Присоединённая алгебра Ли прямоугольной группы Кокстера

Яков Верёвкин

Высшая школа экономики, Московский Государственный Университет

Конференция “Алгебраическая топология, действия групп и комбинаторика”

Сочи, Сириус, 12–16 августа 2025

1. Полиэдральные и граф-произведения

Пусть $\mathcal{K}$ а симплициальный комплекс на множестве $[m] = \{1, 2, 3, \dots, m\}$, $\varnothing \in \mathcal{K}$.
$I = \{i_1, \dots, i_k\} \in \mathcal{K}$ называется симплексом.

$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}) = \{(X_1, A_1), \dots, (X_m, A_m)\}$ последовательность пар топологических пространств, $A_i \subset X_i$.

Пусть $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset [m]$, положим

$$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^I = Y_1 \times \dots \times Y_m \qquad \text{where } Y_i = \begin{cases} X_i & \text{if } i \in I, \\ A_i & \text{if } i \notin I. \end{cases}$$

$\mathcal{K}$-**полиэдральным произведением** $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})$ называется

$$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^{\mathcal{K}} := \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^{I} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} \Big(\prod_{i \in I} X_i \times \prod_{j \notin I} A_j \Big),$$

где объединение берётся внутри $X_1 \times \dots \times X_m$.

Обозначения: $(X, A)^{\mathcal{K}} := (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^{\mathcal{K}}$ где все $(X_i, A_i) = (X, A)$;

$\boldsymbol{X}^{\mathcal{K}} := (\boldsymbol{X}, pt)^{\mathcal{K}}$, $X^{\mathcal{K}} := (X, pt)^{\mathcal{K}}$.

Пример

Пусть $(X, A) = (S^1, pt)$, *где* S^1 *обозначает окружность. Тогда*

$$(S^1)^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (S^1)^I \subset (S^1)^m.$$

Когда $\mathcal{K} = \{\varnothing, \{1\}, \ldots, \{m\}\}$ *(дискретный набор из* m *точек), полиэдральное произведение* $(S^1)^{\mathcal{K}}$ *является букетом из* m *окружностей* $(S^1)^{\vee m}$.

Когда $\mathcal{K}$ *содержит все собственные подмножества* $[m]$ *(граница* $\partial\Delta^{m-1}$ *–* $(m-1)$*-мерного симплекса),* $(S^1)^{\mathcal{K}}$ *является толстым букетом* m *окружностей; это получается удалением клетки высшей размерности из* m*-мерного тора* $(S^1)^m$.

Вообще, для $\mathcal{K}$ *на* m *вершинах,* $(S^1)^{\vee m} \subset (S^1)^{\mathcal{K}} \subset (S^1)^m$.

Пример

Пусть $(X, A) = (\mathbb{R}, \mathbb{Z})$. *Тогда*

$$\mathcal{L}_{\mathcal{K}} := (\mathbb{R}, \mathbb{Z})^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (\mathbb{R}, \mathbb{Z})^{I} \subset \mathbb{R}^{m}.$$

Когда $\mathcal{K}$ *является дискретным набором из* m *точек,* $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ *является решёткой в* $\mathbb{R}^m$, *состоящей из всех прямых, параллельных координатным осям и проходящим через целочисленные точки.*

Когда $\mathcal{K} = \partial\Delta^{m-1}$, *комплекс* $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ *является объединением всех целочисленных гиперплоскостей, параллельных координатным гиперплоскостям.*

1. Полиэдральные и граф-произведения

Пусть $\boldsymbol{G} = (G_1, \dots, G_m)$ последовательность m дискретных групп, где $G_i \neq \{1\}$.

$\mathcal{K}$ – симплициальный комплекс на $[m] = \{1, 2, \dots, m\}$.

Определение

Граф-произведением групп $G_1, \dots, G_m$ является

$$\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}} := \mathop{\bigstar}_{k=1}^{m} G_k / (g_i g_j = g_j g_i \ \text{для } g_i \in G_i,\ g_j \in G_j,\ \{i,j\} \in \mathcal{K}),$$

где $\bigstar_{k=1}^{m} G_k$ обозначает свободное произведение групп G_k.

Граф-произведение $\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}}$ зависит только от 1-остова (графа) $\mathcal{K}$.

Пример

Пусть $G_i = \mathbb{Z}$. *Тогда* $\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}}$ *является* *прямоугольной группой Артина*

$$RA_{\mathcal{K}} = F(g_1, \dots, g_m) / (g_i g_j = g_j g_i \text{ для } \{i, j\} \in \mathcal{K}),$$

где $F(g_1, \dots, g_m)$ *является свободной группой с* m *образующими.*

Когда $\mathcal{K}$ *является полным симплексом, группа* $RA_{\mathcal{K}} = \mathbb{Z}^m$. *Когда* $\mathcal{K}$ *является дискретным набором из* m *точек, мы получаем свободную группу ранга* m.

Пример

Пусть $G_i = \mathbb{Z}_2$. *Тогда* $\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}}$ *является* *прямоугольной группой Кокстера*

$$RC_{\mathcal{K}} = F(g_1, \dots, g_m) / (g_i^2 = 1,\ g_i g_j = g_j g_i \text{ для } \{i, j\} \in \mathcal{K}).$$

Теорема

Пусть $RA_{\mathcal{K}}$ *– прямоугольная группа Артина.*

1. $\pi_1((S^1)^{\mathcal{K}}) \cong RA_{\mathcal{K}}$.
2. *Оба* $(S^1)^{\mathcal{K}}$ *и* $\mathcal{L}_{\mathcal{K}} = (\mathbb{R}, \mathbb{Z})^{\mathcal{K}}$ *асферическая тогда и только тогда, когда* $\mathcal{K}$ *– флаговый.*
3. $\pi_i((S^1)^{\mathcal{K}}) \cong \pi_i(\mathcal{L}_{\mathcal{K}})$ *для* $i \geqslant 2$.
4. $\pi_1(\mathcal{L}_{\mathcal{K}})$ *изоморфна коммутанту* $RA'_{\mathcal{K}}$.

Теорема

Пусть $RC_{\mathcal{K}}$ *– прямоугольная группа Кокстера.*

1. $\pi_1((\mathbb{R}P^\infty)^{\mathcal{K}}) \cong RC_{\mathcal{K}}$.
2. *Оба* $(\mathbb{R}P^\infty)^{\mathcal{K}}$ *и* $\mathcal{R}_{\mathcal{K}} = (D^1, S^0)^{\mathcal{K}}$ *асферические тогда и только тогда, когда* $\mathcal{K}$ *– флаговый.*
3. $\pi_i((\mathbb{R}P^\infty)^{\mathcal{K}}) \cong \pi_i(\mathcal{R}_{\mathcal{K}})$ *для* $i \geqslant 2$.
4. $\pi_1(\mathcal{R}_{\mathcal{K}})$ *изоморфна коммутанту* $RC'_{\mathcal{K}}$.

Пример

Пусть $\mathcal{K}$ является границей m-угольника.
В этом случае $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ гомеоморфен замкнутой ориентируемой поверхности рода $(m-4)2^{m-3}+1$.
(Это наблюдение направляет к работе Коксетера 1938 года.)
Следовательно, коммутант соответствующей прямоугольной группы Кокстера $RC_{\mathcal{K}}$ является группой поверхности.

Аналогично, когда $|\mathcal{K}| \cong S^2$ (что эквивалентно тому, что $\mathcal{K}$ является границей трёхмерного симплициального многогранника), $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ является трехмерным многообразием. Следовательно, коммутант соответствующей $RC_{\mathcal{K}}$ является группой 3-многообразия.

Теорема (Панов-В)

Пусть $RA_\mathcal{K}$ и $RC_\mathcal{K}$ — прямоугольные группы Артина и Кокстера, соответствующие симплициальному комплексу $\mathcal{K}$.

(a) *Коммутант $RA'_\mathcal{K}$ является свободной группой тогда и только тогда, когда $\mathcal{K}^1$ является хордовым графом.*

(b) *Коммутант $RC'_\mathcal{K}$ является свободной группой тогда и только тогда, когда $\mathcal{K}^1$ является хордовым графом.*

Часть (a) является результатом Servatius, Droms и Servatius.

Разница между (a) и (б) заключается в том, что коммутант $RA'_\mathcal{K}$ бесконечно-порождён, тогда как коммутант $RC'_\mathcal{K}$ – конечно-порождён.

Пусть G — группа. *Коммутатор* двух элементов $a, b \in G$, задаётся формулой $(a, b) = a^{-1}b^{-1}ab$.

Мы определим следующий вложенный коммутатор длины k

$$(q_{i_1}, q_{i_2}, \dots, q_{i_k}) := (\dots((q_{i_1}, q_{i_2}), q_{i_3}), \dots, q_{i_k}).$$

как *простой вложенный коммутатор* $q_{i_1}, q_{i_2}, \dots, q_{i_k}$.

Аналогично мы определяем *простой вложенный коммутатор Ли*

$$[\mu_{i_1}, \mu_{i_2}, \dots, \mu_{i_k}] := [\dots[[\mu_{i_1}, \mu_{i_2}], \mu_{i_3}], \dots, \mu_{i_k}].$$

Для любой группы G и любых трёх элементов $a, b, c \in G$ справедливы следующие *тождества Витта–Холла*:

$$\begin{aligned}
&(a, bc) = (a, c)(a, b)(a, b, c),\\
&(ab, c) = (a, c)(a, c, b)(b, c),\\
&(a, b, c)(b, c, a)(c, a, b) = (b, a)(c, a)(c, b)^a(a, b)(a, c)^b(b, c)^a\\
&\qquad\qquad (a, c)(c, a)^b,
\end{aligned} \tag{1}$$

где $a^b = b^{-1}ab$.

Пусть $H, W \subset G$ — подгруппы. Определим $(H, W) \subset G$ как подгруппу, порождённую всеми коммутаторами $(h, w), h \in H, w \in W$. В частности, *коммутант* G' группы G есть (G, G).

Определение

Для любой группы G положим $\gamma_1(G) = G$ и определим индуктивно $\gamma_{k+1}(G) = (\gamma_k(G), G)$. Полученная последовательность групп $\gamma_1(G), \gamma_2(G), \ldots, \gamma_k(G), \ldots$ называется *нижним центральным рядом* группы G.

Определения

Если $H \subset G$ – нормальная подгруппа, т. е. $H = g^{-1}Hg$ для всех $g \in G$, мы будем использовать обозначение $H \lhd G$.
В частности, $\gamma_{k+1}(G) \lhd \gamma_k(G)$, и фактор-группа $\gamma_k(G)/\gamma_{k+1}(G)$ является абелевой. Обозначим $L^k(G) := \gamma_k(G)/\gamma_{k+1}(G)$ и рассмотрим прямую сумму

$$L(G) := \bigoplus_{k=1}^{+\infty} L^k(G).$$

Возьмём $a_k \in \gamma_k(G) \subset G$, обозначим через $\overline{a}_k$ его класс сопряжённости в фактор-группе $L^k(G)$. Если $a_k \in \gamma_k(G)$, $a_l \in \gamma_l(G)$, тогда $(a_k, a_l) \in \gamma_{k+l}(G)$. Тогда тождества Витта-Холла дают, что $L(G)$ – градуированная алгебра Ли над $\mathbb{Z}$ (кольцо Ли) со скобкой Ли $[\overline{a}_k, \overline{a}_l] := \overline{(a_k, a_l)}$. Алгебра Ли $L(G)$ называется присоединённой алгеброй Ли группы G.

Теорема

Существует изоморфизм

$$H_k(\mathcal{R}_{\mathcal{K}};\mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{J\subset[m]} \widetilde{H}_{k-1}(\mathcal{K}_J)$$

для любых $k \geqslant 0$, *где* $\widetilde{H}_{k-1}(\mathcal{K}_J)$ *является приведёнными симплициальными гомологиями* $\mathcal{K}_J$.

Теорема (Панов-В)

Пусть $RC_{\mathcal{K}}$ *— прямоугольная группа Кокстера, соответствующая симплициальному комплексу* $\mathcal{K}$ *с* m *вершинами. Тогда коммутант* $RC'_{\mathcal{K}}$ *имеет конечный минимальный набор образующих, состоящий из* $\sum_{J\subset[m]} \operatorname{rank} \widetilde{H}_0(\mathcal{K}_J)$ *вложенных коммутаторов*

$$(g_i, g_j), \quad (g_i, g_j, g_{k_1}), \quad \ldots, \quad (g_i, g_j, g_{k_1}, g_{k_2}, \ldots, g_{k_{m-2}}), \tag{2}$$

где $i < j > k_1 > k_2 > \ldots > k_{\ell-2}$, $k_s \neq i$ *для всех* s, *и* i *— наименьшая вершина связной компоненты, не содержащей* j *подкомплекса* $\mathcal{K}_{\{k_1,\ldots,k_{\ell-2},j,i\}}$.

Следствие

Свободная абелева группа $H_1(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}) = RC'_{\mathcal{K}}/RC''_{\mathcal{K}}$ *ранга* $\sum_{J\subset[m]} \operatorname{rank} \widetilde{H}_0(\mathcal{K}_J)$ *имеет базис, состоящий из образов итерированных коммутаторов, описанных в теореме выше.*

2. Нижний центральный ряд прямоугольной группы Кокстера

Предложение

Пусть G — группа с образующими $g_i, i \in I$. k-й член $\gamma_k(G)$ нижнего центрального ряда порождается простыми вложенными коммутаторами длины, большей или равной k, от образующих и обратных к ним.

Следствие

Пусть $RC_{\mathcal{K}}$ — прямоугольная группа Кокстера с образующими g_i. Тогда группа $\gamma_k(RC_{\mathcal{K}})$ порождается коммутаторами длины, большей или равной k от образующих g_i.

Предложение

Квадрат любого элемента $\gamma_k(RC_{\mathcal{K}})$ содержится в $\gamma_{k+1}(RC_{\mathcal{K}})$.

Доказательство.

В этом доказательстве мы используем γ_k вместо $\gamma_k(RC_{\mathcal{K}})$ для удобства восприятия.

Пусть $a \in \gamma_k$. Если $k = 1$, тогда $a = \prod_{i=1}^{n} g_{k_i}$. Если $k > 1$, тогда $a = \prod_{i=1}^{n} a_i$, где $a_i = (b_i, g_{p_i})$ или $a_i = (g_{p_i}, b_i)$, $b_i \in \gamma_{k-1}$. Мы используем индукцию по n.

Пусть $n = 1$. Случай $k = 1$ очевиден (потому что $g_k^2 = 1$). Если $k > 1$, тогда $a = (b, g_i)$ или $a = (g_i, b)$ для некоторого $b \in \gamma_{k-1}$. Для $a = (b, g_i)$ мы имеем $a^2 = (b, g_i)(b, g_i) = (g_i, (b, g_i)) \in \gamma_{k+1}$, и для $a = (g_i, b)$ мы имеем $a^2 = (g_i, b)(g_i, b) = (g_i, (g_i, b)) \in \gamma_{k+1}$.

Предположим теперь, что утверждение доказано для $n - 1$. Пусть $a = \prod_{i=1}^{n} a_i$ и $a^2 = \prod_{i=1}^{n} a_i \cdot \prod_{i=1}^{n} a_i$. Мы имеем:

$$a_1 a_2 \cdots a_n a_1 a_2 \cdots a_n =$$

$$= (a_1^{-1}, (a_2 \cdots a_n)^{-1}) \cdot (a_2 \cdots a_n) a_1^2 (a_2 \cdots a_n)^{-1} \cdot (a_2 \cdots a_n)^2.$$

Очевидно, что первый множитель лежит в $\gamma_{2k} \subset \gamma_{k+1}$. Второй множитель лежит в γ_{k+1} как класс сопряжённости a_1^2 (из индукции). Последний множитель также лежит в γ_{k+1} из индукции.

Следствие

$L(RC_{\mathcal{K}})$ — алгебра Ли над $\mathbb{Z}_2$.

Через $FL_{\mathbb{Z}_2}\langle \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \rangle$ мы обозначим свободную градуированную алгебру Ли над $\mathbb{Z}_2$ с n порождающими μ_i, где $\deg \mu_i = 1$.
Для любого симплициального комплекса $\mathcal{K}$ мы рассмотрим *граф-алгебру Ли* над $\mathbb{Z}_2$:

$$L_{\mathcal{K}} := FL_{\mathbb{Z}_2}\langle \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \rangle / ([\mu_i, \mu_j] = 0 \text{ для } \{i, j\} \in \mathcal{K}).$$

Понятно, что $L_{\mathcal{K}}$ зависит только от 1-остова $\mathcal{K}^1$ (графа), однако, как и в случае прямоугольных групп Кокстера, нам удобнее работать с симплициальными комплексами .

Предложение

Существует эпиморфизм алгебр Ли $\varphi : L_{\mathcal{K}} \to L(RC_{\mathcal{K}})$.

Доказательство.

$L(RC_{\mathcal{K}})$ — алгебра Ли над $\mathbb{Z}_2$, порожденная элементами $\overline{g}_i \in \gamma_1(RC_{\mathcal{K}})/\gamma_2(RC_{\mathcal{K}}), i = 1, \ldots, m$. По определению свободной алгебры Ли имеем эпиморфизм

$$\widetilde{\varphi}\colon FL_{\mathbb{Z}_2}\langle \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \rangle \to L(RC_{\mathcal{K}}), \quad \mu_i \mapsto \overline{g}_i.$$

Так как существует соотношение $[\overline{g}_i, \overline{g}_j] = 0$ для $\{i, j\} \in \mathcal{K}$ в алгебре Ли $L(RC_{\mathcal{K}})$, эпиморфизм $\widetilde{\varphi}$ пропускается через искомый эпиморфизм φ. $\square$

На самом деле, гомоморфизм φ из предыдущего предложения не инъективен, а алгебры Ли $L_{\mathcal{K}}$ и $L(RC_{\mathcal{K}})$ не изоморфны. Это показывает разницу случая прямоугольных групп Кокстера от случая прямоугольных групп Артина, где ассоциированная алгебра Ли $L(RA_{\mathcal{K}})$ изоморфна граф-алгебре над $\mathbb{Z}$.

Пример

Пусть $\mathcal{K}$ *– дискретный набор из двух точек, т. е.* $\mathcal{K} = \{1, 2\}$*. Тогда* $L_{\mathcal{K}} = FL_{\mathbb{Z}_2}\langle\mu_1, \mu_2\rangle = FL_{\mathbb{Z}_2}\langle\mu_1\rangle * FL_{\mathbb{Z}_2}\langle\mu_2\rangle$ *(здесь и далее* $*$ *обозначает свободное произведение алгебр или групп). Нижний центральный ряд* $RC_{\mathcal{K}} = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ *следующий:* $\gamma_1(RC_{\mathcal{K}}) = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$*, и для* $k \geqslant 2$ *мы имеем* $\gamma_k(RC_{\mathcal{K}}) \cong \mathbb{Z}$ *— бесконечная циклическая группа, порожденная коммутатором* $(g_1, g_2, g_1, \ldots, g_1)$ *длины* k*. Предложение о квадрате даёт, что* $\gamma_k(RC_{\mathcal{K}})/\gamma_{k+1}(RC_{\mathcal{K}}) = \mathbb{Z}_2$ *для* $k > 1$*, и* $\gamma_1(RC_{\mathcal{K}})/\gamma_2(RC_{\mathcal{K}}) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$*. Рассмотрим алгебру* $L(RC_{\mathcal{K}})$*. Из аргументов выше,* $L(RC_{\mathcal{K}}) = (\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2) \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \cdots$*. Легко видеть, что* $L^k(RC_{\mathcal{K}}) \cong L^k_{\mathcal{K}}$ *для* $k = 1, 2$*. Но при этом* $L^3_{\mathcal{K}} \cong \mathbb{Z}_2\langle[\mu_1, \mu_2, \mu_1], [\mu_1, \mu_2, \mu_2]\rangle$*, тогда как* $L^3(RC_{\mathcal{K}}) \cong \mathbb{Z}_2$*. Таким образом,*

$$L^3(RC_{\mathcal{K}}) \cong L^3_{\mathcal{K}}/([\mu_1, \mu_2, \mu_1] = [\mu_1, \mu_2, \mu_2]).$$

Отсюда следует, что гомоморфизм φ *не инъективен.*

Предложение

Пусть $\mathcal{K}$ – дискретный набор из двух точек. Тогда

$$L(RC_{\mathcal{K}}) \cong L_{\mathcal{K}}\big/\big([a,\mu_1]=[a,\mu_2],\ \ [a,\underbrace{\mu_1,\ldots,\mu_1}_{2k+1},a]=0,\ k\geqslant 0\big),$$

где $a=[\mu_1,\mu_2]$.

Теорема

Пусть $\mathcal{K}$ – симплициальный комплекс на $[m]$, пусть $RC_{\mathcal{K}}$ – прямоугольная группа Кокстера, соответствующая $\mathcal{K}$, и $L(RC_{\mathcal{K}})$ – её присоединённая алгебра Ли. Тогда:

(a) $L^1(RC_{\mathcal{K}})$ *имеет базис* $\overline{g}_1, \ldots, \overline{g}_m$;

(b) $L^2(RC_{\mathcal{K}})$ *имеет базис, состоящий из коммутаторов* $[\overline{g}_i, \overline{g}_j]$ *с* $i < j$ *и* $\{i,j\} \notin \mathcal{K}$;

(c) $L^3(RC_{\mathcal{K}})$ *имеет базис, состоящий из*

- *коммутаторов* $[\overline{g}_i, \overline{g}_j, \overline{g}_j]$ *с* $i < j$ *и* $\{i,j\} \notin \mathcal{K}$;
- *коммутаторов* $[\overline{g}_i, \overline{g}_j, \overline{g}_k]$ *где* $i < j > k, i \neq k$ *и* i *— наименьшая вершина в компоненте связности* $\mathcal{K}_{\{i,j,k\}}$ *не содержащей* j.

Как следствие, мы получаем описание первых трех последовательных факторов нижнего центрального ряда для свободного произведения групп $\mathbb{Z}_2$.

Следствие

Пусть $\mathcal{K}$ – дискретный набор из m points, т. н. $RC_\mathcal{K} = \mathbb{Z}_2\langle g_1\rangle * \ldots * \mathbb{Z}_2\langle g_m\rangle$. Тогда:

(a) $L^1(RC_\mathcal{K})$ *имеет базис* $\overline{g}_1, \ldots, \overline{g}_m$;

(b) $L^2(RC_\mathcal{K})$ *имеет базис, состоящий из коммутаторов* $[\overline{g}_i, \overline{g}_j]$ *с* $i < j$;

(c) $L^3(RC_\mathcal{K})$ *имеет базис, состоящий из*
   - *коммутаторов* $[\overline{g}_i, \overline{g}_j, \overline{g}_j]$ *с* $i < j$;
   - *коммутаторов* $[\overline{g}_i, \overline{g}_j, \overline{g}_k]$ *с* $i < j > k$, $i \neq k$.

Пример

Рассмотрим симплициальные комплексы на 3 вершинах.

Пусть $\mathcal{K} = \underset{1}{\bullet}\quad\underset{2}{\bullet}\quad\underset{3}{\bullet}$. *Тогда* $L^3(RC_{\mathcal{K}})$ *имеет базис, состоящий из* 5 *коммутаторов:*
$[\overline{g}_1, \overline{g}_2, \overline{g}_2], [\overline{g}_2, \overline{g}_3, \overline{g}_3], [\overline{g}_1, \overline{g}_3, \overline{g}_3], [\overline{g}_1, \overline{g}_3, \overline{g}_2], [\overline{g}_2, \overline{g}_3, \overline{g}_1]$.

Пусть $\mathcal{K} = \underset{1}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\underset{2}{\bullet}\quad\underset{3}{\bullet}$. *Тогда* $L^3(RC_{\mathcal{K}})$ *имеет базис, состоящий из* 3 *коммутаторов:* $[\overline{g}_2, \overline{g}_3, \overline{g}_3], [\overline{g}_1, \overline{g}_3, \overline{g}_3], [\overline{g}_1, \overline{g}_3, \overline{g}_2]$.

Пусть $\mathcal{K} = \underset{1}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\underset{2}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\underset{3}{\bullet}$. *Тогда* $L^3(RC_{\mathcal{K}})$ *порождена коммутаторами* $[\overline{g}_1, \overline{g}_3, \overline{g}_3]$.

3. 4-я градуированная компонента

Предложение (Waldinger, 4.19)

Пусть $\mathcal{K}$ — дискретный набор из 3 точек, то есть $RC_{\mathcal{K}} = \mathbb{Z}_2\langle g_1\rangle * \mathbb{Z}_2\langle g_2\rangle * \mathbb{Z}_2\langle g_3\rangle$. Тогда $L^4(RC_{\mathcal{K}})$ имеет минимальный набор из 8 образующих.

Предложение (Waldinger, 4.19)

Пусть $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на 3 точках с единственным ребром, то есть $RC_{\mathcal{K}} = (\mathbb{Z}_2\langle g_1\rangle \oplus \mathbb{Z}_2\langle g_2\rangle) * \mathbb{Z}_2\langle g_3\rangle$. Тогда $L^4(RC_{\mathcal{K}})$ имеет минимальный набор из 4 образующих.

Предложение (Waldinger, 4.19)

Пусть $\mathcal{K}$ — дискретный набор из 4 точек, то есть $RC_{\mathcal{K}} = \mathbb{Z}_2\langle g_1\rangle * \mathbb{Z}_2\langle g_2\rangle * \mathbb{Z}_2\langle g_3\rangle * \mathbb{Z}_2\langle g_4\rangle$. Тогда $L^4(RC_{\mathcal{K}})$ имеет минимальный набор из 32 образующих.

Лемма

Для любой группы G и для любых $a, b, c \in G$ верно, что

$$(a,(b,c)) = (a,c)(c,(b,a))(a,b)(c,b)(b,(a,c))(c,a)(b,a)(b,c). \qquad (3)$$

$$((a,b),c) = (b,a)(c,a)(c,b)((c,b),a)(a,b)(a,c)((a,c),b)(b,c). \qquad (4)$$

Доказательство.

Первое тождество доказывается непосредственным раскрытием коммутаторов и проверкой, а второе доказывается взятием обратного к первому и заменой b на a, c на b и a на c (второе тоже можно проверить раскрытием коммутаторов). □

Следствие

Для любой группы G и для любых $a \in \gamma_i(G), b \in \gamma_j(G)$, $c \in \gamma_k(G)$ верно, что

$$(a,(b,c)) \equiv (c,(b,a))(b,(a,c)) \mod \gamma_{\min(2i+j+k, i+2j+k, i+j+2k)}(G). \quad (5)$$

$$((a,b),c) \equiv ((c,b),a)((a,c),b) \mod \gamma_{\min(2i+j+k, i+2j+k, i+j+2k)}(G). \quad (6)$$

Доказательство.

Так как $qw = wq(q,w)$, то при $q \in \gamma_{i_1}(G), w \in \gamma_{i_2}(G)$ имеем $qw \equiv wq \mod \gamma_{i_1+i_2}(G)$, так как $(q,w) \in \gamma_{i_1+i_2}(G)$. Имеем $(a,b) \in \gamma_{i+j}(G), (a,c) \in \gamma_{i+k}(G), (b,c) \in \gamma_{j+k}(G)$, а любой тройной вложенный коммутатор, содержащий a, b, c, принадлежит $\gamma_{i+j+k}(G)$. Получаем, что $(a,b)(b,c) \equiv (b,c)(a,b) \mod \gamma_{i+2j+k}(G)$, $(a,b)(a,c) \equiv (a,c)(a,b) \mod \gamma_{2i+j+k}(G)$, $(b,c)(a,c) \equiv (a,c)(b,c) \mod \gamma_{i+j+2k}(G)$. Также если A - любой тройной вложенный коммутатор от a, b, c, то имеем, что $(a,b)A \equiv A(a,b) \mod \gamma_{2i+2j+k}(G)$, $(a,c)A \equiv A(a,b) \mod \gamma_{2i+j+2k}(G)$, $(b,c)A \equiv A(b,c) \mod \gamma_{i+2j+2k}(G)$. Пользуясь этим, мы переставляем коммутаторы в тождествах из предыдущей леммы, сокращая все двойные коммутаторы с обратными к ним. Отсюда следуют равенства. □

Предложение

Для любых $a \in \gamma_k(G), b \in \gamma_m(G), c \in \gamma_n(G)$ *верно, что* $(a,b,c)^{-1} \equiv (b,a,c) \mod \gamma_{k+m+n+1}(G)$.

Доказательство.

Рассмотрим преобразования:

$$(a,b,c)^{-1} = (c,(a,b)) \equiv^{(1)} ((b,c),a)((c,a),b) \mod \gamma_{k+m+n+1}(G) \equiv^{(2)}$$

$$\equiv^{(2)} ((c,a),b)((b,c),a) \mod \gamma_{2(k+m+n)}(G) \equiv^{(3)}$$

$$\equiv^{(3)} ((b,a),c) \mod \gamma_{\min(2k+m+n,k+2m+n,k+m+2n)}(G),$$

здесь (1) следует из тождества Витта-Холла, взятого по модулю члена нижнего центрального ряда, (2) следует из перестановки коммутаторов местами, (3) следует из предыдущего следствия. Так как в цепочке наименьшим номером из членов нижнего центрального ряда является $k+m+n+1$, то по нему и берётся сравнение по модулю. □

Следствие

Для любых $a \in \gamma_k(G), b \in \gamma_m(G), c \in \gamma_n(G)$ верно, что $(a, b, c) \equiv (c, (b, a)) \mod \gamma_{k+m+n+1}(G)$.

Доказательство.

Из предложения выше получаем

$$(c, (b, a)) = (b, a, c)^{-1} \equiv ((b, a)^{-1}, c) \mod \gamma_{k+m+n+1}(G) = (a, b, c).$$

□

Предложение

Пусть $\mathcal{K}$ *— дискретный набор из 3-х точек, то есть* $RC_{\mathcal{K}} = \mathbb{Z}_2\langle g_1\rangle * \mathbb{Z}_2\langle g_2\rangle * \mathbb{Z}_2\langle g_3\rangle$. *Тогда* $L^4(RC_{\mathcal{K}}) \cong \mathbb{Z}_2^8$ *имеет следующий минимальный набор образующих:*

$$[\mu_1, \mu_2, \mu_1, \mu_1], [\mu_1, \mu_3, \mu_1, \mu_1], [\mu_2, \mu_3, \mu_2, \mu_1], [\mu_1, \mu_3, \mu_2, \mu_1],$$

$$[\mu_2, \mu_3, \mu_2, \mu_2], [\mu_2, \mu_3, \mu_1, \mu_2], [\mu_1, \mu_3, \mu_2, \mu_3].[\mu_1, \mu_3, \mu_1, \mu_2],$$

Следствие

Пусть $\mathcal{K}$ *— дискретный набор из 3-х точек, то есть* $RC_{\mathcal{K}} = \mathbb{Z}_2\langle g_1\rangle * \mathbb{Z}_2\langle g_2\rangle * \mathbb{Z}_2\langle g_3\rangle$. *Тогда* $L^4(RC_{\mathcal{K}}) \cong \mathbb{Z}_2^8$ *и имеет следующий минимальный набор образующих:*

$$[\mu_j, \mu_i, \mu_i, \mu_i], [\mu_k, \mu_i, \mu_i, \mu_i], [\mu_k, \mu_j, \mu_j, \mu_i], [\mu_k, \mu_i, \mu_j, \mu_i],$$

$$[\mu_k, \mu_j, \mu_j, \mu_j], [\mu_k, \mu_j, \mu_i, \mu_j], [\mu_k, \mu_i, \mu_j, \mu_k], [\mu_k, \mu_i, \mu_i, \mu_j],$$

где i, j, k *– любые различные числа из набора* $\{1, 2, 3\}$.

Доказательство

Рассмотрим группу $\gamma_1(RC_{\mathcal{K}})/\gamma_2(RC_{\mathcal{K}})$. Её образующими являются g_1, g_2, g_3. Отсюда из тождеств Витта-Холла получаем, что образующими группы $\gamma_2(RC_{\mathcal{K}})/\gamma_3(RC_{\mathcal{K}})$ являются коммутаторы вида (g_i, g_j), где $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Выделим набор коммутаторов $A = \{(g_1, g_2), (g_1, g_3), (g_2, g_3)\}$, он порождает всё $\gamma_2(RC_{\mathcal{K}})/\gamma_3(RC_{\mathcal{K}})$, так как все остальные исключаются как обратные к ним. Аналогично, группа $\gamma_3(RC_{\mathcal{K}})/\gamma_4(RC_{\mathcal{K}})$ порождается коммутаторами вида (z, g_i), где $z \in A, i \in \{1, 2, 3\}$. Так как $(g_i, g_j, g_i) = (g_i, g_j, g_j)$, мы можем исключить три коммутатора, а также ещё один, используя тождества Витта-Холла. Отсюда получаем, что группа $\gamma_3(RC_{\mathcal{K}})/\gamma_4(RC_{\mathcal{K}})$ имеет минимальный набор из 5-ти образующих (g_1, g_2, g_1), (g_1, g_3, g_1), (g_1, g_3, g_2), (g_2, g_3, g_1), (g_2, g_3, g_2).

Получаем, что набор из 15-ти коммутаторов

$$(g_1, g_2, g_1, g_1), (g_1, g_3, g_1, g_1), (g_2, g_3, g_2, g_1), (g_1, g_3, g_2, g_1), (g_2, g_3, g_1, g_1),$$

$$(g_1, g_2, g_1, g_2), (g_1, g_3, g_1, g_2), (g_2, g_3, g_2, g_2), (g_1, g_3, g_2, g_2), (g_2, g_3, g_1, g_2),$$

$$(g_1, g_2, g_1, g_3), (g_1, g_3, g_1, g_3), (g_2, g_3, g_2, g_3), (g_1, g_3, g_2, g_3), (g_2, g_3, g_1, g_3)$$

порождает $\gamma_4(RC_{\mathcal{K}})/\gamma_5(RC_{\mathcal{K}})$, но построенный набор образующих $L^4(RC_{\mathcal{K}})$, соответствующий ему, не является минимальным по предложению (Waldinger).
Далее исключаем коммутаторы с помощью тождеств Витта-Холла, преобразований и используя то, что квадрат элемента γ_i лежит в γ_{i+1}.
В итоге получаем 8 коммутаторов, которые по Waldinger'у порождают минимально $L^4(RC_K)$.
Следствие получается из симметричности образующих и того, что в указанном наборе можно положить разные индексы разным буквам (в частности $i = 1, j = 2, k = 3$), при этом в каждом коммутаторе первые два элемента можно поменять местами.

Теорема

Пусть $\mathcal{K}$ – симплициальный комплекс на множестве [3]. Тогда

1. если в $\mathcal{K}$ есть все рёбра $\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}$, то $L^4(RC_{\mathcal{K}}) = \{e\}$, и порождающих нет;
2. если в $\mathcal{K}$ есть только 2 ребра $\{i,k\},\{j,k\}$, где $i,j,k \in \{1,2,3\}$ и попарно различны, причём $i<j$, то $L^4(RC_{\mathcal{K}}) \cong \mathbb{Z}_2$ и минимально порождается элементом $[\mu_i,\mu_j,\mu_i,\mu_i]$;
3. если в $\mathcal{K}$ есть только 1 ребро $\{i,j\}$, где $i,j \in \{1,2,3\}, i<j$, то $L^4(RC_{\mathcal{K}}) \cong \mathbb{Z}_2^4$ и минимально порождается четырьмя элементами вида
$$[\mu_i,\mu_k,\mu_i,\mu_i],[\mu_k,\mu_j,\mu_k,\mu_k],[\mu_k,\mu_j,\mu_k,\mu_i],[\mu_k,\mu_j,\mu_i,\mu_k],$$
где $k \neq i, k \neq j$;
4. если в $\mathcal{K}$ нет рёбер, то $L^4(RC_{\mathcal{K}}) \cong \mathbb{Z}_2^8$ и минимально порождается восемью элементами вида
$$[\mu_j,\mu_i,\mu_i,\mu_i],[\mu_k,\mu_i,\mu_i,\mu_i],[\mu_k,\mu_j,\mu_j,\mu_i],[\mu_k,\mu_i,\mu_j,\mu_i],$$
$$[\mu_k,\mu_i,\mu_i,\mu_j],[\mu_k,\mu_j,\mu_j,\mu_j],[\mu_k,\mu_j,\mu_i,\mu_j],[\mu_k,\mu_i,\mu_j,\mu_k],$$
где i,j,k – любые различные числа из набора $\{1,2,3\}$.

Доказательство

Из предложения выше для всех пунктов имеем, что набор

$$[\mu_1, \mu_2, \mu_1, \mu_1], [\mu_1, \mu_3, \mu_1, \mu_1], [\mu_2, \mu_3, \mu_2, \mu_1], [\mu_1, \mu_3, \mu_2, \mu_1], [\mu_1, \mu_3, \mu_1, \mu_2],$$

$$[\mu_2, \mu_3, \mu_2, \mu_2], [\mu_2, \mu_3, \mu_1, \mu_2], [\mu_1, \mu_3, \mu_2, \mu_3]$$

порождает $L^4(RC_{\mathcal{K}})$ (необязательно минимально, более того, никогда минимально не порождает).

Для пункта (a) при наличии всех рёбер все элементы набора обращаются в 0, откуда следует требуемое.

Для пункта (b) рассмотрим случай, когда есть рёбра $\{1, 3\}$ и $\{2, 3\}$ (то есть $i = 1, j = 2, k = 3$). В этом случае в 0 обращаются все коммутаторы, кроме $[\mu_1, \mu_2, \mu_1, \mu_1]$, откуда следует, что пункт верен для данного случая. Так как всегда можно поменять нумерацию вершин любым образом, то для любых двух рёбер $L^4(RC_{\mathcal{K}}) \cong \mathbb{Z}_2$, и можно оставить любой ненулевой коммутатор из данного набора, откуда следует требуемое.

Для пункта (c) рассмотрим случай, когда в $\mathcal{K}$ единственное ребро $\{1,3\}$. Тогда останется набор коммутаторов

$$[\mu_1, \mu_2, \mu_1, \mu_1], [\mu_2, \mu_3, \mu_2, \mu_2], [\mu_2, \mu_3, \mu_2, \mu_1], [\mu_2, \mu_3, \mu_1, \mu_2].$$

Данный набор является минимальным согласно предложению 6. Для симплициальных комплексов с другим ребром рассуждение аналогично доказательству следствия выше.
Пункт (d) вытекает из следствия выше.

Предложение

Пусть $\mathcal{K}$ — дискретный набор из 4-х точек, то есть $RC_{\mathcal{K}} = \mathbb{Z}_2\langle g_1\rangle * \mathbb{Z}_2\langle g_2\rangle * \mathbb{Z}_2\langle g_3\rangle * \mathbb{Z}_2\langle g_4\rangle$. Тогда $L^4(RC_{\mathcal{K}}) \cong \mathbb{Z}_2^{32}$ имеет минимальный набор образующих $\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3} \cup \overline{A_4} \cup \overline{B}$, где

$$\overline{A_1} = \{[\mu_3, \mu_2, \mu_2, \mu_1], [\mu_3, \mu_1, \mu_2, \mu_1], [\mu_3, \mu_1, \mu_1, \mu_2], [\mu_3, \mu_2, \mu_1, \mu_2], [\mu_3, \mu_1,$$

$$\overline{A_2} = \{[\mu_2, \mu_1, \mu_1, \mu_1], [\mu_4, \mu_2, \mu_2, \mu_1], [\mu_4, \mu_1, \mu_2, \mu_1],$$
$$[\mu_4, \mu_1, \mu_1, \mu_2], [\mu_4, \mu_2, \mu_1, \mu_2], [\mu_4, \mu_1, \mu_2, \mu_4]\},$$
$$\overline{A_3} = \{[\mu_3, \mu_1, \mu_1, \mu_1], [\mu_4, \mu_1, \mu_1, \mu_1], [\mu_4, \mu_3, \mu_3, \mu_1], [\mu_4, \mu_1, \mu_3, \mu_1],$$
$$[\mu_4, \mu_1, \mu_1, \mu_3], [\mu_4, \mu_3, \mu_1, \mu_3], [\mu_4, \mu_1, \mu_3, \mu_4]\},$$
$$\overline{A_4} = \{[\mu_3, \mu_2, \mu_2, \mu_2], [\mu_4, \mu_2, \mu_2, \mu_2], [\mu_4, \mu_3, \mu_3, \mu_2], [\mu_4, \mu_2, \mu_3, \mu_2],$$
$$[\mu_4, \mu_2, \mu_2, \mu_3], [\mu_4, \mu_3, \mu_3, \mu_3], [\mu_4, \mu_3, \mu_2, \mu_3], [\mu_4, \mu_2, \mu_3, \mu_4]\},$$
$$\overline{B} = \{[\mu_2, \mu_4, \mu_3, \mu_1], [\mu_1, \mu_4, \mu_3, \mu_2], [\mu_1, \mu_4, \mu_2, \mu_3], [\mu_2, \mu_4, \mu_1, \mu_3],$$
$$[\mu_3, \mu_4, \mu_1, \mu_2], [\mu_3, \mu_4, \mu_2, \mu_1]\}.$$

Рассмотрим коммутаторы: $(g_i, g_j, g_i) = (g_j, g_i)g_i(g_i, g_j)g_i = g_jg_ig_jg_ig_ig_ig_jg_ig_jg_i = g_jg_ig_jg_ig_jg_ig_jg_i = (g_j, g_i)^2, (g_i, g_j, g_j) = (g_j, g_i)g_j(g_i, g_j)g_j = g_jg_ig_jg_ig_jg_ig_jg_ig_jg_j = g_jg_ig_jg_ig_jg_ig_jg_i = (g_j, g_i)^2$, то есть $(g_i, g_j, g_i) = (g_i, g_j, g_j)$.
Группа $\gamma_3(RC_{\mathcal{K}})/\gamma_4(RC_{\mathcal{K}})$ минимально порождается коммутаторами

$$(g_1, g_2, g_2), (g_1, g_3, g_3), (g_1, g_4, g_4), (g_2, g_3, g_3), (g_2, g_4, g_4), (g_3, g_4, g_4),$$

$$(g_1, g_3, g_2), (g_1, g_4, g_2), (g_1, g_4, g_3), (g_2, g_4, g_1), (g_2, g_4, g_3),$$

$$(g_3, g_4, g_1), (g_3, g_4, g_2), (g_2, g_3, g_1).$$

Отсюда, группа $\gamma_4(RC_{\mathcal{K}})/\gamma_5(RC_{\mathcal{K}})$ порождается (неминимально) коммутаторами вида (z, g_i), где z – коммутатор из набора выше, а $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.
Выпишем их, разбив на группы следующим образом: в группе A_1 будут коммутаторы с индексами $\{1, 2, 3\}$, в группе A_2 будут все коммутаторы с индексами $\{1, 2, 4\}$, не входящие в A_1, в группе A_3 будут коммутаторы с индексами $\{1, 3, 4\}$, не входящие в $A_1 \cup A_2$, в группе A_4 будут коммутаторы с индексами $\{2, 3, 4\}$, не входящие в $A_1 \cup A_2 \cup A_3$, в группе B будут коммутаторы с 4-мя индексами.

Так как в A_1 находятся только коммутаторы с индексами $1, 2$ и 3, то все коммутаторы из данного набора можно заменить коммутаторами из следствия для 3-х точек (возьмём $i = 1, j = 2, k = 3$), получив новый набор $A_1^{(1)}$. Теперь перенесём в A_2 коммутаторы без индекса 3 из $A_1^{(1)}$ и сделаем то же самое, получив $A_2^{(1)}$ (возьмём $i = 1, j = 2, k = 4$). Полученное новое множество коммутаторов из $A_1^{(1)}$ обозначим через $A_1^{(2)}$. Аналогично, переносим в A_3 коммутаторы из $A_1^{(2)}$ и из $A_2^{(1)}$ без индекса 2, потом делаем замену, получив $A_3^{(1)}$ (возьмём $i = 1, j = 3, k = 4$). Полученные новые множества обозначим $A_1^{(3)}$ и $A_2^{(2)}$. Далее переносим в A_4 коммутаторы без индекса 1 из $A_i^{(j)}, i, j > 0, i + j = 4$, а потом сделаем аналогичную замену, получив $A_4^{(1)}$ (возьмём $i = 2, j = 3, k = 4$). Полученные новые множества обозначим A_1', A_2', A_3' и A_4'. Набор $A_1' \cup A_2' \cup A_3' \cup A_4' \cup B$, состоящий из 34 коммутаторов, порождает (согласно предложению Waldinger'a, неминимально) группу $\gamma_4(RC_{\mathcal{K}})/\gamma_5(RC_{\mathcal{K}})$. Далее с помощью тождеств Витта-Холла, преобразований и используя то, что квадрат элемента γ_i лежит в γ_{i+1} исключаем 2 коммутатора и получаем минимальный набор образующих.

Теорема

Пусть $\mathcal{K}$ — дискретный набор из 4-х точек, то есть $RC_{\mathcal{K}} = \mathbb{Z}_2\langle g_1\rangle * \mathbb{Z}_2\langle g_2\rangle * \mathbb{Z}_2\langle g_3\rangle * \mathbb{Z}_2\langle g_4\rangle$. Тогда $L^4(RC_{\mathcal{K}}) \cong \mathbb{Z}_2^{32}$ имеет минимальный набор образующих $\overline{A_i} \cup \overline{A_j} \cup \overline{A_k} \cup \overline{A_l} \cup \overline{B}$, где

$$\overline{A_i} = \{[\mu_k, \mu_j, \mu_j, \mu_i], [\mu_k, \mu_i, \mu_j, \mu_i], [\mu_k, \mu_i, \mu_i, \mu_j], [\mu_k, \mu_j, \mu_i, \mu_j], [\mu_k, \mu_i, \mu_j,$$

$$\overline{A_j} = \{[\mu_j, \mu_i, \mu_i, \mu_i], [\mu_l, \mu_j, \mu_j, \mu_i], [\mu_l, \mu_i, \mu_j, \mu_i], [\mu_l, \mu_i, \mu_i, \mu_j], [\mu_l, \mu_j, \mu_i, \mu_j]$$
$$[\mu_l, \mu_i, \mu_j, \mu_l]\},$$

$$\overline{A_k} = \{[\mu_k, \mu_i, \mu_i, \mu_i], [\mu_l, \mu_i, \mu_i, \mu_i], [\mu_l, \mu_k, \mu_k, \mu_i], [\mu_l, \mu_i, \mu_k, \mu_i], [\mu_l, \mu_i, \mu_i,$$
$$[\mu_l, \mu_k, \mu_i, \mu_k], [\mu_l, \mu_i, \mu_k, \mu_l]\},$$

$$\overline{A_l} = \{[\mu_k, \mu_j, \mu_j, \mu_j], [\mu_l, \mu_j, \mu_j, \mu_j], [\mu_l, \mu_k, \mu_k, \mu_j], [\mu_l, \mu_j, \mu_k, \mu_j], [\mu_l, \mu_j, \mu_j,$$
$$[\mu_l, \mu_k, \mu_k, \mu_k], [\mu_l, \mu_k, \mu_j, \mu_k], [\mu_l, \mu_j, \mu_k, \mu_l]\},$$

$$\overline{B} = \{[\mu_j, \mu_l, \mu_k, \mu_i], [\mu_i, \mu_l, \mu_k, \mu_j], [\mu_i, \mu_l, \mu_j, \mu_k], [\mu_j, \mu_l, \mu_i, \mu_k], [\mu_k, \mu_l, \mu_i,$$
$$[\mu_k, \mu_l, \mu_j, \mu_i]\}.$$

Доказательство

Из теоремы выше и симметричности образующих следует, что в указанном наборе можно положить разные индексы разным буквам (в частности $i = 1, j = 2, k = 3, l = 4$), при этом в каждом коммутаторе первые два элемента можно поменять местами. Отсюда следует доказываемое.

References

[1] Я. А. Верёвкин, *Градуированные компоненты присоединенной алгебры Ли прямоугольной группы Кокстера*, Торическая топология, действия групп, геометрия и комбинаторика. Часть 2, Сборник статей, Труды МИАН, 318, МИАН, М., 2022, 31–42.

[2] Я. А. Верёвкин, *Присоединенная алгебра Ли прямоугольной группы Кокстера* Алгебраическая топология, комбинаторика и математическая физика, Сборник статей. К 75-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН Виктора Матвеевича Бухштабера, Тр. МИАН, 305, МИАН, М., 2019, 61–70.

Спасибо за внимание!

Proof of theorem

To simplify the notation we write L^k instead of $L^k(RC_{\mathcal{K}})$ and γ_k instead of $\gamma_k(RC_{\mathcal{K}})$. Statement (a) follows from the fact that

$$L^1 = \gamma_1/\gamma_2 = RC_{\mathcal{K}}/RC'_{\mathcal{K}} = \mathbb{Z}_2^m$$

with basis $\overline{g}_1, \dots, \overline{g}_m$.
We prove statement (b). Consider the abelianization map

$$\varphi_{\mathrm{ab}} : RC'_{\mathcal{K}} \to RC'_{\mathcal{K}}/RC''_{\mathcal{K}} = \gamma_2/\gamma'_2.$$

The group $RC'_{\mathcal{K}}/RC''_{\mathcal{K}} = H_1(\mathcal{R}_{\mathcal{K}})$ is free abelian (above).
Consider $L^2 = \gamma_2/\gamma_3$. The group L^2 is a $\mathbb{Z}_2$-module (see above), i. e. $L^2 = \mathbb{Z}_2^M$ for some $M \in \mathbb{N}$. We have a sequence of nested normal subgroups

$$\gamma'_2 \lhd \gamma_4 \lhd \gamma_3 \lhd \gamma_2.$$

Consider the exact sequence of abelian groups:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \gamma_3/\gamma'_2 & \xrightarrow{\psi} & \gamma_2/\gamma'_2 & \longrightarrow & \gamma_2/\gamma_3 & \longrightarrow & 0. \\ & & \| & & \| & & \| & & \\ & & \mathbb{Z}^N & & \mathbb{Z}^N & & \mathbb{Z}_2^M & & \end{array}$$

Recall from Corollary above that the free abelian group $\gamma_2/\gamma_2' = \mathbb{Z}^N$ has a basis consisting of the images of the iterated commutators with all different indices described in Theorem above. The images of the commutators of length $\geqslant 3$ are contained in the subgroup $\gamma_3/\gamma_2' \subset \gamma_2/\gamma_2'$. The group γ_3/γ_2' also contains commutators of length 3 with duplicate indices, i. e. of the form $(g_j, g_i, g_i) = (g_i, g_j)^2$. Therefore, the homomorphism ψ acts by the formula:

$$\psi(\overline{(g_i, g_j, g_{k_1}, g_{k_2}, \ldots, g_{k_{m-2}})}) = \overline{(g_i, g_j, g_{k_1}, g_{k_2}, \ldots, g_{k_{m-2}})}, \quad m \geqslant 3,$$
$$\psi(\overline{(g_j, g_i, g_i)}) = \overline{(g_i, g_j)}^2,$$

where the indices $i, j, k_1, \ldots, k_{m-2}$ are all different. The elements $\overline{(g_j, g_i, g_i)}$ with $i < j$, $\{i, j\} \notin \mathcal{K}$, and the elements $\overline{(g_i, g_j, g_{k_1}, g_{k_2}, \ldots, g_{k_{m-2}})}$, $m \geqslant 3$, with the condition on the indices from theorem above form a basis in a free abelian group γ_3/γ_2'.
It follows that the $\mathbb{Z}_2$-module $L^2 = \gamma_2/\gamma_3$ has a basis consisting of the elements $\overline{(g_i, g_j)} = [\overline{g}_i, \overline{g}_j]$ with $i < j$ and $\{i, j\} \notin \mathcal{K}$, proving (b).

We prove statement (c). Consider $L^3 = \gamma_3/\gamma_4$. The group L^3 is a $\mathbb{Z}_2$-module (see above), i. e. $L^3 = \mathbb{Z}_2^M$ for some $M \in \mathbb{N}$.
Consider the exact sequence of abelian groups:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \gamma_4/\gamma_2' & \xrightarrow{\chi} & \gamma_3/\gamma_2' & \longrightarrow & \gamma_3/\gamma_4 & \longrightarrow & 0. \\ & & \| & & \| & & \| & & \\ & & \mathbb{Z}^N & & \mathbb{Z}^N & & \mathbb{Z}_2^M & & \end{array}$$

For the free abelian group γ_3/γ_2', we will use the basis constructed in the proof of statement (b). Elements of this basis corresponding to commutators of length $\geqslant 4$ are contained in γ_4/γ_2'. The group γ_4/γ_2' also contains commutators of length 4 with repeated indices. These commutators have one of the following nine types, which we divide into two types A and B for convenience:

$$\begin{aligned} A = \{&(g_i, g_j, g_j, g_j), (g_i, g_j, g_j, g_i), (g_i, g_j, g_i, g_j), \\ &(g_i, g_j, g_i, g_i), (g_i, g_j, g_i, g_k), (g_i, g_j, g_j, g_k)\}, \\ B = \{&(g_i, g_j, g_k, g_j), (g_i, g_j, g_k, g_i), (g_i, g_j, g_k, g_k)\}. \end{aligned}$$

Note that

$$(g_i, g_j, g_j, g_j) = ((g_j, g_i) \cdot (g_j, g_i), g_j) =$$
$$= ((g_j, g_i), g_j) \cdot (((g_j, g_i), g_j), (g_j, g_i)) \cdot ((g_j, g_i), g_j) \equiv (g_j, g_i, g_j)^2 \mod \gamma_2',$$

because $(((g_j, g_i), g_j), (g_j, g_i)) \in \gamma_2'$. Here in the second identity we used Hall-Witt commutator identity. A similar decomposition holds for other commutators of type A, for example,

$$(g_i, g_j, g_i, g_k) = (g_j, g_i, g_k)^2 \mod \gamma_2'.$$

Now consider the commutators of type B. We will need the following commutator identities. For any $a, b, c, d \in \gamma_1$ we have:

$$(a, b)(c, d) \equiv (c, d)(a, b) \mod \gamma_2'. \tag{7}$$

It follows that the last of the Hall-Witt identities takes the following form modulo γ_2':

$$(a, b, c)(b, c, a)(c, a, b) \equiv 1 \mod \gamma_2'. \tag{8}$$

Furthermore, the following identity was obtained in (Panov-V):

$$(g_q,(g_p,x))=(g_q,x)(x,(g_p,g_q))(g_q,g_p)(x,g_p)$$
$$(g_p,(g_q,x))(x,g_q)(g_p,g_q)(g_p,x).$$

If $x\in\gamma_2$, then the previous identity and identity (7) imply

$$(g_q,(g_p,x))\equiv(g_p,(g_q,x)) \mod \gamma_2'. \tag{9}$$

To simplify the notation, we write i instead of g_i. From (1) and (8) we obtain

$$\begin{aligned}(g_i,g_j,g_k,g_i) &= (((i,j),k),i)\equiv((i,(i,j)),k)^{-1}\cdot((k,i),(i,j))^{-1}\equiv\\ &\equiv(k,(i,(i,j)))=(k,((i,j),i)^{-1})=(k,(j,i)^{-2})=\\ &=(k,(j,i)^{-1})\cdot(k,(j,i)^{-1})\cdot((k,(i,j)^{-1}),(i,j)^{-1})\equiv\\ &\equiv(k,(j,i)^{-1})^2=(g_i,g_j,g_k)^{-2} \mod \gamma_2',\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(g_i,g_j,g_k,g_j) &= (((i,j),k),j)\equiv((j,(i,j)),k)^{-1}\cdot((k,j),(i,j))^{-1}\equiv\\ &\equiv(k,(j,(i,j)))=(k,((i,j),j)^{-1})=(k,(j,i)^{-2})\equiv(g_i,g_j,g_k)^{-2} \mod \gamma_2'.\end{aligned}$$

The last commutator of type B requires a lengthier calculation:

$$
\begin{gathered}
(g_i, g_j, g_k, g_k) \equiv^1 (j,i,k)\cdot(i,j,k)\cdot(k,i,k)\cdot(i,k,k)\cdot((k,j)^i,k)\cdot((j,k)^i,k)\cdot \\
\cdot\,((i,k)^j,k)\cdot((k,i)^j,k)\cdot(k,(j,(k,i)))^{-1}\cdot(k,(i,(j,k)))^{-1} \equiv^2 \\
\equiv^2 (k,(j,(k,i)))^{-1}\cdot(k,(i,(j,k)))^{-1} \equiv^3 (j,(k,(k,i)))^{-1}\cdot(i,(k,(j,k)))^{-1} = \\
= (j,(i,k)^{-2})^{-1}\cdot(i,(k,j)^{-2})^{-1} \equiv (k,i,j)^2\cdot(j,k,i)^2 \equiv \\
\equiv (g_i, g_j, g_k)^{-2} \mod \gamma_2'.
\end{gathered}
$$

Here is the identity $\equiv^1$ is obtained with help of the algorithm written by the author in Wolfram Mathematica using commutator identities (1).
The identity $\equiv^2$ follows from the relations $(a,b)\cdot(a^{-1},b) = (b,a,a^{-1})$ and $(b,a,a^{-1}) \equiv 1 \mod \gamma_2'$, if $a \in \gamma_2$.
The identity $\equiv^3$ follows from (9).

It follows that the homomorphism $\chi\colon \gamma_4/\gamma_2' \to \gamma_3/\gamma_2'$ acts by the formula:

$$\chi(\overline{(g_i, g_j, g_{k_1}, g_{k_2}, \dots, g_{k_{m-2}})}) = \overline{(g_i, g_j, g_{k_1}, g_{k_2}, \dots, g_{k_{m-2}})}, \quad m \geqslant 4,$$
$$\chi(\overline{(g_j, g_i, g_i, g_j)}) = \overline{((g_i, g_j), g_j)}^2,$$
$$\chi(\overline{(g_j, g_i, g_j, g_k)}) = \overline{((g_i, g_j), g_k)}^2,$$
$$\chi(\overline{(g_i, g_j, g_k, g_k)}) = \overline{((g_i, g_j), g_k)}^{-2}.$$

where the indices corresponding to a different letters are different. Thus, the $\mathbb{Z}_2$-module $L^3 = \gamma_3/\gamma_4$ has a basis consisting of the elements specified in the theorem.