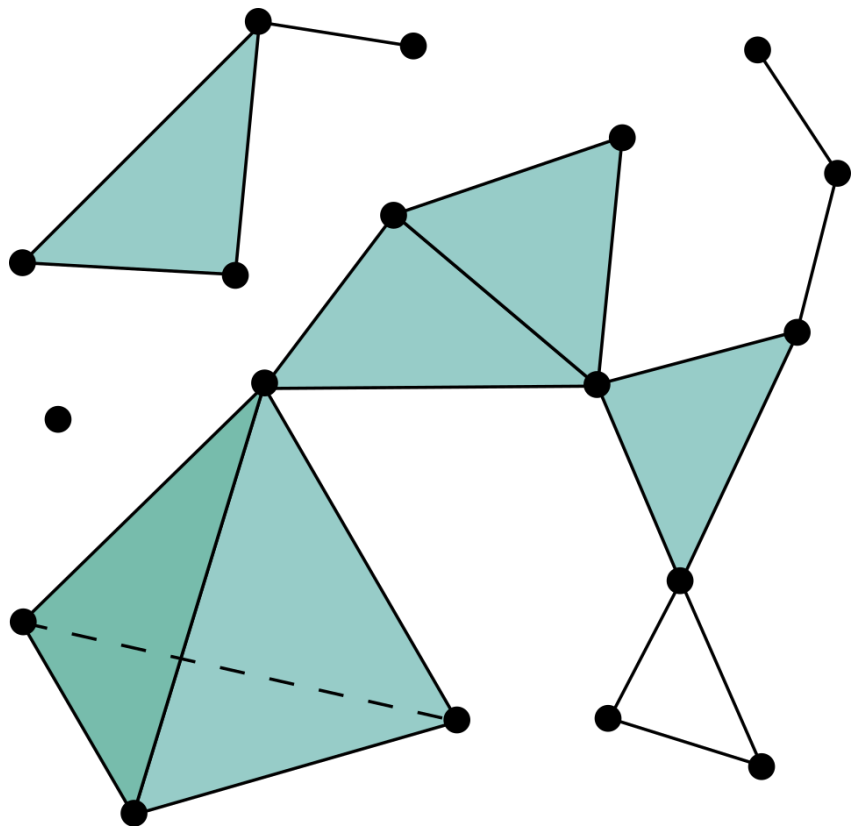


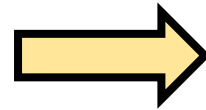
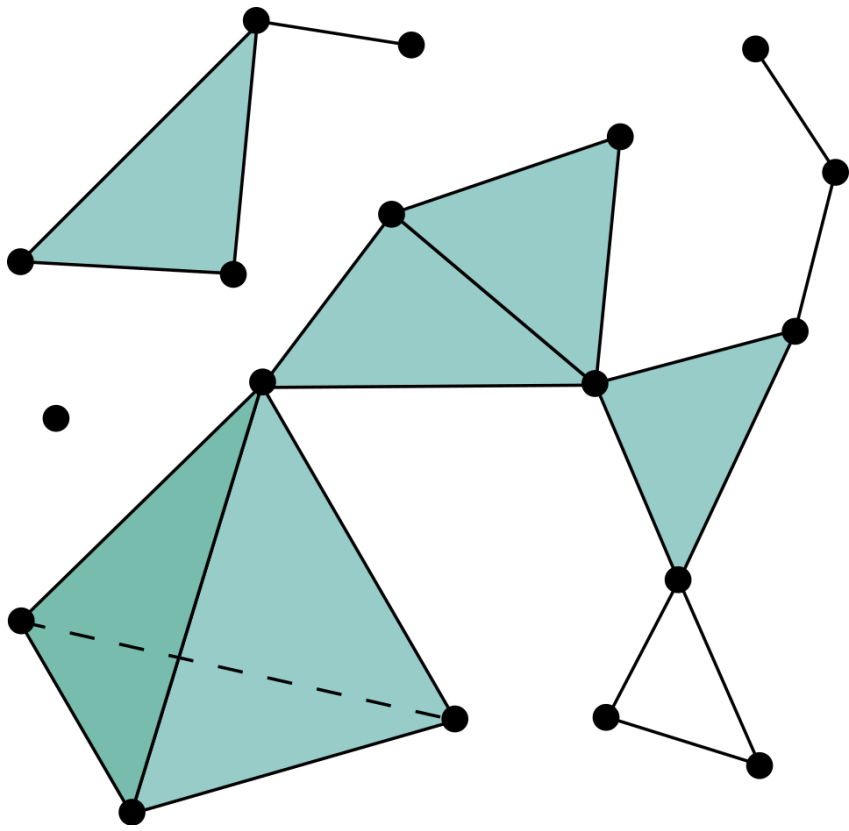
Вокруг матрицы Лапласа:
гомологии и центральности сетей

Тужилин Михаил

Симплициальные когомологии

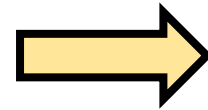
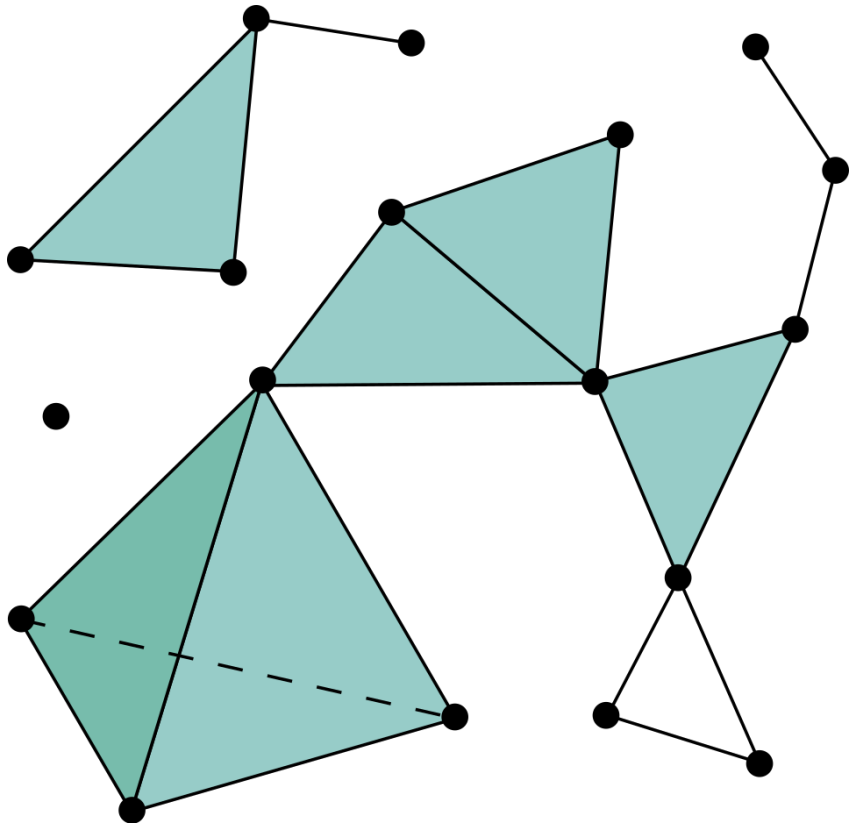


Симплициальные когомологии

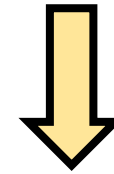


$$0 \begin{array}{c} \xrightarrow{\partial^{-1}} \\ \xleftarrow{(\partial^{-1})^*} \end{array} C^0 \begin{array}{c} \xrightarrow{\partial^0} \\ \xleftarrow{(\partial^0)^*} \end{array} C^1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\partial^1} \\ \xleftarrow{(\partial^1)^*} \end{array} \dots \begin{array}{c} \xrightarrow{\partial^{n-1}} \\ \xleftarrow{(\partial^{n-1})^*} \end{array} C^m \begin{array}{c} \xrightarrow{\partial^n} \\ \xleftarrow{(\partial^n)^*} \end{array} 0.$$

Симплициальные когомологии

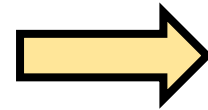
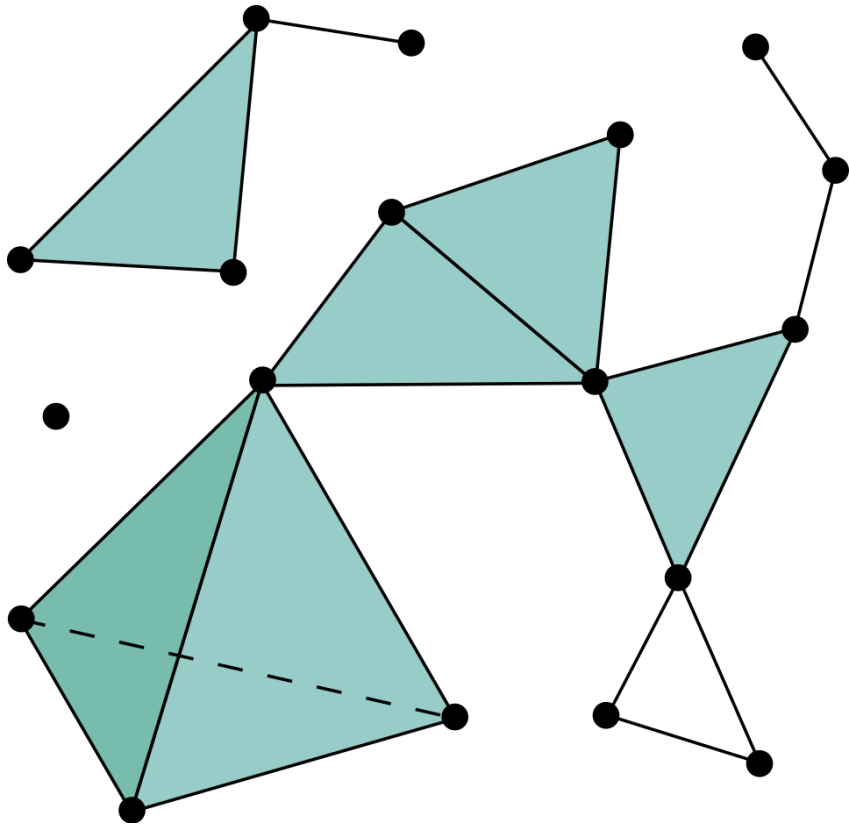


$$0 \begin{array}{c} \xrightarrow{\partial^{-1}} \\ \xleftarrow{(\partial^{-1})^*} \end{array} C^0 \begin{array}{c} \xrightarrow{\partial^0} \\ \xleftarrow{(\partial^0)^*} \end{array} C^1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\partial^1} \\ \xleftarrow{(\partial^1)^*} \end{array} \dots \begin{array}{c} \xrightarrow{\partial^{n-1}} \\ \xleftarrow{(\partial^{n-1})^*} \end{array} C^m \begin{array}{c} \xrightarrow{\partial^n} \\ \xleftarrow{(\partial^n)^*} \end{array} 0.$$



$$H_i = \ker(\partial_i) / \text{im}(\partial_{i+1}), \quad H^i = \ker(\partial^i) / \text{im}(\partial^{i-1})$$

Симплициальные когомологии

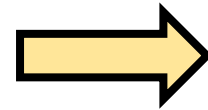
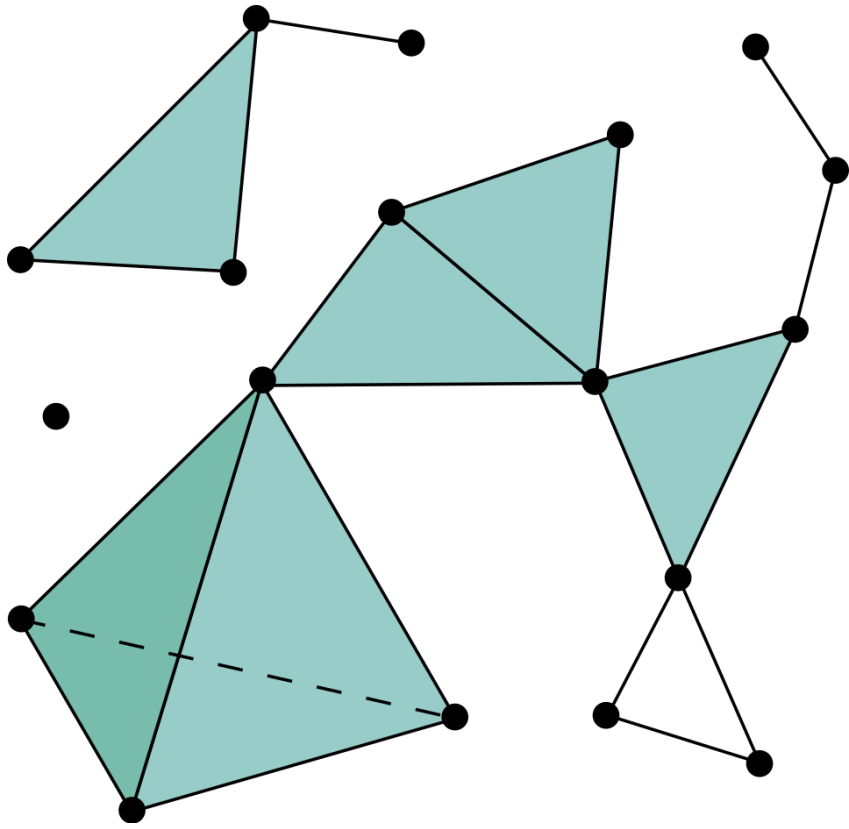


$$0 \begin{array}{c} \xrightarrow{\partial^{-1}} \\ \xleftarrow{(\partial^{-1})^*} \end{array} C^0 \begin{array}{c} \xrightarrow{\partial^0} \\ \xleftarrow{(\partial^0)^*} \end{array} C^1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\partial^1} \\ \xleftarrow{(\partial^1)^*} \end{array} \dots \begin{array}{c} \xrightarrow{\partial^{n-1}} \\ \xleftarrow{(\partial^{n-1})^*} \end{array} C^m \begin{array}{c} \xrightarrow{\partial^n} \\ \xleftarrow{(\partial^n)^*} \end{array} 0.$$

$$L_{down}^i = \partial^{i-1} \circ (\partial^{i-1})^*, \quad L_{up}^i = (\partial_i)^* \circ \partial^i$$

$$L^i = L_{down}^i + L_{up}^i : C^i \rightarrow C^i$$

Симплициальные когомологии



$$0 \begin{array}{c} \xrightarrow{\partial^{-1}} \\ \xleftarrow{(\partial^{-1})^*} \end{array} C^0 \begin{array}{c} \xrightarrow{\partial^0} \\ \xleftarrow{(\partial^0)^*} \end{array} C^1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\partial^1} \\ \xleftarrow{(\partial^1)^*} \end{array} \dots \begin{array}{c} \xrightarrow{\partial^{n-1}} \\ \xleftarrow{(\partial^{n-1})^*} \end{array} C^m \begin{array}{c} \xrightarrow{\partial^n} \\ \xleftarrow{(\partial^n)^*} \end{array} 0.$$

$$L_{down}^i = \partial^{i-1} \circ (\partial^{i-1})^*, \quad L_{up}^i = (\partial_i)^* \circ \partial^i$$

$$L^i = L_{down}^i + L_{up}^i : C^i \rightarrow C^i$$

$$H^i \cong \ker(L^i)$$

Оператор Лапласа

- Неориентированный, связный, простой граф G

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \xrightleftharpoons{\partial^{-1}} & C^0 & \xrightleftharpoons{\partial^0} & C^1 & \xrightleftharpoons{\partial^1} & 0 \\ & & (\partial^{-1})^* & & (\partial^0)^* & & (\partial^1)^* \end{array}$$

$$L^0 = (\partial^0)^* \circ \partial^0 = L : C^0 \rightarrow C^0, \quad L^1 = \partial^0 \circ (\partial^0)^* : C^1 \rightarrow C^1$$

Оператор Лапласа

Свойства:

Оператор Лапласа

Свойства:

- Определяет компоненты связности графа

Оператор Лапласа

Свойства:

- Определяет компоненты связности графа
- Дополнения до диагональных элементов равно числу остовных деревьев

Оператор Лапласа

Свойства:

- Определяет компоненты связности графа
- Дополнения до диагональных элементов равно числу остовных деревьев
- Второе собственное значение (алгебраическая связность) связано со связностью графов, потоками, разрезами в графах

Оператор Лапласа

Свойства:

- Определяет компоненты связности графа
- Дополнения до диагональных элементов равно числу остовных деревьев
- Второе собственное значение (алгебраическая связность) связано со связностью графов, потоками, разрезами в графах
- Имеет много приложений в различных областях: от анализа данных до анализа сетей связей в мозге

Центральности

Опр. Центральность это любая функция $V \rightarrow R$, которая сохраняется при изоморфизме графов (элемент C^0 !).

Примеры: локальный кластерный коэффициент c_i , степень d_i , радиальность $Rad(i)$.

$$c_i = \frac{\sum_{i,j,k \in V(G)} a_{ij} a_{jk} a_{ki}}{d_i(d_i - 1)}, \quad Rad(i) = \frac{\sum_{j \in V(G), j \neq i} (diam(G) + 1 - dist(i, j))}{n - 1}$$

Центральности

Реальные
данные



Graph Name	IVI	IEI	d_{max}	d_{avg}	r	ITI	T_{avg}	T_{max}	K_{avg}	κ	K	ω_{neu}	Size	Download
ia-crime-moreno	829	1K	25	3	-0.16	57	-	5	0.01	0.01	4	3	5 KB	Download
ia-dbpedia-team-bi	365K	890K	2K	4	-0.20	14K	-	747	0.00	0.00	12	6	2 MB	Download
ia-dnc-corecipient	906	12K	462	26	-0.09	782K	863	14K	0.61	0.56	75	38	41 KB	Download
ia-email-EU-dir	265K	419K	8K	3	-0.20	2M	6	15K	0.09	0.01	57	13	1 MB	Download
ia-email-EU	32K	54K	623	3	-0.38	147K	4	2K	0.11	0.03	23	11	168 KB	Download
ia-email-univ	1K	5K	71	9	0.08	16K	14	261	0.22	0.17	12	12	15 KB	Download
ia-enron-email-dynamic	87K	1M	39K	26	-0.04	822M	9K	30M	1.07	0.26	2K	21	4 MB	Download
ia-enron-large	34K	181K	1K	10	-0.12	2M	64	18K	0.51	0.09	44	17	496 KB	Download
ia-enron-only	143	623	42	8	-0.02	3K	18	125	0.43	0.36	10	8	2 KB	Download
ia-escorts-dynamic	10K	51K	616	10	-0.06	23K	2	3K	0.01	0.01	42	4	272 KB	Download
ia-fb-messages	1K	6K	112	10	-0.08	7K	5	242	0.07	0.04	12	5	19 KB	Download
ia-frwikinews-user-edits	25K	194K	33K	15	-0.25	3M	127	316K	0.30	0.00	18K	27	972 KB	Download
ia-hospital-ward-proximity-attr	75	32K	4K	864	0.09	47M	626K	4M	3.65	0.75	1K	72	108 KB	Download

Граф всемирных авиаперелетов

Неориентированный
граф (V, E) :

$V = \{\text{города с}\$
 $\text{аэропортами}\}$

$E = \{\text{авиаперелеты}\}$



Граф китайских слов

Неориентированный граф
(V, E):

$V = \{\text{иероглифы или слова}\}$

$E = \{\text{пересечения}\}$

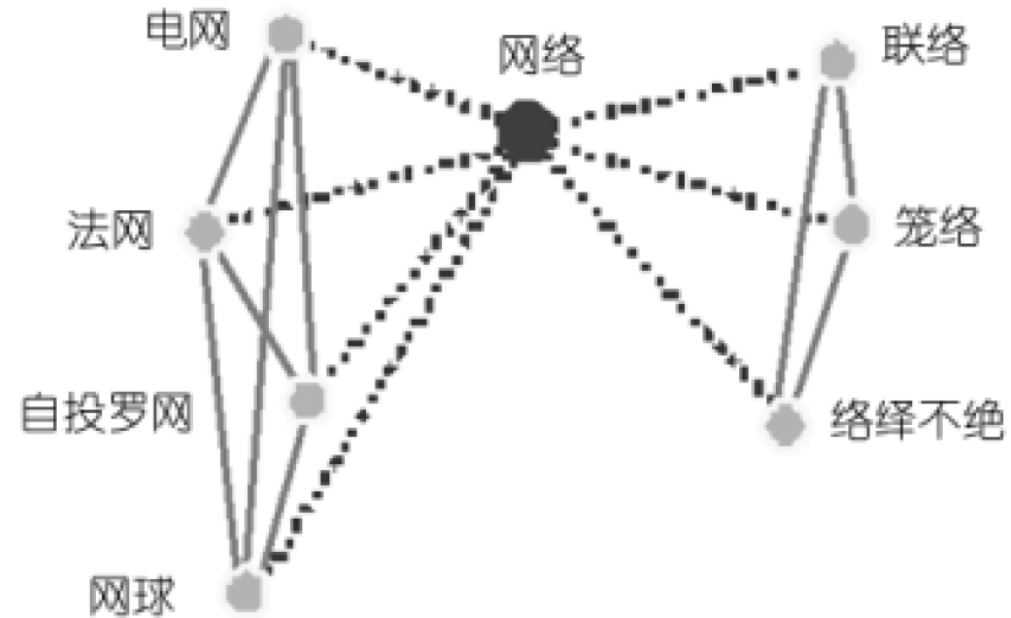


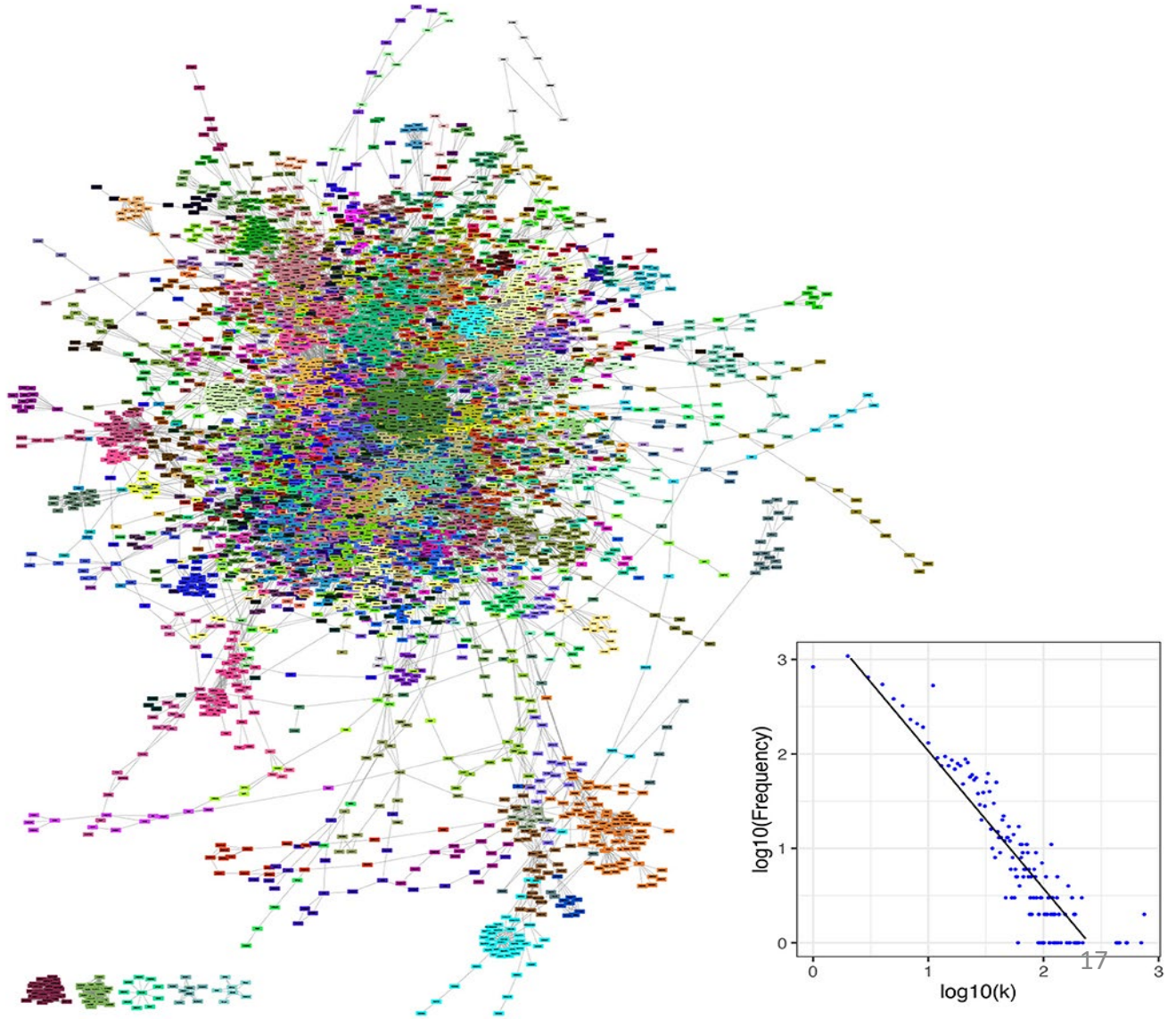
Fig. 1. Graph of Chinese phrase “网络”. The length of the phrase is $\ell = 2$. There are two full-connected subnets around the phrase. The one is constructed by nodes containing “网”, and the other is constructed by nodes containing “络”.

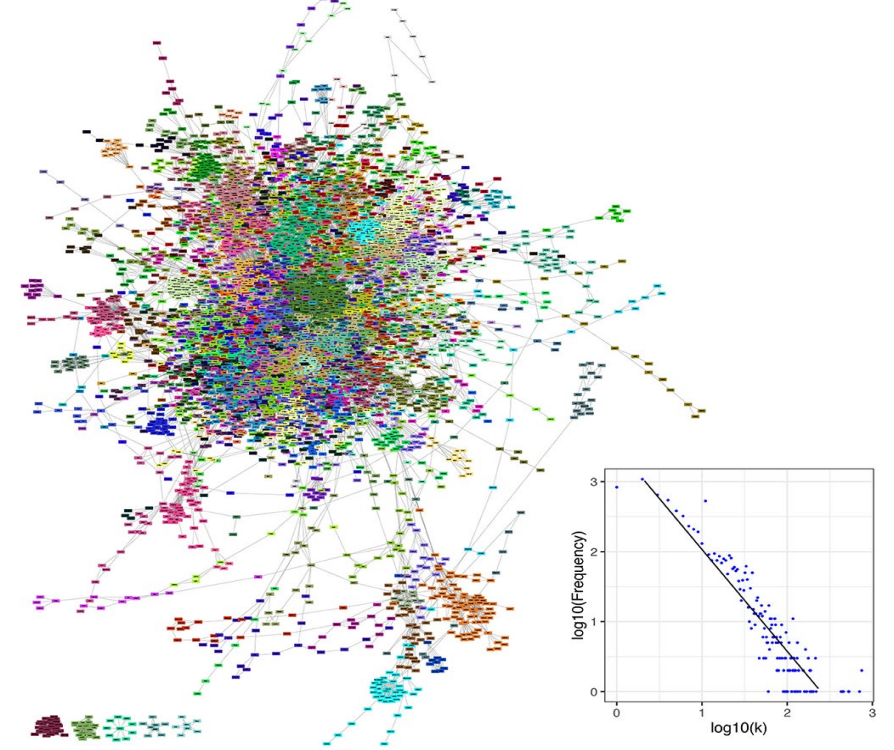
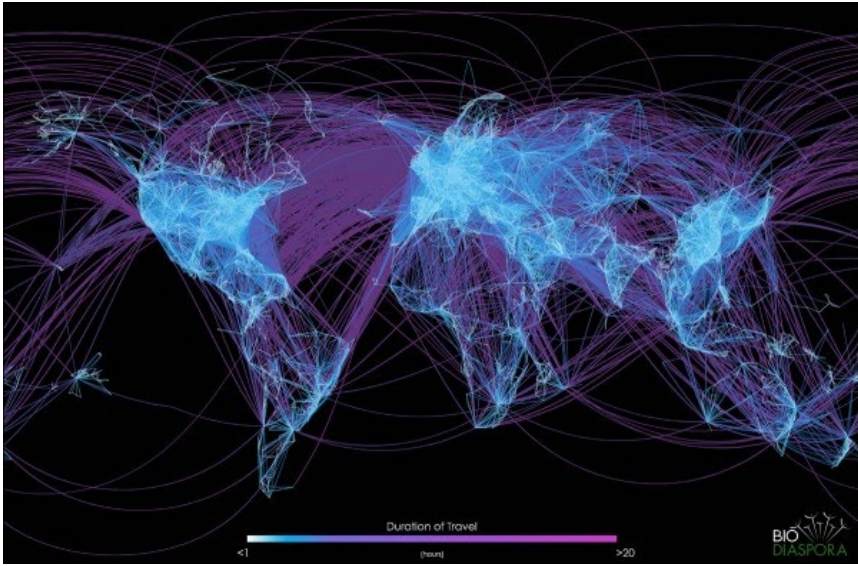
Транскрипционные регуляторные сети

Неориентированный граф
(V, E):

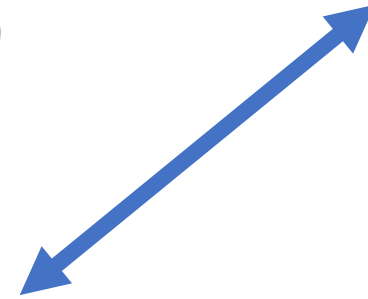
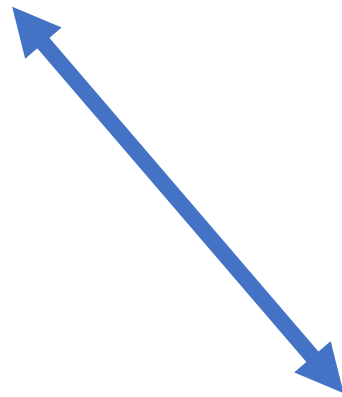
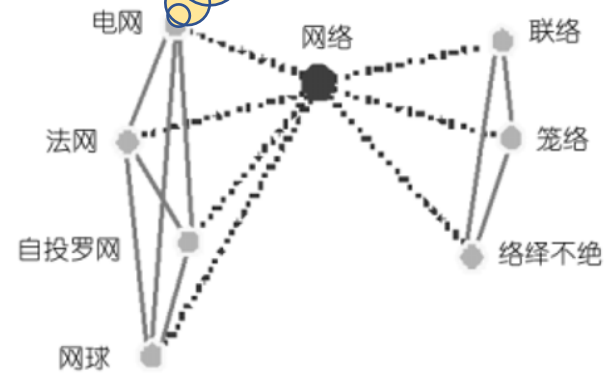
$V = \{\text{белки и ферменты}\}$

$E = \{\text{регуляторные взаимодействия}\}$






I. Сети малого мира
 II. Безмасштабные сети



[nature](#) > [letters](#) > article

Letter | Published: 04 June 1998

Collective dynamics of ‘small-world’ networks

[Duncan J. Watts](#)  & [Steven H. Strogatz](#)

[Nature](#) **393**, 440–442 (1998) | [Cite this article](#)

205k Accesses | **29k** Citations | **607** Altmetric | [Metrics](#)

Abstract

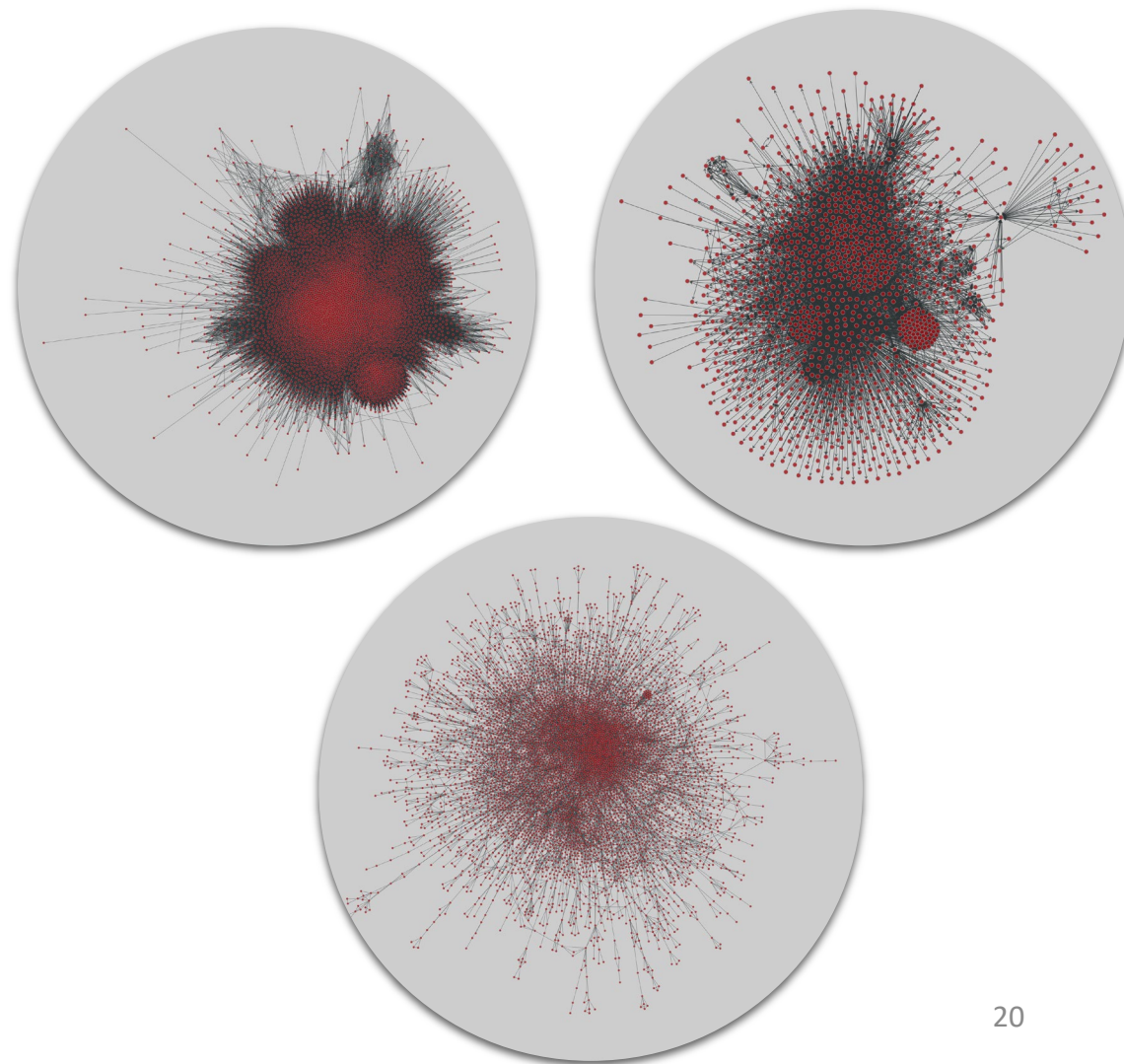
Networks of coupled dynamical systems have been used to model biological oscillators^{1,2,3,4}, Josephson junction arrays^{5,6}, excitable media⁷, neural networks^{8,9,10}, spatial games¹¹, genetic

Сети малого мира

«Реальные» сети

- Высокая кластеризация или локальная плотность связей

$$C_{WS}(G) = \frac{1}{n} \sum_{i \in V(G)} c_i, \quad c_i = \frac{\sum_{i,j,k \in V(G)} a_{ij} a_{jk} a_{ki}}{d_i(d_i-1)}$$



Сети малого мира

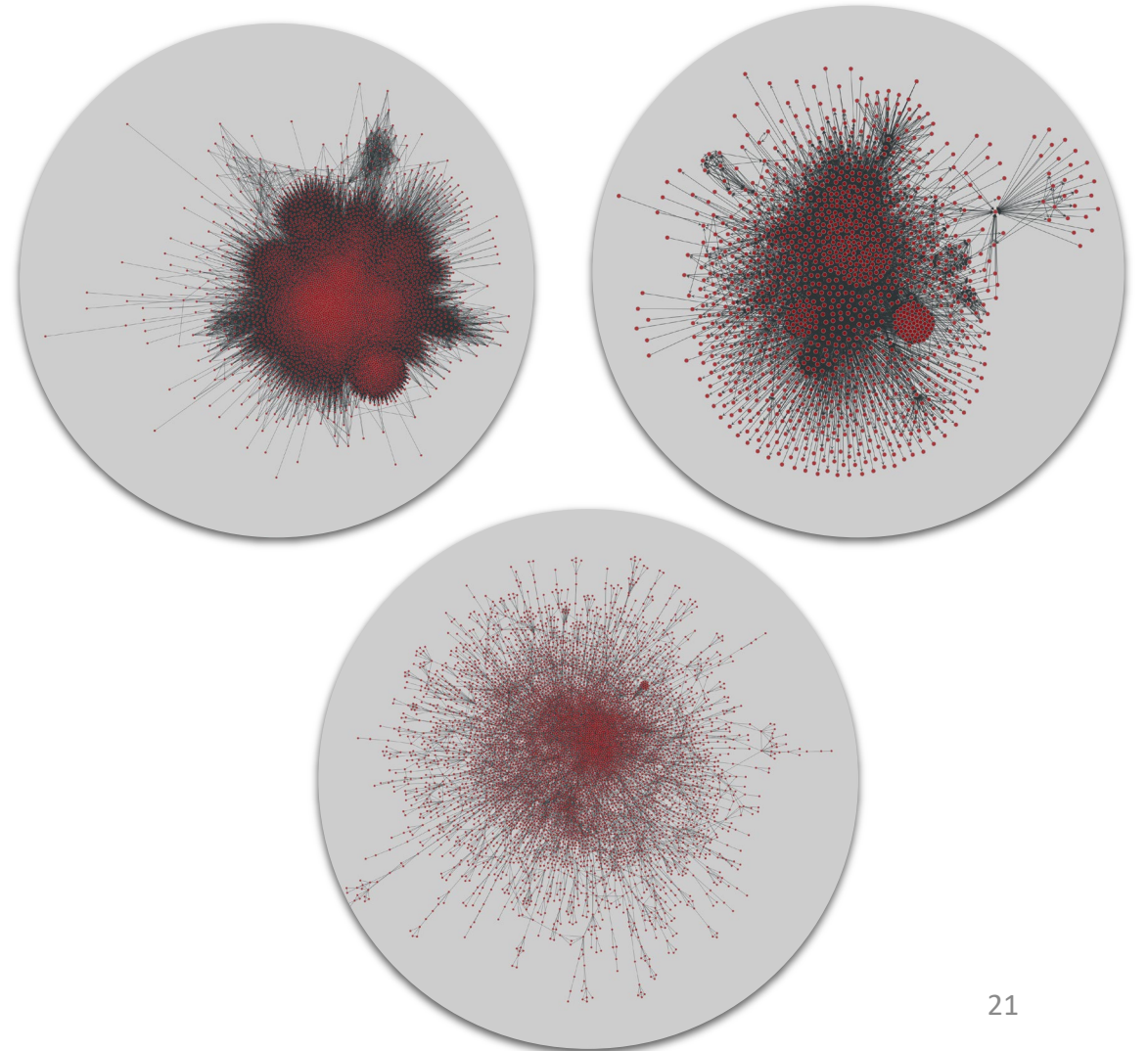
«Реальные» сети

- Высокая кластеризация или локальная плотность связей

$$C_{WS}(G) = \frac{1}{n} \sum_{i \in V(G)} c_i, \quad c_i = \frac{\sum_{i,j,k \in V(G)} a_{ij} a_{jk} a_{ki}}{d_i(d_i-1)}$$

- Высокая эффективность для потока информации или достижимость

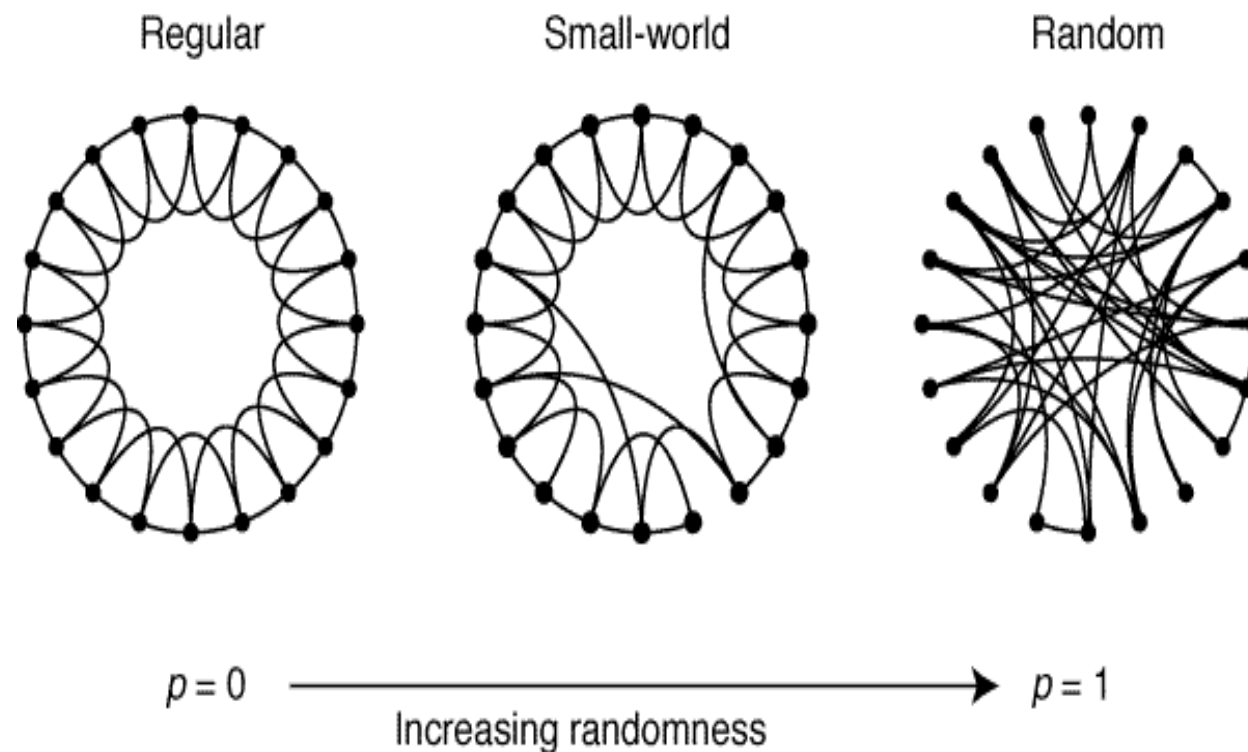
$$L(G) = \text{diam}(G) + 1 - \frac{1}{n} \sum_{i \in V(G)} \text{Rad}(i),$$
$$\text{Rad}(i) = \frac{\sum_{j \in V(G), j \neq i} (\text{diam}(G) + 1 - \text{dist}(i, j))}{n-1}$$



Сети малого мира

Модель Уоттса-Строгаца

- Строим кольцо - регулярный граф $(n, 2k)$
- «Переподключаем» все ребра с вероятностью p к случайной вершине с сохранением простоты графа



Emergence of Scaling in Random Networks

ALBERT-LÁSZLÓ BARABÁSI AND RÉKA ALBERT [Authors Info & Affiliations](#)

SCIENCE • 15 Oct 1999 • Vol 286, Issue 5439 • pp. 509-512 • DOI: 10.1126/science.286.5439.509

↓ 26 882 🗨️ 649



CHECK ACCESS

Abstract

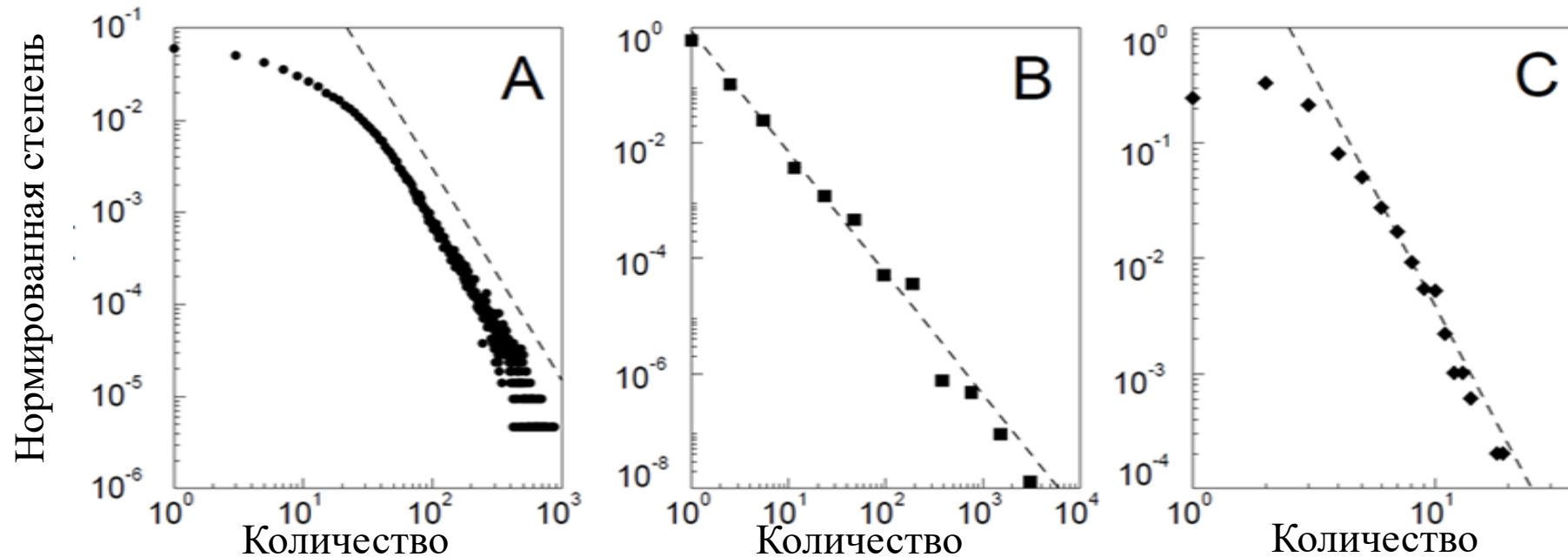
Systems as diverse as genetic networks or the World Wide Web are best described as networks with complex topology. A common property of many large networks is that the vertex connectivities follow a scale-free power-law distribution. This feature was found to be a consequence of two generic mechanisms: (i) networks expand continuously by the addition of new vertices, and (ii) new vertices attach preferentially to sites that are already well connected. A model based on these two



Безмасштабные сети

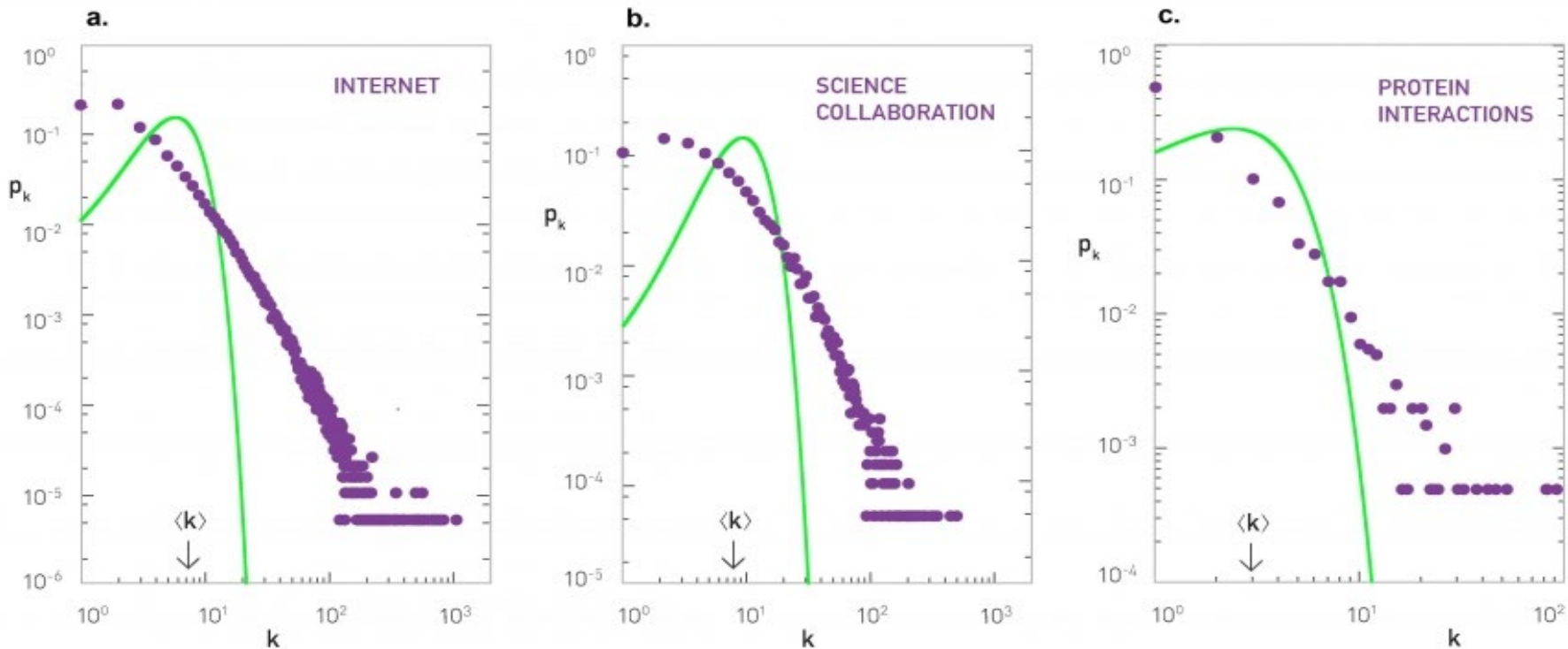
Гистограмма распределения $\left\{ \frac{d_i}{\sum d_k} \right\}, i = 1 \dots n$ для реальных сетей

в логарифмическом масштабе:

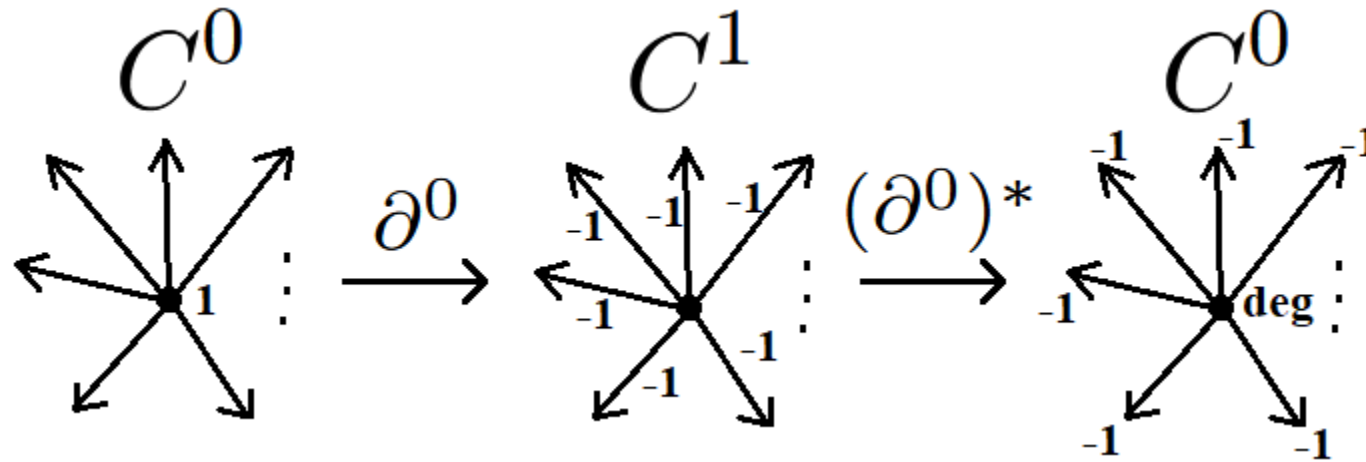


Безмасштабные сети

Гистограмма распределения $\left\{ \frac{d_i}{\sum d_k} \right\}, i = 1 \dots n$ для реальных сетей
в логарифмическом масштабе:



Центральности

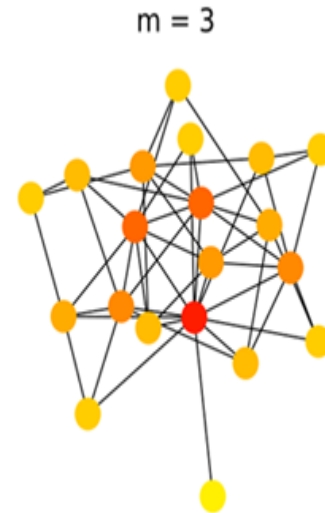
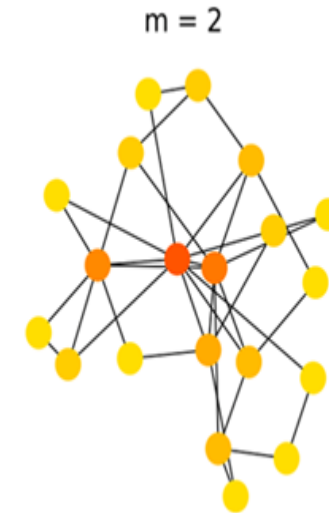


- Элементы C^1 и выше?

Безмасштабные сети

Модель Барабаши-Альберта

- Строим связный любой граф (например, звезду) на $t + 1 < n$ вершинах
- Добавляем на каждом шаге по одной вершине $t + 2, t + 3, \dots, n$ и соединяем ее с t вершинами, используя предпочтительное присоединение: $p_i = \frac{d_i}{\sum_i d_i}$



Кси-центральность

- **Опр.** Кси-центральность ξ_i это отношение числа ребер, выходящих из окрестности i -ой вершины деленное на число вершин в этой окрестности

$$\xi_i = \frac{|E(N(i), V \setminus N(i))|}{d_i}.$$

Для любой вершины выполнено: $1 \leq \xi_i \leq n - d_i$.

Кси-центральность

- **Опр.** Кси-центральность ξ_i это отношение числа ребер, выходящих из окрестности i -ой вершины деленное на число вершин в этой окрестности

$$\xi_i = \frac{|E(N(i), V \setminus N(i))|}{d_i}.$$

Для любой вершины выполнено: $1 \leq \xi_i \leq n - d_i$.

- **Опр.** Нормализованная кси-центральность $\hat{\xi}_i$
- $$\hat{\xi}_i = \frac{|E(N(i), V \setminus N(i))|}{d_i(n - d_i)}.$$

Для любой вершины выполнено : $\frac{1}{n-d_i} \leq \hat{\xi}_i \leq 1$.

Кси-центральность

- T[2025]. Для любого графа G

$$\widehat{\xi}_i \geq \frac{\lambda_2}{n},$$

где λ_2 - это алгебраическая связность графа или второе собственное значение матрицы Лапласа ($\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$).

Кси-центральность

- Т[2025]. Для любого графа G

$$\widehat{\xi}_i \geq \frac{\lambda_2}{n},$$

где λ_2 - это алгебраическая связность графа или второе собственное значение матрицы Лапласа ($\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$).

- Т[2025]. Если в графе степень вершины $d_i \leq \frac{n}{2}$, то $\xi_i \geq h(G)$. Для любой вершины выполнено

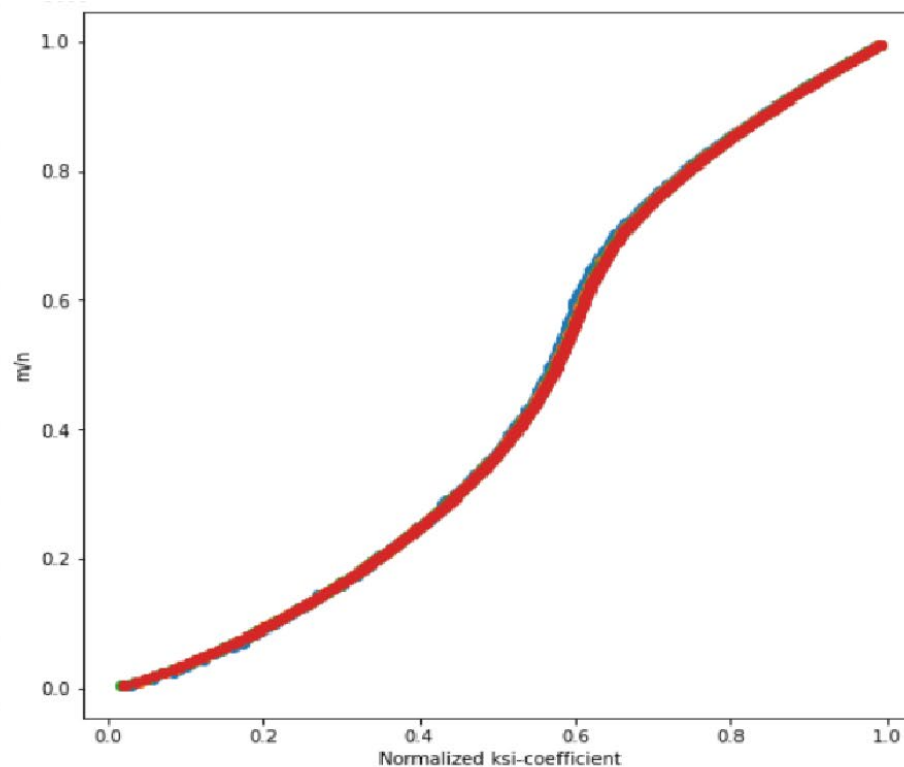
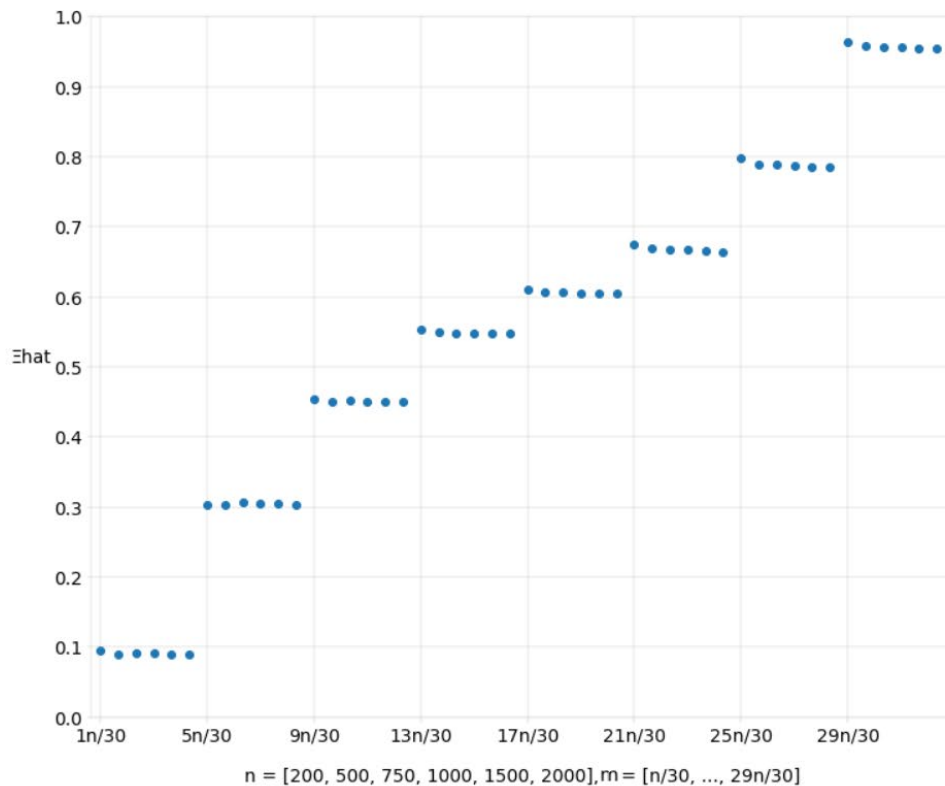
$$\widehat{\xi}_i \geq \begin{cases} h(G)(n - d_i), & \text{if } d_i \leq \frac{n}{2}, \\ h(G), & \text{в ост,} \end{cases}$$

где $h(G)$ число Чигера графа G .

Кси-центральность

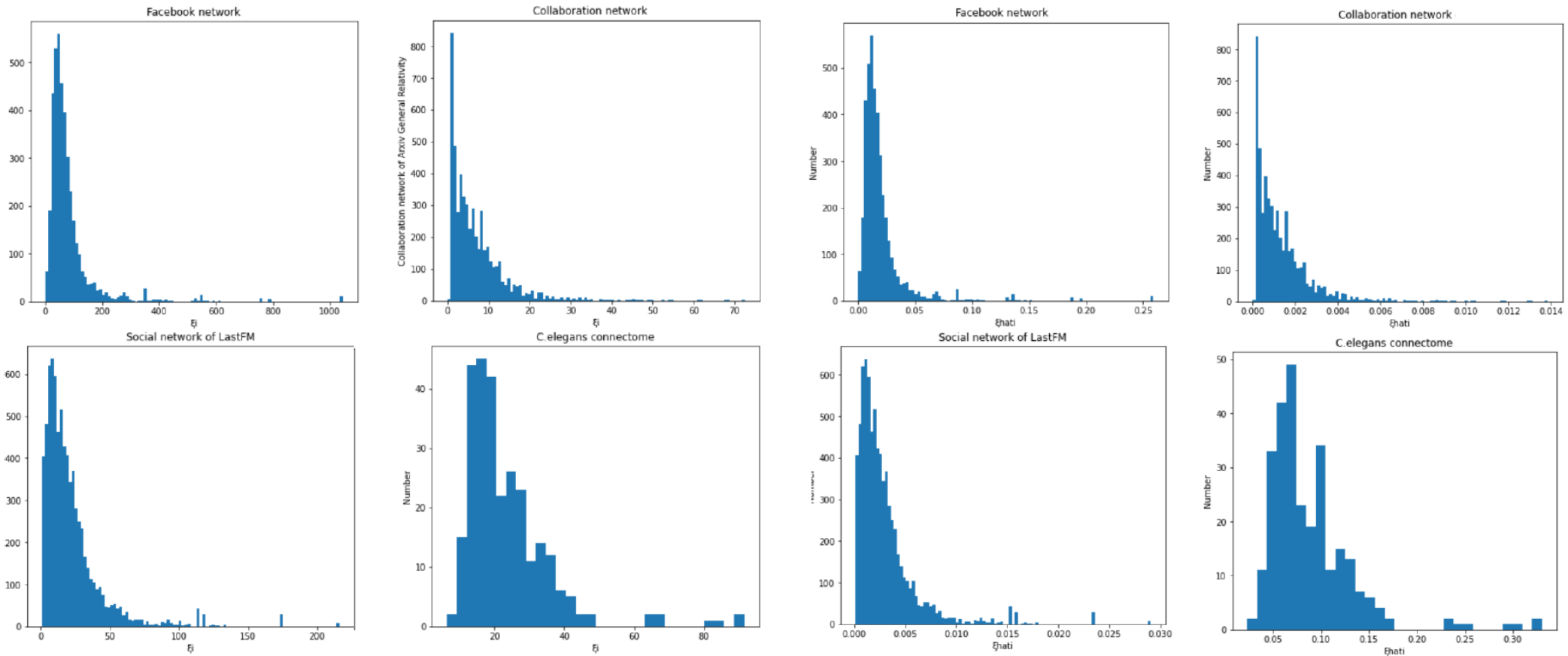
$$\hat{\Xi}(G) = \frac{1}{n} \sum_{i \in V(G)} \hat{\xi}_i$$

- Нормализованный кси-коэффициент не зависит от размера сети в модели Б-А



Кси-центральность

- Кси-центральность и нормализованная имеют похожую форму распределения



Кси-центральность

- Кси-распределения для 40 различных реальных сетей

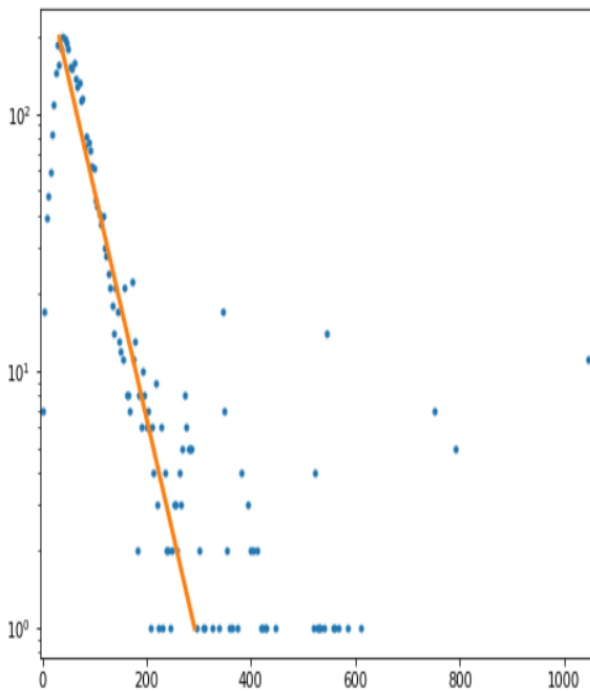
	name	nn	ne	aver_norm_ksi
0	C. elegans interactome	8990	175735	1.426E-02
1	Human protein interactome	9375	146999	8.186E-03
2	Art exhibit dynamic contacts	10985	44521	5.517E-04
3	Douban friendship network	137213	291734	3.165E-04
4	Facebook network	4041	88235	1.996E-02
5	Collaboration network	5244	14497	1.140E-03
6	Social network of LastFM	7442	27795	2.804E-03
7	Twitch Social Networks Deutsch	12611	153139	2.132E-02
8	Social Network advogato	2941	15678	1.381E-02
9	Infrastructure Network openflights	6553	43428	1.007E-02
10	Web Graph EPA	4273	8910	1.323E-02
11	Web Graph spam	4769	37376	1.208E-02
12	Gemsec Deezer dataset Croatia	89490	498203	2.656E-04
13	Gemsec Deezer dataset Hungary	73662	222888	1.261E-04
14	Gemsec Deezer dataset Romania	41775	125827	1.990E-04
15	Gemsec Facebook dataset artist	79667	819307	1.527E-03
16	Gemsec Facebook dataset athletes	13868	86859	2.594E-03
17	Gemsec Facebook dataset company	14115	52311	1.196E-03
18	Gemsec Facebook dataset government	7059	89456	8.174E-03

19	Gemsec Facebook dataset new sites	42078	206260	7.020E-04
20	Gemsec Facebook dataset politician	5910	41730	5.475E-03
21	Gemsec Facebook dataset public figure	11567	67115	2.746E-03
22	Gemsec Facebook dataset tvshow	3894	17263	2.747E-03
23	DBLP collaboration network	317082	1049867	4.671E-05
24	Gowalla location based online social network	196593	950328	2.430E-03
25	Brightkite location based online social network	58230	214079	8.407E-04
26	Amazon product network	334865	925873	3.153E-05
27	Email communication network from Enron	36694	183832	6.338E-03
28	Arxiv High Energy Physics paper citation network	34548	420922	1.489E-03
29	Biological Network grid-human	18874	62365	1.683E-03
30	Vidal human interactome	3135	6726	5.018E-03
31	Brain Network fly-drosophila-medulla-1	1783	9017	5.926E-02
32	Protein interactomes across the tree of life	27277	440136	7.592E-03
33	Marvel Universe social network	19253	95498	9.612E-03
34	Global nematode-mammal interactions	32220	61605	7.087E-04
35	Internet Autonomous Systems graph	47993	109771	1.033E-02
36	Scientific collaborations in physics	49195	175693	1.946E-04
37	EU national procurement networks FR 2011	51921	87197	1.328E-03
38	Stack Overflow favorites	670816	1301943	4.011E-04
39	WordNet relationships	181537	657000	2.990E-04

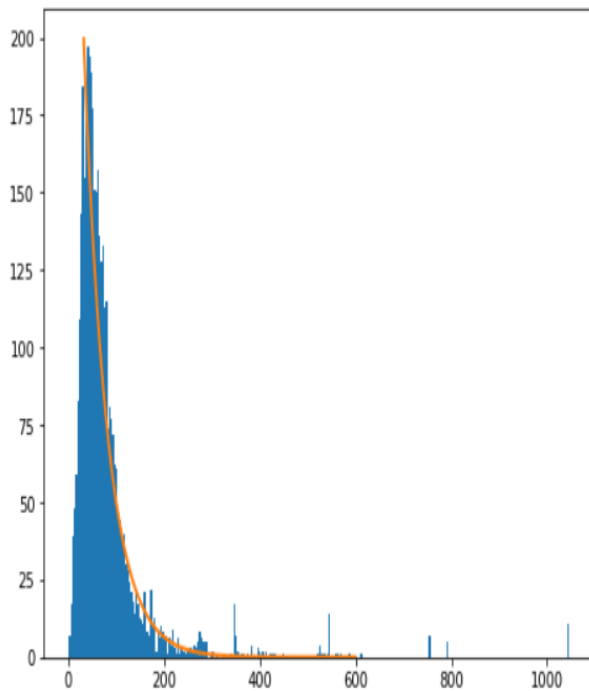
Кси-центральность

- Кси-распределения для 40 различных реальных сетей

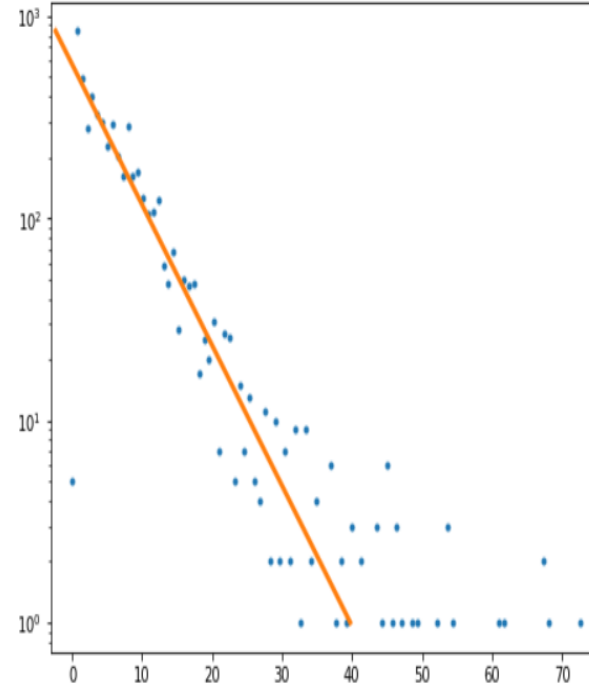
Facebook network



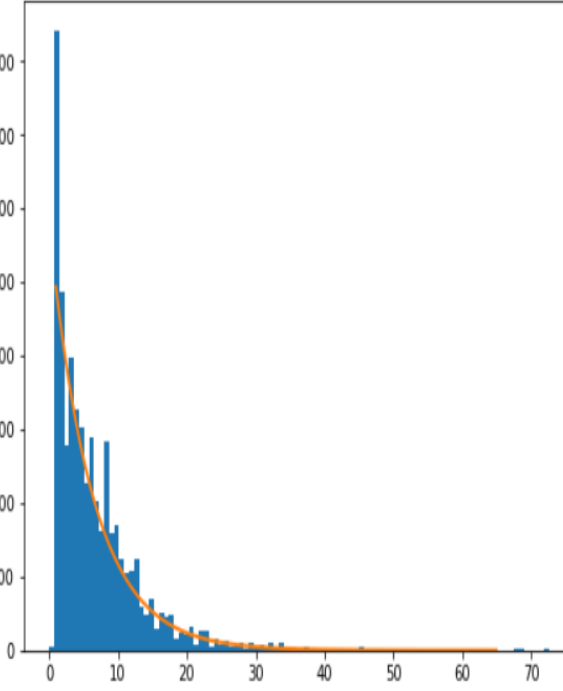
Facebook network



Collaboration network

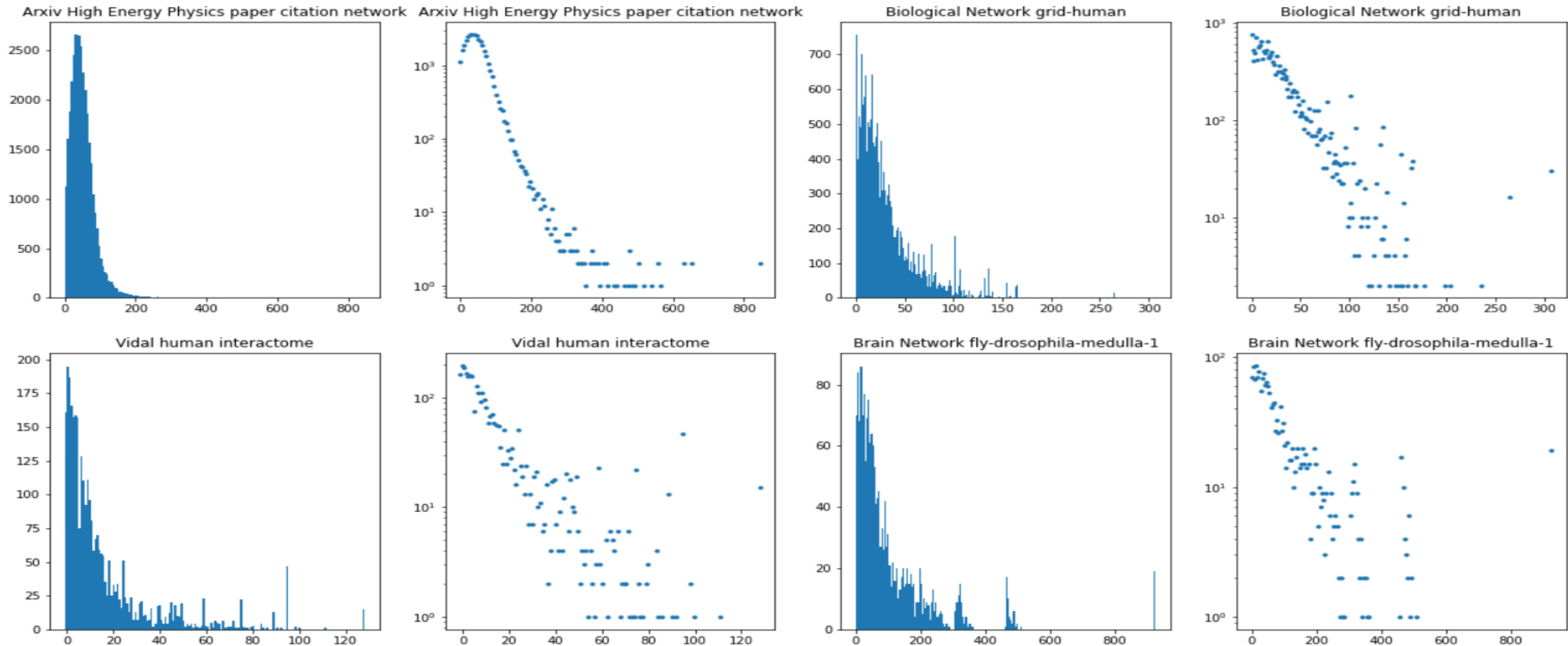


Collaboration network



Кси-центральность

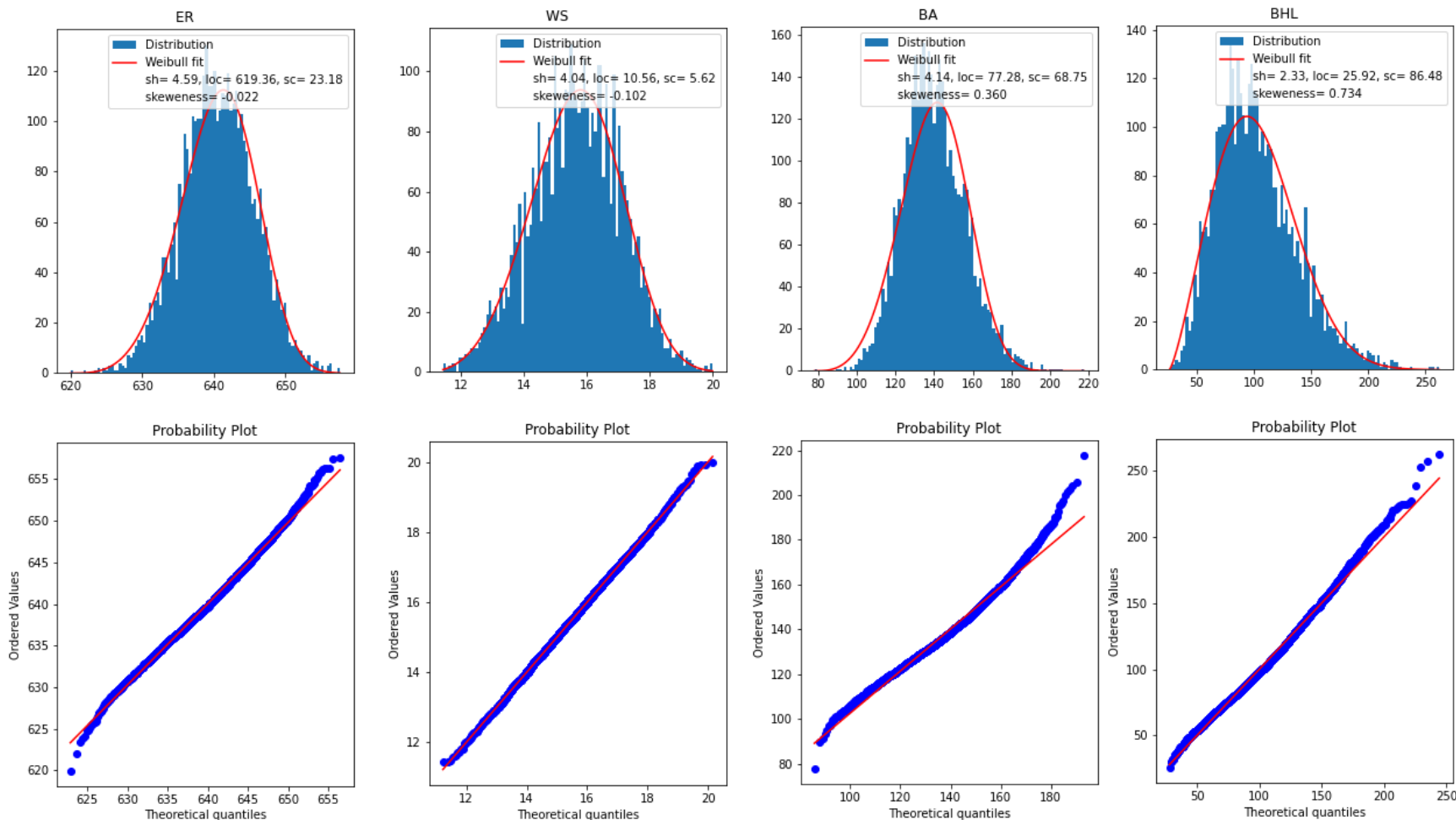
- Кси-распределения для 40 различных реальных сетей



Кси-центральность

$$skewness = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i \in V(G)} (\xi_i - \Xi)^3}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i \in V(G)} (\xi_i - \Xi)^2\right)^{3/2}}$$

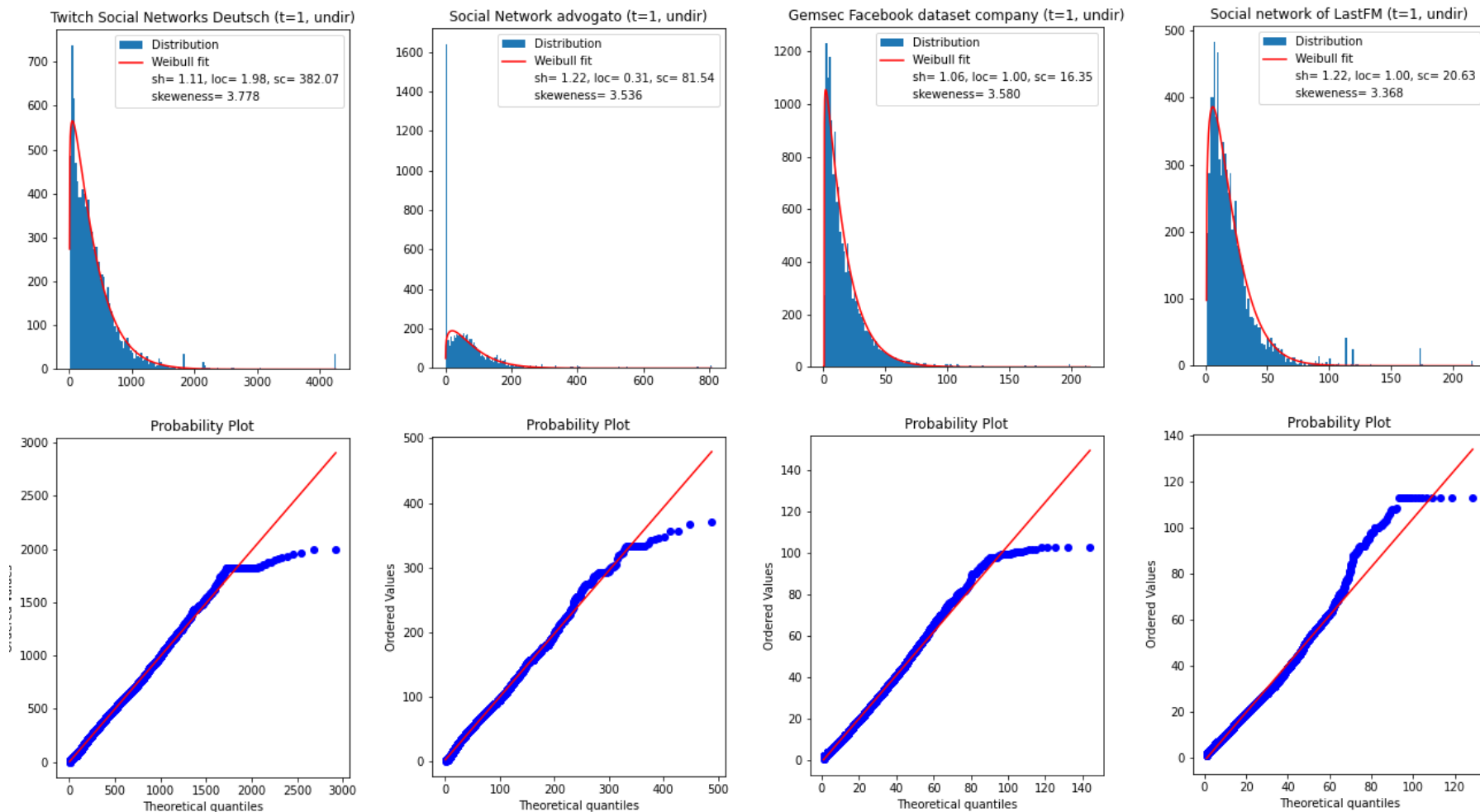
- Гистограммы кси-распределений для модельных сетей



Кси-центральность

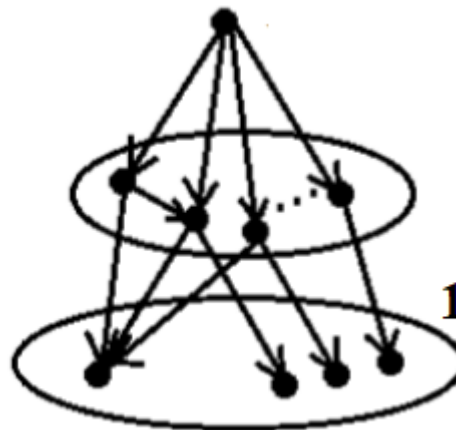
$$skewness = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i \in V(G)} (\xi_i - \Xi)^3}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i \in V(G)} (\xi_i - \Xi)^2\right)^{3/2}}$$

- Гистограммы кси-распределений для реальных сетей



Серия инвариантов

$$\chi_i^j(k) = \begin{cases} 1, & k \in \mathcal{N}^j(i), \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$



Серия инвариантов

$$\chi_i^j(k) = \begin{cases} 1, & k \in \mathcal{N}^j(i), \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad \xi_i^j = \frac{(L\chi_i^j, \chi_i^j)}{(\chi_i^j, \chi_i^j)}, \text{ for } i \in V(G)$$

Серия инвариантов

$$\chi_i^j(k) = \begin{cases} 1, & k \in \mathcal{N}^j(i), \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad \xi_i^j = \frac{(L\chi_i^j, \chi_i^j)}{(\chi_i^j, \chi_i^j)}, \text{ for } i \in V(G)$$

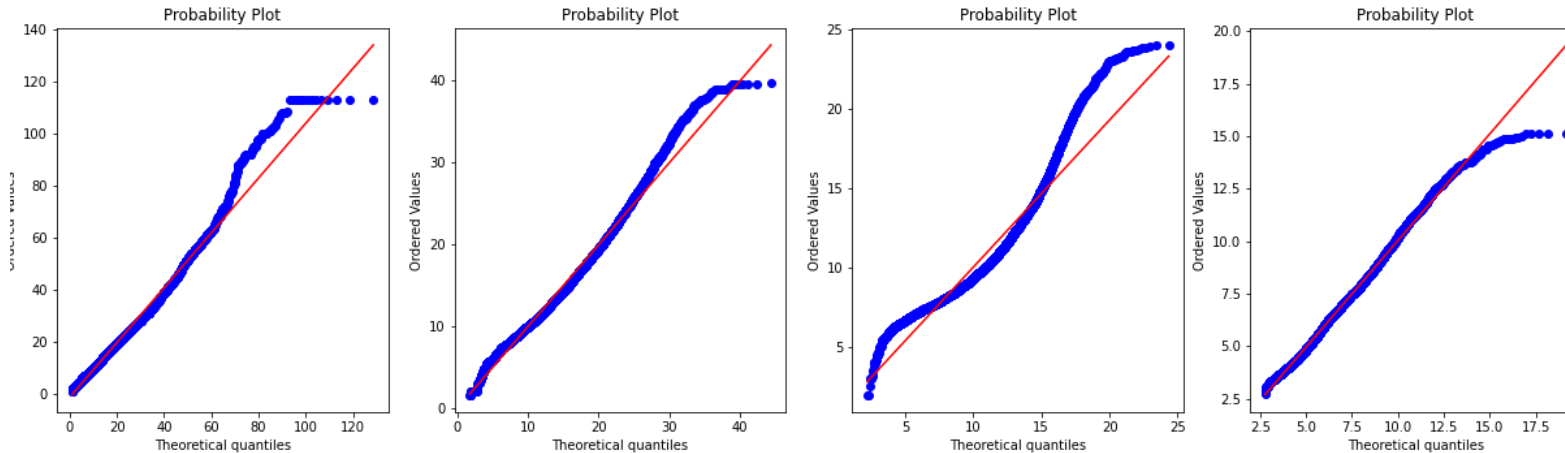
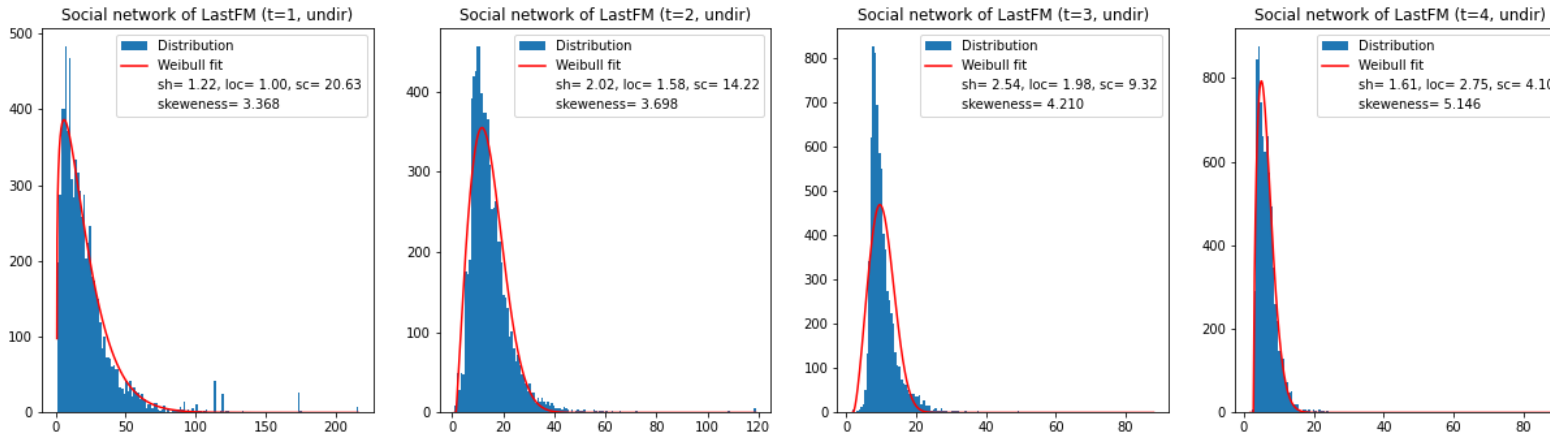
Theorem 2. Consider an undirected graph G . Let $h(G)$ be the Cheeger number of G . If $|\mathcal{N}^j(i)| \leq \frac{n}{2}$, then $\xi_i^j \geq h(G)$.

Theorem 3. Consider an undirected graph G . Let $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ be the Laplacian matrix spectrum. Then $\xi_i^j \leq \lambda_n$.

Серия инвариантов

$$\chi_i^j(k) = \begin{cases} 1, & k \in \mathcal{N}^j(i), \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

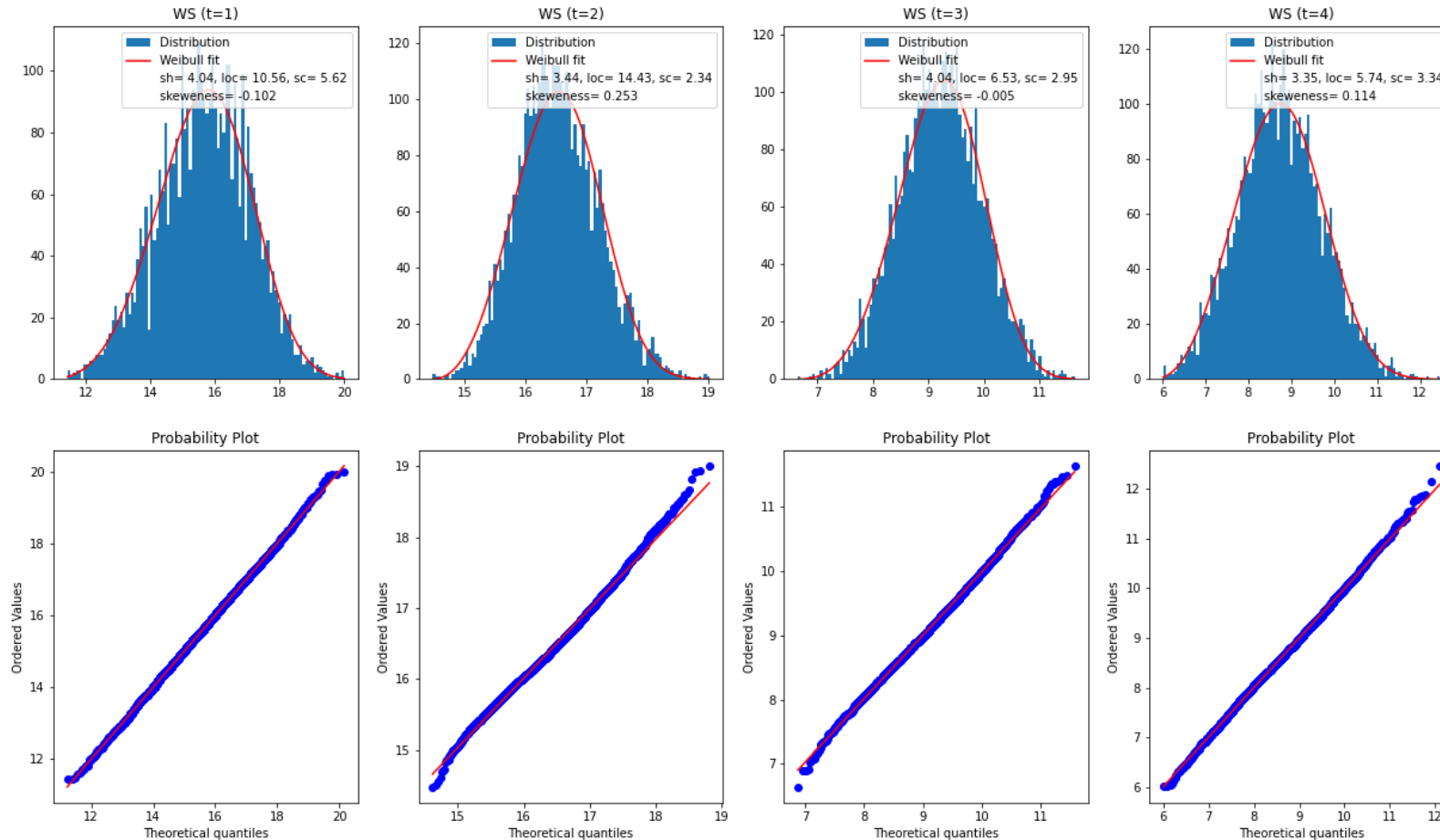
$$\xi_i^j = \frac{(L\chi_i^j, \chi_i^j)}{(\chi_i^j, \chi_i^j)}, \text{ for } i \in V(G)$$



Серия инвариантов

$$\chi_i^j(k) = \begin{cases} 1, & k \in \mathcal{N}^j(i), \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

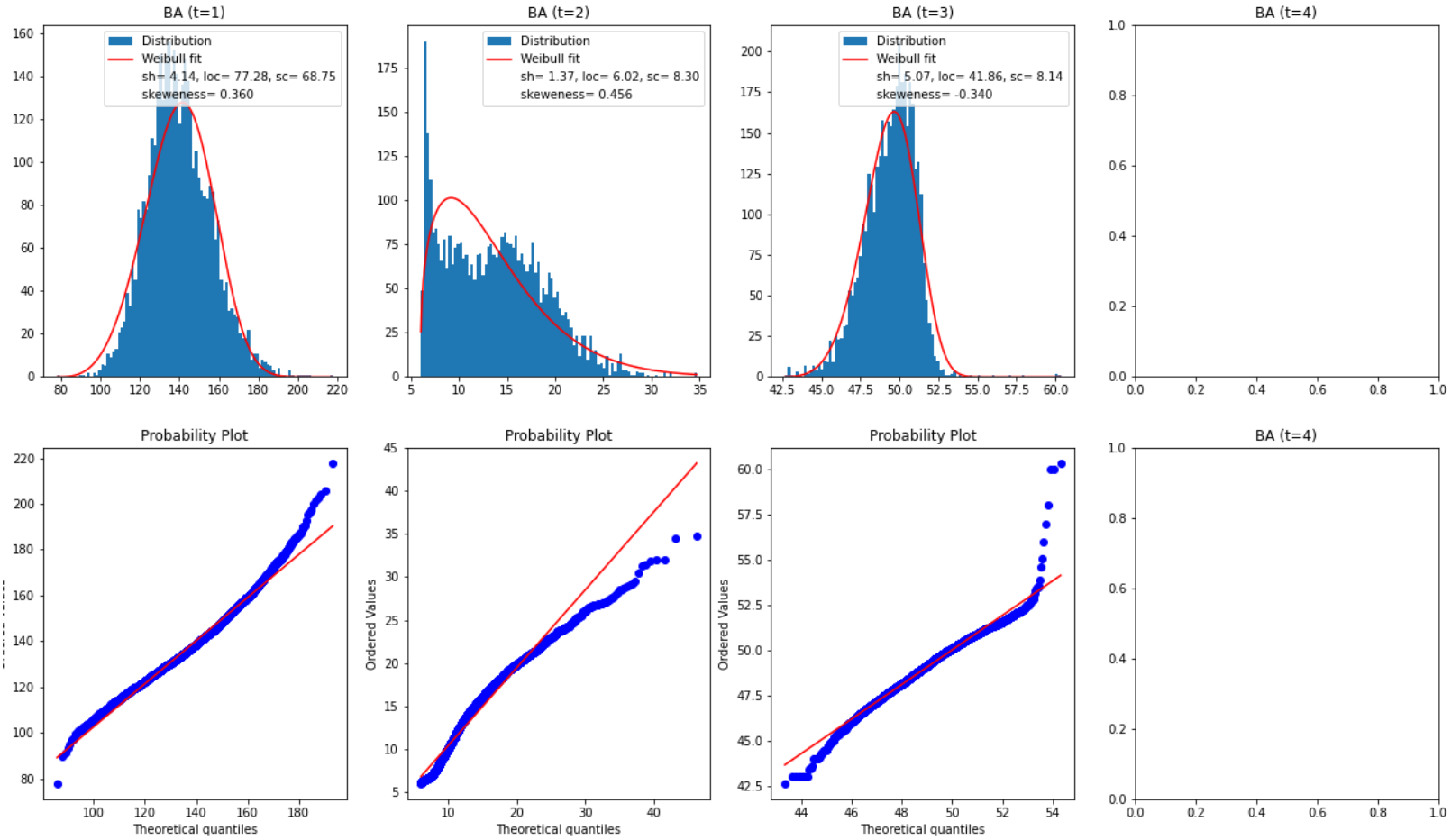
$$\xi_i^j = \frac{(L\chi_i^j, \chi_i^j)}{(\chi_i^j, \chi_i^j)}, \text{ for } i \in V(G)$$



Серия инвариантов

$$\chi_i^j(k) = \begin{cases} 1, & k \in \mathcal{N}^j(i), \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$\xi_i^j = \frac{(L\chi_i^j, \chi_i^j)}{(\chi_i^j, \chi_i^j)}, \text{ for } i \in V(G)$$



Центральности

Реальные
данные



Как связаны эти
центральности?

Graph Name	IVI	IEI	d _{max}	d _{avg}	r	ITI	T _{avg}	T _{max}	K _{avg}	K	K	ω _{neu}	Size	Download
ia-crime-moreno	829	1K	25	3	-0.16	57	-	5	0.01	0.01	4	3	5 KB	Download
ia-dbpedia-team-bi	365K	890K	2K	4	-0.20	14K	-	747	0.00	0.00	12	6	2 MB	Download
ia-dnc-corecipient	906	12K	462	26	-0.09	782K	863	14K	0.61	0.56	75	38	41 KB	Download
ia-email-EU-dir	2											13	1 MB	Download
ia-email-EU	3											11	168 KB	Download
ia-email-univ	1K											12	15 KB	Download
ia-enron-email-dynamic	8											21	4 MB	Download
ia-enron-large	34K	181K	1K	10	-0.12	2M	64	18K	0.51	0.09	44	17	496 KB	Download
ia-enron-only	143	623	42	8	-0.02	3K	18	125	0.43	0.36	10	8	2 KB	Download
ia-escorts-dynamic	10K	51K	616	10	-0.06	23K	2	3K	0.01	0.01	42	4	272 KB	Download
ia-fb-messages	1K	6K	112	10	-0.08	7K	5	242	0.07	0.04	12	5	19 KB	Download
ia-frwikinews-user-edits	25K	194K	33K	15	-0.25	3M	127	316K	0.30	0.00	18K	27	972 KB	Download
ia-hospital-ward-proximity-attr	75	32K	4K	864	0.09	47M	626K	4M	3.65	0.75	1K	72	108 KB	Download

Центральности

- Центральность близости $Clo(i) = \frac{1}{\sum_{t \in V(G)} dist(i,t)}$.
- Центральность стресса $Str(i) = \sum_{s,t \in V(G), s \neq t \neq i} \sigma_{st}(i)$, где $\sigma_{st}(i)$ - количество кратчайших путей из s в t через i .
- Центральность по посредничеству $BC(i) = \sum_{s,t \in V(G), s \neq t \neq i} \frac{\sigma_{st}(i)}{\sigma_{st}}$, где σ_{st} - количество кратчайших путей из s в t .

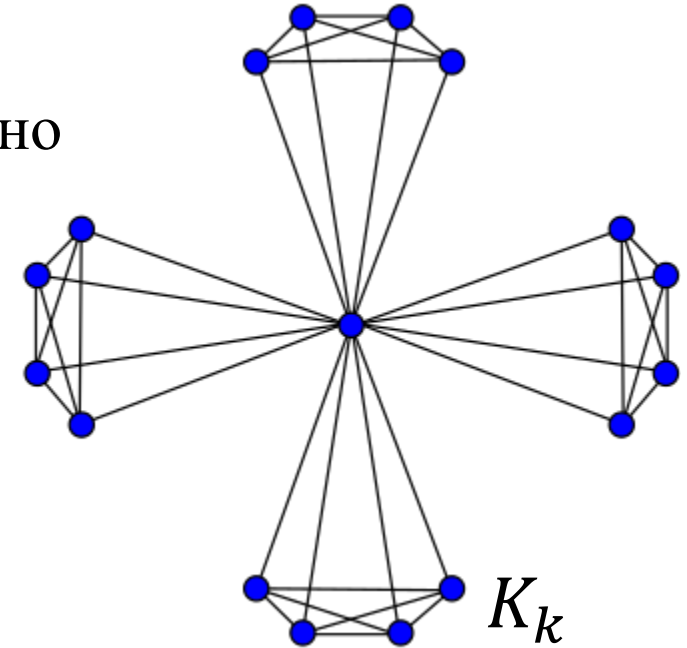
Сети малого мира

- Т [Estrada E., 2015]. Для графа мельниц $W(n, k)$ выполнено

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_{WS}(W(n, k)) = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C(W(n, k)) = 0.$$

- $C(G) = \frac{\sum_{i,j,k \in V(G)} a_{ij} a_{jk} a_{ki}}{\sum_{i \in V(G)} d_i(d_i - 1)}$



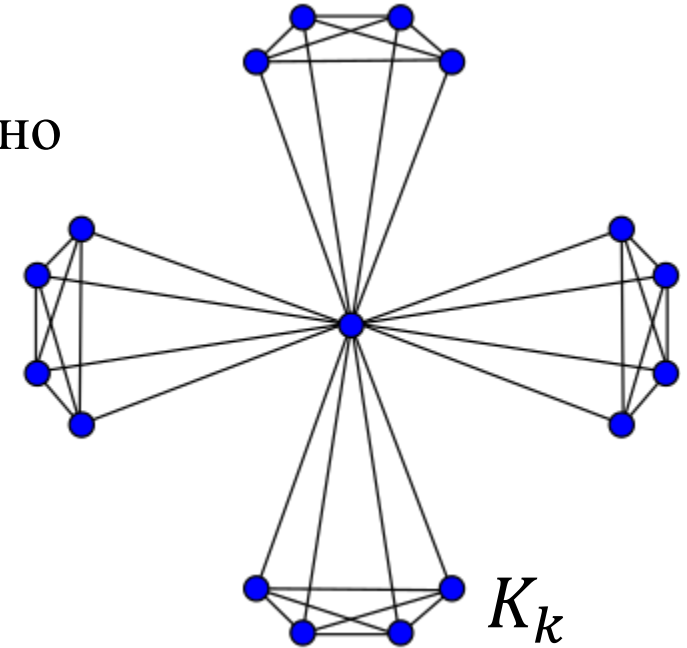
Сети малого мира

- Т [Estrada E., 2015]. Для графа мельниц $W(n, k)$ выполнено

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_{WS}(W(n, k)) = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C(W(n, k)) = 0.$$

- $C(G) = \frac{\sum_{i,j,k \in V(G)} a_{ij}a_{jk}a_{ki}}{\sum_{i \in V(G)} d_i(d_i-1)}$



- Т [2024]. Если для любых двух вершин графа следует $d_i \leq d_j \Rightarrow c_i \leq c_j$, тогда $C_{WS} \leq C$, и наоборот, если $d_i \leq d_j \Rightarrow c_i \geq c_j$, то $C_{WS} \geq C$.

Сети малого мира

- Т [2024]. Для любого неориентированного простого графа G ,

$$C_{WS}(G) \geq \frac{1}{n} \sum_{i \in V(G)} \left(1 - \frac{Str(i)}{d_i(d_i - 1)} \right).$$

Сети малого мира

- **T** [2024]. Для любого неориентированного простого графа G ,

$$C_{WS}(G) \geq \frac{1}{n} \sum_{i \in V(G)} \left(1 - \frac{Str(i)}{d_i(d_i - 1)} \right).$$

- **T** [2024]. Если для любых двух вершин связного геодезического графа следует

$d_i \leq d_j \Rightarrow Str(i) \leq Str(j)$, то

$$1 - C_{WS}(G) \leq \frac{1}{n} \sum_{i \in V(G)} \frac{(L(G) - 1)(n - 1)}{d_i(d_i - 1)} + \frac{\text{число висячих вершин}}{n}.$$

Центральности

- **T** [Strang A., 2017]. Для графа любого графа G выполнено

$$E_{loc}(G) \leq \frac{1}{2} (1 - C_{WS}(G)).$$

- **Центральность эффективности** $E(G) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{s,t \in V(G), s \neq t} \frac{1}{dist(s,t)}$,
- **Локальная эффективность (средняя)** $E_{loc}(G) = \frac{1}{n} \sum_{i \in V(G)} E(N(i))$.

Центральности

Определим средние локальные аналоги для центральностей:

- Средняя локальная **betweenness** $BC_{loc}(G) = \frac{1}{n} \sum_{v \in V(G)} BC(i, N(i))$.
- Средняя локальная **радиальность** $Rad_{loc}(G) = \frac{1}{n} \sum_{i \in V(G)} \frac{\sum_{v \in N(i)} Rad(v, N(i))}{d_i}$.

Центральности

- Зависимости между средним кластерным коэффициентом и центральностями:

$$\underline{\mathbf{T}}[2024]. C_{WS}(G) \leq 1 - BC_{loc}(G).$$

$$\underline{\mathbf{T}}[2024]. C_{WS}(G) = Rad_{loc}(G) - 1 + \frac{\text{число } N(i) \text{ явл. полными графами}}{n}.$$

Центральности

- Зависимости между средним кластерным коэффициентом и центральностями:

$$\underline{\mathbf{T}}[2024]. C_{WS}(G) \leq 1 - BC_{loc}(G).$$

$$\underline{\mathbf{T}}[2024]. C_{WS}(G) = Rad_{loc}(G) - 1 + \frac{\text{число } N(i) \text{ явл. полными графами}}{n}.$$

- Зависимости между длиной среднего кратчайшего пути и центральностями:

$$\underline{\mathbf{T}}[2024]. L(G) \geq \frac{n}{\sum_{i \in V(G)} clo(i)}.$$

Спасибо за внимание!