

5. Теория чисел 1

1. Известно, что $15! = 130 * 674368000$. Найдите цифру, заменённую звездочкой.
 2. Запишите несколько раз подряд число 2013 так, чтобы получившееся число делилось на 9.
 3. Разложите на простые множители числа 111, 1111, 11111, 111111, 1111111.
-
4. (а) Дан осесимметричный выпуклый 101-угольник. Докажите, что ось симметрии проходит через одну из его вершин. (б) Что можно сказать в случае десятиугольника?
 5. На клетчатой бумаге нарисован замкнутый путь (по линиям сетки). Доказать, что он имеет чётную длину (сторона клетки имеет длину 1).
 6. На 99 карточках пишутся числа $1, 2, 3, \dots, 99$. Затем карточки перемешиваются, раскладываются чистыми сторонами вверх и на чистых сторонах снова пишутся числа $1, 2, 3, 4, \dots, 99$. Для каждой карточки числа, стоящие на ней, складываются и 99 полученных сумм перемножаются. Доказать, что в результате получится чётное число.
-
7. Решить в целых числах уравнение $xy + 3x - 5y = -3$.
 8. Докажите, что уравнение $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 1$ неразрешимо в натуральных числах.
-
9. Даны 11 различных двухзначных чисел. Докажите, что среди них можно выбрать два числа так, чтобы разность между ними делилась на 10.
 10. Дано 8 различных натуральных чисел, не больших 15. Докажите, что среди их положительных попарных разностей есть три одинаковых.
 11. Сумма двух натуральных чисел равна 201. Докажите, что произведение этих чисел не может делиться на 201.
 12. Перемножили несколько натуральных чисел и получили 224, причём самое маленькое число было ровно вдвое меньше самого большого. Сколько чисел перемножили?
 13. Из чисел $1, 2, 3, 4, \dots, 199, 200$ произвольно выбрали 101 число. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два, одно из которых делится на другое.
 14. Первоклассник Вася знает только цифру 1. Докажите, что он сможет написать число, делящееся на 2027.
 15. Доказать, что в последовательности $11, 111, 1111, 11111, \dots$ нет точных квадратов.
 16. Андрей написал в ряд несколько (не менее двух) подряд идущих трёхзначных чисел в порядке возрастания, получив одно большое число (например, 123124125). Оказалось, что полученное число делится на все числа от 1 до 9. Найдите наименьшее такое число.