3. Принцип Дирихле

1. Докажите, что на Земле найдётся два человека, родившихся одновременно с точностью до секунды.

2. В мешке 70 шаров, отличающихся только цветом: 20 красных, 20 синих, 20 жёлтых, остальные – чёрные и белые. Какое наименьшее число шаров надо вынуть из мешка, не видя их, чтобы среди них было не менее 10 шаров одного цвета?

3. Сто человек сидят за круглым столом, причем более половины из них — мужчины. Докажите, что какие-то двое из мужчин сидят друг напротив друга.

4. Несколько дуг окружности покрашены в красный цвет. Сумма длин окрашенных дуг меньше половины длины окружности. Докажите, что существует диаметр, оба конца которого не окрашены.

5. Какое наибольшее число королей можно поставить на шахматной доске так, чтобы никакие два из них не били друг друга?

6. Внутри равностороннего треугольника со стороной 1 см расположено 5 точек. Докажите, что среди них найдутся две на расстоянии ближе, чем 0,5 см, друг от друга.

7. Плоскость раскрашена в два цвета. Всегда ли найдутся две точки на расстоянии 1 м друг от друга, окрашенные в одинаковый цвет?

8. На плоскости даны шесть точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Каждая пара точек соединена отрезком синего или красного цвета. Докажите, что среди данных точек можно выбрать такие три, что все стороны образованного ими треугольника будут окрашены в один цвет.

9. Докажите, что в любой компании найдутся два человека, имеющие одинаковое число друзей (из этой компании).

10. Можно ли найти 57 различных двузначных чисел, чтобы сумма никаких двух из них не равнялась 100?

11. Даны 11 различных двухзначных чисел. Докажите, что среди них можно выбрать два числа так, чтобы разность между ними делилась на 10.

12. Дано 8 различных натуральных чисел, не больших 15. Докажите, что среди их положительных попарных разностей есть три одинаковых.

Дополнительные задачи

13. Можно ли в клетках квадратной таблицы 5×5 расставить числа 0, $+1$, -1 так, чтобы все суммы в каждом столбце, в каждой строке и на каждой из двух диагоналей были различны?

14. Имеется $2k + 1$ карточек, занумерованных числами от 1 до $2k + 1$. Какое наибольшее число карточек можно выбрать так, чтобы ни один из извлечённых номеров не был равен сумме двух других извлечённых номеров?

15. Первоклассник Вася знает тольку цифру 1. Докажите, что он сможет написать число, делящееся на 2027.

16.

a) В Простоквашинской начальной школе учится всего 20 детей. У каждых двух из них есть общий дед. Докажите, что у одного из дедов в этой школе учится не менее 14 внуков и внучек.

b) Имеется 2000 точек. Какое максимальное число троек можно из них выбрать так, чтобы каждые две тройки имели ровно одну общую точку?

17. В далекой стране А имеется 101 город, соединенный дорогами. А еще в этой далекой стране по некоторым дорогам можно двигаться только в одну сторону. У каждого города имеется всего 40 въездов и выездов на дороги. Доказать, что из каждого города можно попасть в любой другой, проехав не более чем по трём дорогам.