

## Дискретная непрерывность

**Задача 1.** В ряд выписаны целые числа, причём каждые два соседних отличаются ровно на 1. Самое левое число равно  $-10$ , а самое правое равно  $10$ . Докажите, что в этом ряду есть число  $0$ .

**Задача 2.** Первый тайм футбольного матча закончился со счетом  $0 : 1$ , а весь матч – со счетом  $4 : 3$ . Докажите, что в некоторый момент второго тайма счет на табло был ничейным.

**Теорема 1** (принцип дискретной непрерывности). *В ряд выписаны целые числа. Пусть выполняются два условия:*

- 1. Соседние числа отличаются не больше, чем на 1.*
- 2. Первое число в этом ряду меньше  $M$ , а последнее больше  $M$ . Тогда где-то в этом ряду встретится число  $M$ .*

*Ряд чисел обычно получается из наблюдений за некоторой меняющейся величиной.*

**Задача 3.** У Натана было число  $1$ . Каждую секунду он делал одно из трёх действий: умножал число на одну из его цифр, прибавлял одну из цифр числа или вычитал одну из цифр числа. Когда он закончил, у его числа было  $1007$  знаков. Докажите, что и  $100$  знаков в какой-то момент тоже было.

**Задача 4.** В ряд выложены  $200$  шаров, из них  $100$  чёрных и  $100$  красных, причём первый и последний шары – чёрные. Докажите, что можно убрать с правого края несколько шаров подряд так, чтобы красных и чёрных шаров осталось поровну

**Задача 5.** В ряд сидят  $15$  попугаев и  $15$  киви.

а) Первые  $7$  птиц — это попугаи, последние  $6$  — это киви. Докажите, что есть десять птиц, сидящих подряд, среди которых ровно  $5$  попугаев.

б) Докажите, что в любом случае есть десять птиц, сидящих подряд, среди которых ровно  $5$  попугаев.

**Задача 6.** Есть цепочка из  $80$  карамелек и  $160$  шоколадных конфет, выложенных в некотором порядке в один ряд. Два ребёнка хотят разделить всю цепочку на две части (можно разрезать только между соседними конфетами) так, чтобы каждому досталось ровно по половине карамелек и по половине шоколадных конфет. Какое минимальное число разрезов цепочки нужно сделать, чтобы это было возможно в любом расположении конфет?

**Задача 7.** На окружности отмечено  $40$  точек. Докажите, что можно провести диаметр, по обе стороны от которого находится по  $20$  точек.

**Задача 8.** В бесконечной последовательности натуральных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  каждое следующее число получается прибавлением к предыдущему одной из его ненулевых цифр. Докажите, что в этой последовательности найдётся чётное число.