4. Принцип крайнего

1. Сколькими способами можно поставить в ряд числа от 1 до 100 так, чтобы соседние числа отличались на 1?

2. По кругу выписаны 2025 чисел, каждое из которых равно среднему арифметическому двух соседних. Докажите, что все числа равны.

3. Кубик Рубика $3 \times 3 \times 3$ надо распилить на единичные кубики. После распила части можно перекладывать и прикладывать так, чтобы можно было пилить несколько частей одновременно. Докажите, что понадобится не менее 6 прямых распилов.

4. Доказать, что у всякого выпуклого многогранника найдутся две грани с одинаковым числом сторон.

5. Плоскость разрезана вдоль n прямых общего положения. Докажите, что к каждой прямой примыкает треугольник.

6. Маляр–хамелеон ходит по клетчатой доске как хромая ладья (на одну клетку по вертикали или горизонтали). Попав в очередную клетку, он либо перекрашивается в её цвет, либо перекрашивает клетку в свой цвет. Белого маляра–хамелеона кладут на чёрную доску размером $8{\times}8$ клеток. Сможет ли он раскрасить её в шахматном порядке?

7. Из чисел $1, 2, 3, 4, \ldots, 199, 200$ произвольно выбрали 101 число. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два, одно из которых делится на другое.

8. Семь грибников собрали вместе 100 грибов, причем каждый собрал разное количество. Докажите, что какие-то три грибника собрали вместе не менее 50 грибов.

9. На доске 8×8 отмечены 64 точки — центры всех клеток. Можно ли отделить все точки друг от друга, проведя 13 прямых, не проходящих через эти точки?

10. Записаны четыре различных натуральных числа. Оказалось, что сумма чисел, им обратных, равна 1. Может ли среди записанных чисел отсутствовать число 2?

11. В стране несколько городов, попарные расстояния между которыми различны. Путешественник отправился из города A в самый удаленный от него город B, оттуда — в самый удаленный от него город C и т.д. Докажите, что если C не совпадает с A, то путешественник никогда не вернется в A.

12. С начала учебного года Андрей записывал свои оценки по математике. Получая очередную оценку (2, 3, 4 или 5), он называл её неожиданной, если до этого момента она встречалась реже каждой из всех остальных возможных оценок. (Например, если бы он получил с начала года подряд оценки 3, 4, 2, 5, 5, 5, 2, 3, 4, 3, то неожиданными были бы первая пятерка и вторая четвёрка.) За весь учебный год Андрей получил 40 оценок — по 10 пятерок, четвёрок, троек и двоек (неизвестно, в каком порядке). Можно ли точно сказать, сколько оценок были для него неожиданными?