

Прямоугольная группа Коксетера минимального кообъема в трехмерном гиперболическом пространстве

А.Ю. Веснин

Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН

Алгебраическая топология, действия групп и комбинаторика
ФТ "Сириус", 12-15 мая 2026

Сегодня "...можно говорить о конце романтического периода в истории геометрии Лобачевского, когда основное внимание исследователей было обращено на её осмысление с точки зрения оснований геометрии вообще. Современные исследования всё больше требуют делового владения геометрией Лобачевского."

Э. Б. Винберг, 1996.

Э. Б. Винберг, О неевклидовой геометрии. Соросовский образовательный журнал. 1996. № 3, С. 104-109. Перепечатано: Математическое просвещение, 2021, сер. 3, вып. 27, С. 29-40.

- 1 Многогранники Коксетера в пространствах постоянной кривизны
- 2 Прямоугольные многогранники в пространствах Лобачевского
- 3 Прямоугольная группа Коксетера минимального кообъема
- 4 Схема доказательства основной теоремы
- 5 Арифметичность прямоугольных групп Коксетера, возникших при доказательстве теоремы
- 6 Открытые вопросы

- 1 Многогранники Коксетера в пространствах постоянной кривизны
- 2 Прямоугольные многогранники в пространствах Лобачевского
- 3 Прямоугольная группа Коксетера минимального кообъема
- 4 Схема доказательства основной теоремы
- 5 Арифметичность прямоугольных групп Коксетера, возникших при доказательстве теоремы
- 6 Открытые вопросы

Многогранники Коксетера

Пусть X^n – n -мерное евклидово пространство \mathbb{E}^n , n -мерная сфера \mathbb{S}^n или n -мерное пространство Лобачевского (гиперболическое пространство) \mathbb{H}^n .

Выпуклый многогранник $P \subset X^n$, ограниченный гиперплоскостями H_i , $i \in I$, называется **многогранником Коксетера**, или **коксетеровским**, если для любых $i, j \in I$, $i \neq j$, гиперплоскости H_i и H_j либо не пересекаются, либо образуют двугранный угол, равный π/n_{ij} , где $n_{ij} \in \mathbb{Z}$, $n_{ij} \geq 2$. (Всегда имеется в виду двугранный угол, содержащий P .)

Многогранники Коксетера

Пусть X^n – n -мерное евклидово пространство \mathbb{E}^n , n -мерная сфера \mathbb{S}^n или n -мерное пространство Лобачевского (гиперболическое пространство) \mathbb{H}^n .

Выпуклый многогранник $P \subset X^n$, ограниченный гиперплоскостями H_i , $i \in I$, называется **многогранником Коксетера**, или **коксетеровским**, если для любых $i, j \in I$, $i \neq j$, гиперплоскости H_i и H_j либо не пересекаются, либо образуют двугранный угол, равный π/n_{ij} , где $n_{ij} \in \mathbb{Z}$, $n_{ij} \geq 2$. (Всегда имеется в виду двугранный угол, содержащий P .)

Если P – коксетеровский многогранник, то группа Γ движений пространства X^n , порожденная отражениями R_i относительно гиперплоскостей H_i , дискретна и многогранник P является ее фундаментальным многогранником. Последнее означает, что многогранники $\gamma(P)$, $\gamma \in \Gamma$, не имеют попарно общих внутренних точек и покрывают пространство X^n . Соотношения

$$R_i^2 = 1, \quad (R_i R_j)^{n_{ij}} = 1$$

являются определяющими соотношениями группы Γ . Если гиперплоскости H_i и H_j не пересекаются, то считается, что $n_{ij} = \infty$; в этом случае соотношение между R_i и R_j отсутствует.

Схемы Коксетера

Каждому коксетеровскому многограннику сопоставим граф, называемый его **схемой Коксетера**, по следующему правилу.

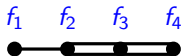
Вершины схемы Коксетера соответствуют гиперграням многогранника.

Если угол между гипергранями равен π/m , $m \geq 3$, то соответствующие вершины соединяются **ребром** кратности $m - 2$, если $m \in \{3, 4, 5\}$, или обычным ребром с меткой m .

Если две гиперграни многогранника взаимно перпендикулярны, то вершины схемы не соединяются ребром.

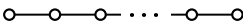
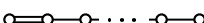
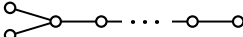
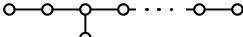



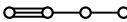
Схемы Коксетера также используются для обозначения групп Коксетера, порожденных отражениями в гипергранях коксетеровского многогранника.

Пример. Схема Коксетера для одного из коксетеровских тетраэдров:



Сферические коксетеровские многогранники

В 1934 г. Г. Коксетер получил полную классификацию коксетеровских многогранников в сферических и евклидовых пространствах. Схемы Коксетера для сферических коксетеровских многогранников приведены в таблице:

A_n		
B_n (или C_n)		$(n \geq 2)$
D_n		$(n \geq 4)$
E_n		$(6 \leq n \leq 8)$
F_4		
$G_2^{(m)}$		$(m \geq 6)$
H_3		
H_4		

Коксетеровские многогранники в пространствах Лобачевского

В 1967 году Э. Б. Винберг поставил задачу изучения коксетеровских многогранников в пространствах Лобачевского. Такие многогранники могут иметь сложное комбинаторное строение, и их классификация, подобно евклидову и сферическому случаям, не представляется возможной.

Коксетеровские многогранники в пространствах Лобачевского

В 1967 году Э. Б. Винберг поставил задачу изучения коксетеровских многогранников в пространствах Лобачевского. Такие многогранники могут иметь сложное комбинаторное строение, и их классификация, подобно евклидову и сферическому случаям, не представляется возможной.

Самые простые гиперболические многогранники Коксетера – ограниченные симплексы – были табулированы Ф. Ланнером в 1950 году.

$n = 1$	
$n = 2$	$2 \leq k, l, m < \infty, \quad \frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} < 1$
$n = 3$	
$n = 4$	

Теорема жесткости (Е. М. Андреев, 1970)

Остроугольный (двугранные узлы $\leq \pi/2$) многогранник конечного объема в \mathbb{H}^n , $n \geq 3$, однозначно определяется своим комбинаторным типом и двугранными углами.

Теорема жесткости (Е. М. Андреев, 1970)

Остроугольный (двугранные узлы $\leq \pi/2$) многогранник конечного объема в \mathbb{H}^n , $n \geq 3$, однозначно определяется своим комбинаторным типом и двугранными углами.

Теорема (Э. Б. Винберг, 1984)

Если $n > 29$, то в \mathbb{H}^n не существует компактных многогранников Коксетера.

Примеры известны только до размерности $n = 8$.

Теорема жесткости (Е. М. Андреев, 1970)

Остроугольный (двугранные узлы $\leq \pi/2$) многогранник конечного объема в \mathbb{H}^n , $n \geq 3$, однозначно определяется своим комбинаторным типом и двугранными углами.

Теорема (Э. Б. Винберг, 1984)

Если $n > 29$, то в \mathbb{H}^n не существует компактных многогранников Коксетера.

Примеры известны только до размерности $n = 8$.

Теорема (М. Н. Прохоров, 1986; А. Г. Хованский, 1986)

Если $n > 995$, то в \mathbb{H}^n не существует многогранников Коксетера конечного объема.

Примеры известны только в размерностях не выше $n = 21$.

- 1 Многогранники Коксетера в пространствах постоянной кривизны
- 2 Прямоугольные многогранники в пространствах Лобачевского**
- 3 Прямоугольная группа Коксетера минимального кообъема
- 4 Схема доказательства основной теоремы
- 5 Арифметичность прямоугольных групп Коксетера, возникших при доказательстве теоремы
- 6 Открытые вопросы

Многогранник Коксетера называется **прямоугольным**, если все его двугранные углы равны $\pi/2$. Группа, порожденная отражениями в гранях такого многогранника, называется **прямоугольной группой Коксетера**.

Многогранник Коксетера называется **прямоугольным**, если все его двугранные углы равны $\pi/2$. Группа, порожденная отражениями в гранях такого многогранника, называется **прямоугольной группой Коксетера**.

Теорема (Э. Б. Винберг, 1984)

Если $n > 4$, то в \mathbb{H}^n не существует компактных прямоугольных многогранников.

Примеры для размерностей $n \leq 4$ известны.

Прямоугольные многогранники: существование и отсутствие, I

Многогранник Коксетера называется **прямоугольным**, если все его двугранные углы равны $\pi/2$. Группа, порожденная отражениями в гранях такого многогранника, называется **прямоугольной группой Коксетера**.

Теорема (Э. Б. Винберг, 1984)

Если $n > 4$, то в \mathbb{H}^n не существует компактных прямоугольных многогранников.

Примеры для размерностей $n \leq 4$ известны.

Теорема (А. А. Колпаков, 2012)

Если $n > 6$, то в \mathbb{H}^n не существует идеальных (т. е. со всеми вершинами на абсолюте) прямоугольных многогранников.

Теорема (Э. Б. Винберг, Л. Д. Потягайло, 2005)

Если $n > 14$, то в \mathbb{H}^n не существует прямоугольных многогранников конечного объема.

Примеры известны только для размерностей $n \leq 8$

Теорема (Э. Б. Винберг, Л. Д. Потягайло, 2005)

Если $n > 14$, то в \mathbb{H}^n не существует прямоугольных многогранников конечного объема.

Примеры известны только для размерностей $n \leq 8$

Вопросы (Э. Б. Винберг, Л. Д. Потягайло, 2005)

- 1) Верно ли, что наименьшее число гиперграней прямоугольного 6-мерного многогранника равно 27?
- 2) Существуют ли прямоугольные многогранники в \mathbb{H}^n для $n = 9, 10, 11, 12, 13, 14$? Положительный ответ на первый вопрос позволит исключить случаи $n = 13$ и $n = 14$.

Теорема (Э. Б. Винберг, Л. Д. Потягайло, 2005)

Если $n > 14$, то в \mathbb{H}^n не существует прямоугольных многогранников конечного объема.

Примеры известны только для размерностей $n \leq 8$

Вопросы (Э. Б. Винберг, Л. Д. Потягайло, 2005)

- 1) Верно ли, что наименьшее число гиперграней прямоугольного 6-мерного многогранника равно 27?
- 2) Существуют ли прямоугольные многогранники в \mathbb{H}^n для $n = 9, 10, 11, 12, 13, 14$? Положительный ответ на первый вопрос позволит исключить случаи $n = 13$ и $n = 14$.

Теорема (С. Dufour, 2010)

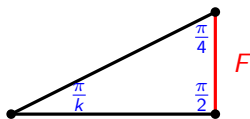
Если $n > 12$, то в \mathbb{H}^n не существует прямоугольных многогранников конечного объема.

Построение прямоугольных многоугольников в \mathbb{H}^2 под действием группы диэдра

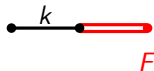
Пусть T^2 – треугольник с углами $\frac{\pi}{k}$, $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{4}$, где $\frac{\pi}{k} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} < \pi$.

Пусть F – сторона, противолежащая углу $\frac{\pi}{k}$.

Схема Коксетера для группы, порожденной отражениями в сторонах треугольника T^2 :



T^2 (с группой D_k)



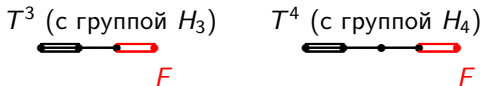
Черная подсхема соответствует группе диэдра D_k порядка $2k$. Объединение

$$P^2 = \bigcup_{g \in D_k} g(T^2)$$

является прямоугольным k -угольником в \mathbb{H}^2 со сторонами $\partial P^n = \bigcup_{g \in D_k} g(F)$.

Примеры компактных прямоугольных многогранников в \mathbb{H}^3 и \mathbb{H}^4

Среди перечисленных выше симплексов из работы Ф. Ланнера нас интересуют симплексы $T^3 \subset \mathbb{H}^3$ и $T^4 \subset \mathbb{H}^4$ со следующими схемами Коксетера:



Грань F образует с одной гранью угол $\pi/4$, а с остальными – угол $\pi/2$.

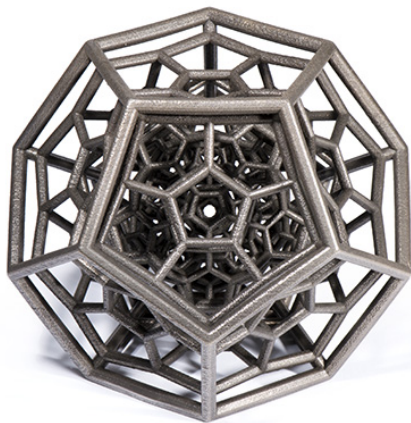
Черные подсхемы соответствуют сферическим группам Коксетера (таблица была приведена выше) H_3 и H_4 порядков 120 и 14400, соответственно.

Для $n = 3, 4$ объединение

$$P^n = \bigcup_{g \in H_n} g(T^n)$$

является прямоугольным многогранником в \mathbb{H}^n с гранями $\partial P^n = \bigcup_{g \in H_n} g(F)$.

P^3 является додекаэдром, а P^4 является 120-клеточником.

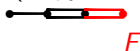


120-клеточник.

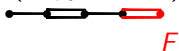
Примеры прямоугольных многогранников конечного объема в \mathbb{H}^n

Примеры известны для размерностей $n \leq 8$. Рассмотрим в пространствах $\mathbb{H}^3, \dots, \mathbb{H}^8$ симплексы $\mathcal{T}^3, \dots, \mathcal{T}^8$, заданные следующими схемами Коксетера:

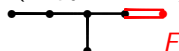
\mathcal{T}^3 (с группой B_3)



\mathcal{T}^4 (с группой F_4)



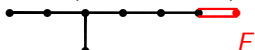
\mathcal{T}^5 (с группой D_5)



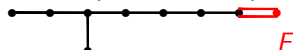
\mathcal{T}^6 (с группой E_6)



\mathcal{T}^7 (с группой E_7)



\mathcal{T}^8 (с группой E_8)



Грань F образует с одной гранью угол $\pi/4$, а с остальными – угол $\pi/2$.

Черные подсхемы соответствуют сферическим группам Коксетера.

Прямоугольные многогранники конечного объема строятся под действием сферических групп Коксетера аналогично компактному случаю.

Прямоугольные многогранники в \mathbb{H}^3

В 1970 г. Е. М. Андреев доказал необходимые и достаточные условия существования в \mathbb{H}^3 многогранника конечного объема с двугранными углами, не превышающими $\frac{\pi}{2}$.

Теорема (Прямоугольная версия теоремы Андреева)

Абстрактный многогранник P реализуется как прямоугольный многогранник \mathcal{P} в \mathbb{H}^3 тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

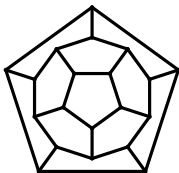
- (1) P имеет не менее шести граней.
- (2) Каждая вершина P является 3-валентной или 4-валентной.
- (3) Для любой тройки граней (F_i, F_j, F_k) таких, что $F_i \cap F_j$ и $F_j \cap F_k$ являются ребрами в P с различными концами, выполнено $F_i \cap F_k = \emptyset$.
- (4) Граф P не имеет призматических k -обходов для $k \leq 4$.

Более того, каждая 3-валентная вершина в P соответствует **конечной** вершине в \mathcal{P} , а каждая 4-валентная вершина в P – **идеальной** вершине в \mathcal{P} . При этом, реализация единственна с точностью до изометрии.

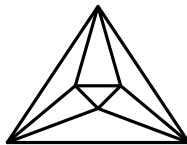
Прямоугольные многогранники в \mathbb{H}^3 естественно разбить на три класса

- Многогранник называют **компактным**, если все его вершины являются **конечными** точками пространства Лобачевского.
- Многогранник называют **идеальным**, если все его вершины лежат на абсолюте пространства Лобачевского, такие вершины называют **идеальными**.
- Многогранник относится к **смешанному типу**, если он имеет как **конечные**, так и **идеальные** вершины.

Пример. Додекаэдр реализуется в \mathbb{H}^3 как компактный прямоугольный многогранник, а октаэдр – как идеальный прямоугольный многогранник.



(a)

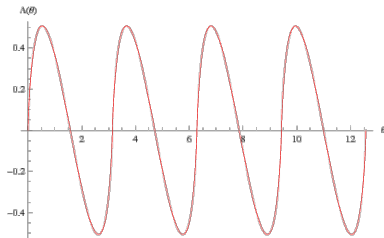


(b)

Вычисление объемов через функцию Лобачевского

Формулы для объемов трехмерных гиперболических многогранников и многообразий принято записывать через введенную Дж. Милнором функцию Лобачевского:

$$\Lambda(\theta) = - \int_0^{\theta} \ln |2 \sin(t)| dt.$$

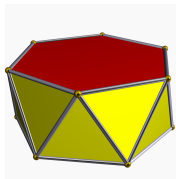
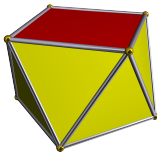
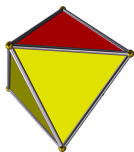


Ниже нам понадобятся две константы:

$V_{tet} = 3\Lambda\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx 1,01494$ - объем правильного идеального тетраэдра

$V_{oct} = 8\Lambda\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx 3,66386$ - объем правильного идеального октаэдра

Как устроено множество идеальных прямоугольных многогранников?



Антипризмы $A(3)$ (октаэдр), $A(4)$ и $A(6)$ реализуются в \mathbb{H}^3 как идеальными прямоугольными многогранниками.

Теорема (W. Thurston, 1978)

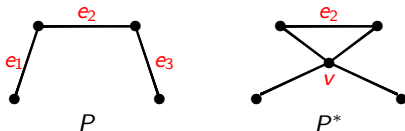
Для $n \geq 3$ объем идеальной прямоугольной n -антипризмы равен

$$\text{vol}(A(n)) = 2n \left[\Lambda \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2n} \right) + \Lambda \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2n} \right) \right],$$

где $\Lambda(\theta)$ – функция Лобачевского.

Операция реберного скручивания

Пусть P – идеальный прямоугольный многогранник. Для последовательных ребер e_1, e_2, e_3 в его грани определим операцию **реберного скручивания**, которая состоит в удалении двух ребер и соединении их концов с новой вершиной:

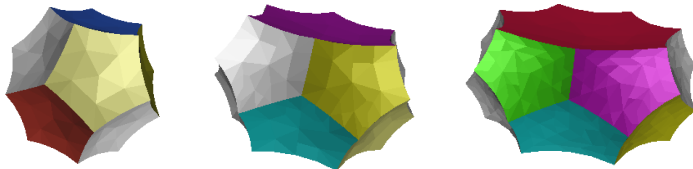


Тогда P^* также идеальный прямоугольный многогранник.

Теорема (G. Brinkmann et al., 2005)

Если P реализуется как идеальный прямоугольный многогранник, то $P = A(n)$, $n \geq 3$, или P получается из $A(n)$ реберными скручиваниями.

Как устроено множество компактных прямоугольных многогранников?



Многогранники Лёбелля $L(5)$, $L(6)$ и $L(7)$ реализуются в \mathbb{H}^3 как компактные прямоугольные многогранники.

Теорема (В. 1998)

Для $n \geq 5$ объем компактного прямоугольного многогранника $L(n)$ равен

$$\text{vol } L(n) = \frac{n}{2} \left[2\Lambda(\theta_n) + \Lambda\left(\theta_n + \frac{\pi}{n}\right) + \Lambda\left(\theta_n - \frac{\pi}{n}\right) + \Lambda\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta_n\right) \right],$$

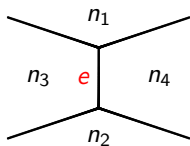
где

$$\theta_n = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{1}{2 \cos(\pi/n)}\right).$$

Операции композиции/декомпозиции и добавления/удаления ребра

Для многогранников P и P' , реализуемых как компактные прямоугольные, определим их **композицию** как отождествление вдоль некоторой n -угольной грани. Тогда результат также реализуется как компактный прямоугольный.

Удаление/добавление допустимого ребра:



$$\frac{n_1 - 1}{n_3 + n_4 - 4} \frac{n_2 - 1}{n_2 - 1}$$

Теорема (Т. Inoue, 2008)

Если P_0 реализуется в \mathbb{H}^3 как компактный прямоугольный, то найдется последовательность множеств многогранников P_1, \dots, P_k такая, что:

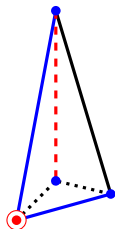
- P_i получено из P_{i-1} **декомпозицией** или **удалением ребра**,
- P_k состоит из **многогранников Лёбелля**.

При этом, $\text{vol}(P_0) \geq \text{vol}(P_1) \geq \text{vol}(P_2) \geq \dots \geq \text{vol}(P_k)$.

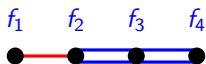
- 1 Многогранники Коксетера в пространствах постоянной кривизны
- 2 Прямоугольные многогранники в пространствах Лобачевского
- 3 Прямоугольная группа Коксетера минимального кообъема**
- 4 Схема доказательства основной теоремы
- 5 Арифметичность прямоугольных групп Коксетера, возникших при доказательстве теоремы
- 6 Открытые вопросы

Тетраэдр Коксетера $\Delta_{3,4,4}$

Обозначим через $\Delta_{3,4,4} = R(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ коксетеровский тетраэдр в \mathbb{H}^3 с двугранными углами $\alpha_1 = \frac{\pi}{3}$, $\alpha_2 = \frac{\pi}{4}$, $\alpha_3 = \frac{\pi}{4}$, и остальными двугранными углами $\frac{\pi}{2}$. $\Delta_{3,4,4}$ имеет 3 конечные и 1 идеальную вершины.



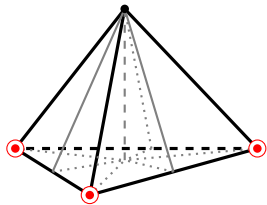
Обозначим его грани через f_1, f_2, f_3, f_4 так, что α_i – двугранный угол между гранями f_i и f_{i+1} , $i = 1, 2, 3$. Схема Коксетера для группы $\Gamma(\Delta_{3,4,4})$, порожденной отражениям в гранях f_1, f_2, f_3, f_4 , имеет вид



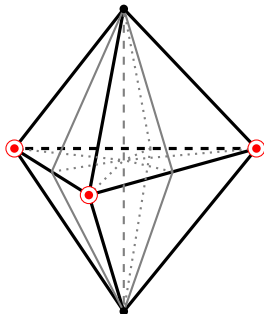
Многогранник $P_{(3,2)}$

Под действием группы диэдра порядка 6, порожденной отражениями в гранях f_1 и f_2 , получим тетраэдр $\Delta'_{3,4,4}$, состоящий из 6 копий $\Delta_{3,4,4}$. Обозначим через $P_{(3,2)}$ объединение $\Delta'_{3,4,4}$ и его зеркального образа при отражении в плоскости грани f_4 .

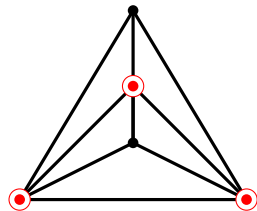
По построению, $P_{(3,2)}$ имеет 6 граней, 3 идеальных вершины и 2 конечных вершины.



(a)

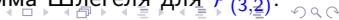


(b)



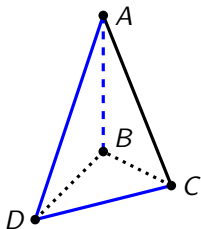
(c)

Тетраэдр $\Delta'_{3,4,4}$, многогранник $P_{(3,2)}$ и диаграмма Шлегеля для $P_{(3,2)}$.



Бипрямоугольные тетраэдры

Тетраэдр в \mathbb{H}^3 с вершинами A, B, C, D называется **бипрямоугольным**, если ребро AB ортогонально грани BCD , а грань ABC ортогональна ребру CD . При этом, двугранные углы равны $\angle AC = \angle BC = \angle BD = \frac{\pi}{2}$.



Обозначим оставшиеся двугранные углы через $\angle AB = \alpha$, $\angle AD = \beta$, $\angle CD = \gamma$, где $\alpha + \beta \geq \frac{\pi}{2}$ и $\beta + \gamma \geq \frac{\pi}{2}$.

Далее бипрямоугольный тетраэдр будем обозначать через $R(\alpha, \beta, \gamma)$.

Объем бипрямоугольного тетраэдра

Теорема (Э. Б. Винберг, 1987; R. Kellerhalls, 1989)

Пусть $R(\alpha, \beta, \gamma)$ – бипрямоугольный тетраэдр в \mathbb{H}^3 . Тогда

$$\text{vol}(R(\alpha, \beta, \gamma)) = \frac{1}{2} \left[\Lambda(\alpha + \delta) + \Lambda(\alpha - \delta) + \Lambda\left(\frac{\pi}{2} + \beta - \delta\right) + \Lambda\left(\frac{\pi}{2} - \beta + \delta\right) + \Lambda(\gamma + \delta) - \Lambda(\gamma - \delta) + 2\Lambda\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \right],$$

где $0 \leq \delta = \text{arctg} \frac{\sqrt{\cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma}}{\cos \alpha \cos \gamma} < \frac{\pi}{2}$.

В частности, по этой формуле получаем

$$\text{vol}\left(R\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{6} \Lambda\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Объем многогранника $\mathcal{P}_{(3,2)}$

По построению, у $\mathcal{P}_{(3,2)}$ все диэдральные углы равны $\frac{\pi}{2}$, а его объем равен

$$\text{vol}(\mathcal{P}_{(3,2)}) = 12 \text{vol}(\Delta_{3,4,4}) = 12 \text{vol}\left(R\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\Lambda\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}v_{\text{окт}}.$$

Хорошо известно [<https://oeis.org/A006752>], что $2\Lambda\left(\frac{\pi}{4}\right) = G$ – константа Каталана (1867) (в 2022 найдено 1 200 000 000 100 знаков после запятой!):

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} = 0,91596\dots$$

Теорема (В., А. А. Егоров, 2025)

Пусть \mathcal{P} – прямоугольный многогранник в \mathbb{H}^3 . Тогда

$$\text{vol}(\mathcal{P}) \geq G,$$

где $G = 2\Lambda\left(\frac{\pi}{4}\right)$ – константа Каталана. Более того, $\mathcal{P}_{(3,2)}$ – это единственный прямоугольный многогранник для которого выполняется равенство.

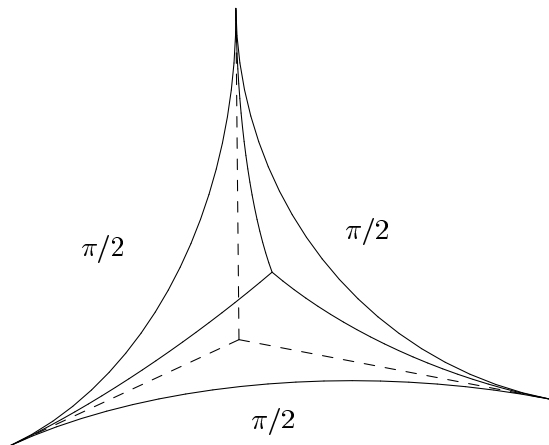


Рисунок из работы: J. Ratcliffe, S. Tschantz (2000).

- 1 Многогранники Коксетера в пространствах постоянной кривизны
- 2 Прямоугольные многогранники в пространствах Лобачевского
- 3 Прямоугольная группа Коксетера минимального кообъема
- 4 Схема доказательства основной теоремы**
- 5 Арифметичность прямоугольных групп Коксетера, возникших при доказательстве теоремы
- 6 Открытые вопросы

Лемма 1

Если для \mathcal{P} имеет место один из следующих случаев: (1) $V_f = 0$; (2) $V_\infty = 0$; (3) $V_\infty = 1$, то $\text{vol}(\mathcal{P}) > G$.

(1) Следует из теоремы Иноуэ (2008): среди всех компактных прямоугольных многогранников наименьшим является додекаэдр, его объем равен $4,306207\dots > G$.

(2) Следует из теоремы Аткинсона (2009): среди всех идеальных прямоугольных многогранников наименьшим является октаэдр, его объем равен $4G > G$.

(3) Следует из теоремы Нонаки (2015): если прямоугольный многогранник имеет ровно одну идеальную вершину, то он имеет не менее 18 конечных вершин, откуда следует, что снизу его объем оценивается величиной $\frac{7G}{4} > G$.

Теорема (С. Atkinson, 2009)

Пусть \mathcal{P} – прямоугольный многогранник в \mathbb{H}^3 с $V_\infty \geq 1$ идеальными и V_f конечными вершинами. Тогда имеют место следующие неравенства:

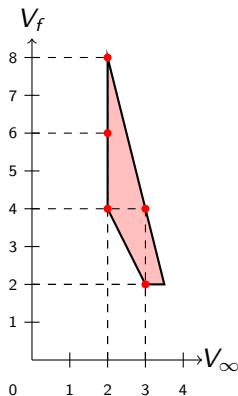
$$\frac{V_{oct}}{8} \cdot V_\infty + \frac{V_{oct}}{32} \cdot V_f - \frac{V_{oct}}{4} \leq \text{vol}(\mathcal{P}) < \frac{V_{oct}}{2} \cdot V_\infty + \frac{5V_{tet}}{8} \cdot V_f - \frac{V_{oct}}{2}.$$

Нижнюю оценку можно переписать в следующем виде:

$$\frac{1}{8}G(4V_\infty + V_f - 8) \leq \text{vol}(\mathcal{P}),$$

где G – константа Каталана.

Сведение к конечному набору пар (V_∞, V_f)



Замкнутая область Ω .

Лемма 2

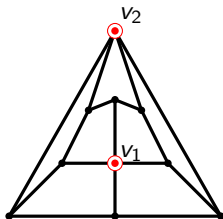
Пусть Ω – замкнутая область, приведенная на рисунке. Если $(V_\infty, V_f) \notin \Omega$, то $\text{vol}(\mathcal{P}) > G$.

Если число идеальных вершин равно $V_\infty = 2$

Лемма 3

Если $V_\infty = 2$, то $\text{vol}(\mathcal{P}) > G$.

- (1) Случай $(V_\infty, V_f) = (2, 4)$ не реализуется.
- (2) Случай $(V_\infty, V_f) = (2, 6)$ не реализуется.
- (3) Случай $(V_\infty, V_f) = (2, 8)$ реализуется на единственном многограннике $\mathcal{P}_{(2,8)}$ (четыреугольный трапецоэдр). Его объем равен $2G$.



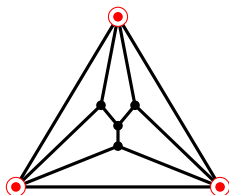
Многогранник $\mathcal{P}_{(2,8)}$.

Если число идеальных вершин равно $V_\infty = 3$

Лемма 4

Если $V_\infty = 3$, то $\text{vol}(\mathcal{P}) \geq G$. Причем равенство достигается тогда и только тогда, когда \mathcal{P} является треугольной бипирамидой $\mathcal{P}_{(3,2)}$.

- (1) Случай $(V_\infty, V_f) = (3, 2)$ реализуется на единственном многограннике $\mathcal{P}_{(3,2)}$, который был описан выше. Его объем равен константе Каталана G .
- (2) Случай $(V_\infty, V_f) = (3, 4)$ реализуется на единственном многограннике $\mathcal{P}_{(3,4)}$. Его объем равен $1,505361\dots > G$.



Многогранник $\mathcal{P}_{(3,4)}$.

- 1 Многогранники Коксетера в пространствах постоянной кривизны
- 2 Прямоугольные многогранники в пространствах Лобачевского
- 3 Прямоугольная группа Коксетера минимального кообъема
- 4 Схема доказательства основной теоремы
- 5 Арифметичность прямоугольных групп Коксетера, возникших при доказательстве теоремы**
- 6 Открытые вопросы

Арифметичность дискретных групп $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{H}^3)$ конечного кообъема играет важную роль при изучении гиперболических многообразий и орбифолдов \mathbb{H}^3/Γ , см. С. Maclachlan, A. W. Reid, The arithmetic of hyperbolic 3-manifolds. Springer-Verlag, (2003).

Отметим здесь лишь следующее важное свойство: по теореме Маргулиса, соизмеритель

$$\text{Comm}(\Gamma) = \{\gamma \in \text{Isom}(\mathbb{H}^3) \mid \gamma\Gamma\gamma^{-1} \text{ и } \Gamma \text{ соизмеримы}\}$$

является дискретной группой тогда и только тогда, когда группа Γ является неарифметической.

Арифметичность дискретных групп $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{H}^3)$ конечного кообъема играет важную роль при изучении гиперболических многообразий и орбифолдов \mathbb{H}^3/Γ , см. С. Maclachlan, A. W. Reid, The arithmetic of hyperbolic 3-manifolds. Springer-Verlag, (2003).

Отметим здесь лишь следующее важное свойство: по теореме Маргулиса, соизмеритель

$$\text{Comm}(\Gamma) = \{ \gamma \in \text{Isom}(\mathbb{H}^3) \mid \gamma\Gamma\gamma^{-1} \text{ и } \Gamma \text{ соизмеримы} \}$$

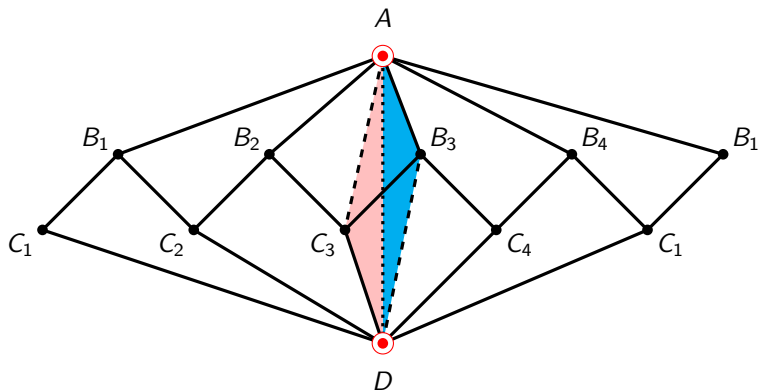
является дискретной группой тогда и только тогда, когда группа Γ является неарифметической.

Для дискретных групп движений пространства \mathbb{H}^n , порожденных конечным числом отражений и имеющих фундаментальный многогранник конечного объема, необходимые и достаточные условия арифметичности были получены Винбергом в 1967 г.,

Критерий арифметичности Винберга сильно упрощается, если фундаментальный многогранник P группы $\Gamma(P)$ не является компактным. А именно, пусть $A(P) = (a_{ij})_{i,j=1}^N$ – матрица Грама многогранника P . Обозначим через $\text{Cyc}(A)$ множество всех циклических произведений вида $a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \cdots a_{i_{m-1} i_m} a_{i_m i_1}$. Тогда для арифметичности группы $\Gamma(P)$ необходимо и достаточно, чтобы все циклические произведения из $\text{Cyc}(2 \cdot A(P))$ лежали в \mathbb{Z} .

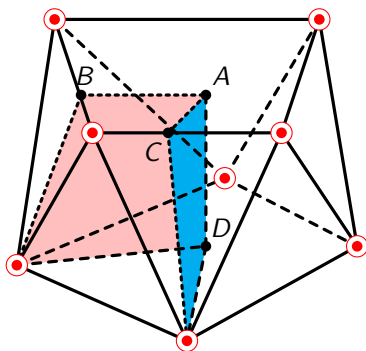
Замечание

Возникшие в ходе доказательства теоремы прямоугольные гиперболические группы Коксетера $\Gamma(\mathcal{P}_{(3,2)})$, $\Gamma(\mathcal{P}_{(3,4)})$ и $\Gamma(\mathcal{P}_{(2,8)})$ являются арифметическими.



Многогранник $\mathcal{P}_{(2,8)}$ и тетраэдр $\Delta_{4,4,4}$.

Соизмеримость групп отражений, II



Многогранник $\mathcal{P}_{(3,4)}$ как $\frac{1}{4}$ -долька прямоугольной антипризмы \mathcal{A}_4 .

- 1 Многогранники Коксетера в пространствах постоянной кривизны
- 2 Прямоугольные многогранники в пространствах Лобачевского
- 3 Прямоугольная группа Коксетера минимального кообъема
- 4 Схема доказательства основной теоремы
- 5 Арифметичность прямоугольных групп Коксетера, возникших при доказательстве теоремы
- 6 Открытые вопросы

Вопрос 1

Классифицировать все арифметические прямоугольные гиперболические группы Коксетера.

Вопрос 1

Классифицировать все арифметические прямоугольные гиперболические группы Коксетера.

А. А. Колпаков (2012) установил, что антипризма \mathcal{A}_n , $n \geq 3$, является минимальной по числу граней в классе идеальных гиперболических многогранников имеющих n -угольную грань.

Вопрос 2

Верно ли, что многогранник Лёбелля $L(n)$, $n \geq 5$, является минимальным по числу граней в классе компактных гиперболических многогранников, имеющих хотя бы одну n -угольную грань?

S. T. Drewitz, R. Kellerhals (2023) нашли минимальную по кообъему неарифметическую гиперболическую группу Коксетера, имеющую некомпактный фундаментальный многогранник.

Вопрос 3.

Какая неарифметическая прямоугольная гиперболическая группа Коксетера в \mathbb{H}^3 имеет наименьший кообъем?

S. T. Drewitz, R. Kellerhals (2023) нашли минимальную по кообъему неарифметическую гиперболическую группу Коксетера, имеющую некомпактный фундаментальный многогранник.

Вопрос 3.

Какая неарифметическая прямоугольная гиперболическая группа Коксетера в \mathbb{H}^3 имеет наименьший кообъем?

Вопрос 4 (из работы Э. Б. Винберга и Л. Д. Потягайло)

Верно ли, что наименьшее число гиперграней в компактном прямоугольном многограннике в \mathbb{H}^4 равно 120?

Спасибо за внимание!

`vesnin@math.nsc.ru`