



Графы 2

Определение 1. Графом называется любое множество точек на плоскости, соединённых рёбрами.

Определение 2. Степенью вершины в графе называется количество ребер, выходящих из неё.

Определение 3. Граф называется связным, если из любой вершины можно попасть в любую другую, проходя по ребрам.

Определение 4. Циклом в графе называется путь такой, что он начинается и заканчивается в одной и той же точке, а все рёбра в нём различны так же, как и все вершины (кроме совпадающих первой и последней) различны.

Определение 5. Связный граф без циклов называется деревом.

Определение 6. Правильной n -цветной раскраской графа называется раскраска его вершин в n цветов так, что если две вершины соединены ребром, то они покрашены в разные цвета.

Задача 1. Чему равна сумма всех степеней вершин графа? Докажите, что в графе количество вершин нечетной степени всегда четно.

Задача 2. Может ли в стране, где из каждого города выходит по 3 дороги, быть 100 дорог?

Задача 3. Можно ли на плоскости нарисовать 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с 3 другими?

Задача 4. В стране из каждого города выходит 100 дорог и из каждого города можно добраться в любой другой. Докажите, что если одну дорогу закрыть, то все так же из любого города можно попасть в любой другой.

Задача 5. В графе все вершины имеют степень 3. Докажите, что в нем есть цикл.

Задача 6. Докажите, что среди 6 друзей всегда есть либо 3 попарно знакомые, либо 3 попарно незнакомые. Приведите пример, когда это не верно для 5.

Задача 7. Докажите, что для графа на картинке не существует правильной 3-х цветной раскраски.

Задача 8. Найдите количество: а) графов с двумя вершинами;
б) графов с тремя рёбрами;
в) связных графов с тремя рёбрами;
г) несвязных графов с четырьмя вершинами.