона с двумя красными вершинами помечена числом 2, сторона с двумя синими вершинами помечена числом $1/2$, а сторона с разноцветными вершинами помечена числом 1. Найдите все возможные значения произведения всех чисел, которыми помечены стороны.

9. В одном бидоне находится 1 л воды, а в другом — 1 л спирта. Разрешается переливать любую часть жидкости из одного бидона в другой. Можно ли добиться, чтобы в первом бидоне концентрация спирта оказалась больше 50%?

10. На квадратном поле 10×10 девять клеток 1×1 поросли бурьяном. После этого бурьян может распространиться на клетку, у которой не менее двух соседних клеток уже поросли бурьяном. Докажите, что тем не менее бурьян не сможет распространиться на все клетки.