

6. Теория чисел 2

1. Число x оканчивается на 5. Доказать, что x^2 оканчивается на 25.
2. Найдите все натуральные числа, при делении которых на 7 в частном получится то же число, что и в остатке.
3. Может ли сумма трёх последовательных натуральных чисел быть простым числом?

4. Сумма двух натуральных чисел равна 201. Докажите, что произведение этих чисел не может делиться на 201.

5. Из чисел $1, 2, 3, 4, \dots, 199, 200$ произвольно выбрали 101 число. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два, одно из которых делится на другое.

6. Перемножили несколько натуральных чисел и получили 224, причём самое маленькое число было ровно вдвое меньше самого большого. Сколько чисел перемножили?

7. (а) Докажите, что $a \equiv b \pmod{m}$ тогда и только тогда, когда $a - b$ делится на m .

(б) Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $a + c \equiv b + d \pmod{m}$.

(в) Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}$.

(г) Если $a \equiv b \pmod{m}$, n – натуральное число, то $a^n \equiv b^n \pmod{m}$.

8. Найдите остаток от деления 6^{100} на 7.

9. Найти последнюю цифру числа $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + 999 \cdot 1000$.

10. Доказать, что $776^{776} + 777^{777} + 778^{778}$ делится на 3.

11. Доказать, что $n^3 + 5n$ делится на 6 при любом целом n .

12. Доказать, что квадрат натурального числа не может оканчиваться на две нечётные цифры.

13. Первоклассник Вася знает только цифру 1. Докажите, что он сможет написать число, делящееся на 2027.

14. Андрей написал в ряд несколько (не менее двух) подряд идущих трёхзначных чисел в порядке возрастания, получив одно большое число (например, 123124125). Оказалось, что полученное число делится на все числа от 1 до 9. Найдите наименьшее такое число.

15. Отношением эквивалентности называется такая операция \sim_R , что

1) Для любого x верно $x \sim_R x$.

2) Для любых x и y если верно $x \sim_R y$, то верно $y \sim_R x$.

3) Для любых x, y и z если верно $x \sim_R y$ и $y \sim_R z$, то верно $x \sim_R z$

Примером отношения эквивалентности может служить подобие треугольников и параллельность прямых, если разрешить прямой быть параллельной самой себе.

Проверьте, что $x \equiv y \pmod{m}$ отношение эквивалентности для целых чисел, а " x делит y " не является отношением эквивалентности для целых чисел.