

Момент-угол многообразия и связанные суммы

Ковыршина Виктория Алексеевна¹

¹МГУ им. М.В. Ломоносова,
Механико-математический факультет,
Кафедра высшей геометрии и топологии

Сириус, май 2026

Предварительные сведения и обозначения

Множество $\{1, 2, \dots, m\}$ из m элементов обозначаем как $[m]$.

Для $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset [m]$ будем обозначать как \mathcal{K}_I (или же $\mathcal{K}_{\{i_1, \dots, i_k\}}$) полный подкомплекс в \mathcal{K} на вершинах i_1, \dots, i_k . Мы обозначаем i -й остов симплициального комплекса \mathcal{K} как \mathcal{K}^i .

Момент-угол-комплекс $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, соответствующий \mathcal{K} , можно определить следующим образом:

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \subset \mathcal{K}} \left(\prod_{i \in I} D^2 \times \prod_{i \notin I} S^1 \right).$$

Лемма

Пусть \mathcal{K} — симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$, а \mathcal{K}_J — полный подкомплекс, соответствующий $J \subset [m]$. Тогда $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_J}$ — ретракт $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, а $H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_J})$ — подкольцо в $H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$.

Кольцо когомологий момент-угол комплекса

[1, Теорема 4.5.8]

Имеются изоморфизмы групп

$$H^l(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \cong \bigoplus_{J \subset [m]} \tilde{H}^{l-|J|-1}(\mathcal{K}_J)$$

и изоморфизм колец $H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \cong \bigoplus_{J \subset [m]} \tilde{H}^*(\mathcal{K}_J)$, где структура умножения

в кольце справа задается каноническими отображениями

$$H^{k-|I|-1}(\mathcal{K}_I) \otimes H^{l-|J|-1}(\mathcal{K}_J) \longrightarrow H^{k+l-|I|-|J|-1}(\mathcal{K}_{I \cup J}),$$

индуцированными симплициальными отображениями $\mathcal{K}_{I \cup J} \rightarrow \mathcal{K}_I * \mathcal{K}_J$ в случае $I \cap J = \emptyset$ и нулем иначе.

Симплициальные сферы

- Пусть \mathcal{K} — симплициальная сфера размерности $(n - 1)$ с m вершинами. Тогда $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ — замкнутое топологическое многообразие размерности $m + n$.
- Если веер $\Sigma = \{\mathcal{K}, A\}$ полный, то $U(\mathcal{K})/V$ гомеоморфно момент-угол многообразию $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$.
- Если P — простой n -мерный многогранник с m гипергранями, то $\mathcal{Z}_P := \mathcal{Z}_{\mathcal{K}_P}$ задаётся пересечением эрмитовых квадрик:

$$\mathcal{Z}_P = \{z \in \mathbb{C}^m : |z_1|^2 + \dots + |z_m|^2 = 1 \\ \gamma_1 |z_1|^2 + \dots + \gamma_m |z_m|^2 = 0\},$$

где $\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ — диаграмма Гейла многогранника P^* .

Связные суммы произведений сфер

Простой многогранник Q называется *стековым*, если он получается из симплекса цепочкой последовательных звёздных подразбиений гиперграней.

Соответственно, двойственный к стековому многогранник P получается из симплекса цепочкой последовательных срезов вершин.

Теорема

Пусть \mathcal{K} — граница стекового многогранника размерности n с $m > n + 1$ вершинами. Тогда соответствующее момент-угол многообразие гомеоморфно связной сумме произведений сфер,

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \cong \#_{k=3}^{m-n+1} (S^k \times S^{m+n-k}) \#^{(k-2)} C_{m-n}^{k-1}$$

Двумерные симплициальные сферы

Всякая двумерная симплициальная сфера комбинаторно эквивалентна нерв-комплексу простого трёхмерного многогранника.

Теорема

Пусть P — трёхмерный простой многогранник, не являющийся кубом; тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (a) P получается из симплекса Δ^3 последовательной срезкой вершин, то есть P^* — стековый многогранник;
- (b) \mathcal{Z}_P гомотопически эквивалентен связной сумме произведений сфер.
- (c) $H^*(\mathcal{Z}_P)$ изоморфно кольцу когомологий связной суммы произведений сфер.
- (d) 1-остов \mathcal{K}_P — хордовый граф.
- (e) \mathcal{K}_P минимально неголодов.

Трёхмерные симплициальные сферы

Теорема (Панов-К.)

Пусть \mathcal{K} — трёхмерная симплициальная сфера. Тогда $H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \cong H^*(M_1 \# \cdots \# M_k)$, где каждое M_i — произведение сфер, тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

- (a) $\mathcal{K} = S^0 * S^0 * S^0 * S^0$ (граница четырёхмерного октаэдра);
- (b) \mathcal{K}^1 — хордовый граф;
- (c) \mathcal{K}^1 имеет ровно два недостающих ребра, и они не смежны друг с другом (т. е. образуют границу квадрата).

Пусть \mathcal{K} — симплициальная сфера размерности d такая, что $\mathcal{K} \neq \partial\Delta^{d+1}$ и группы $\mathcal{H}^{l,*}(\mathcal{K})$ порождены недостающими гранями \mathcal{K} для $l \leq \lfloor \frac{2d-1}{3} \rfloor$. Тогда $H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ изоморфно кольцу когомологий связной суммы произведений пар сфер.

Приложение теоремы об h -кобордизме

Теорема

Пусть Q — компактное гладкое многообразие размерности $d + 1 \geq 6$ с границей ∂Q , которое удовлетворяет следующим условиям:

- 1 Q и его граница ∂Q односвязны.
- 2 Есть конечный набор $\{X_j\}$ попарно непересекающихся замкнутых гладких подмногообразий Q , вложенных с тривиальными нормальными расслоениями.
- 3 Вложение $\bigsqcup_j X_j \rightarrow Q$ индуцирует изоморфизмы групп (сингулярных) гомологий в положительных размерностях, и $H_i(Q) = 0$ для $i \geq d - 1$.

Тогда Q диффеоморфно связной сумме вдоль границы

$$\coprod_j X_j \times D^{d+1-\dim X_j},$$

и следовательно ∂Q диффеоморфно $\#_j X_j \times S^{d-\dim X_j}$.

Конструкция Q для нашей задачи

Рассмотрим $Q = (\mathbf{X}, \mathbf{A})^{\mathcal{K}}$, где $(X_1, A_1) = (D_+^3, S_+^2)$ — стягиваемая пара пространств, а $(X_j, A_j) = (D^2, S^1)$ для $j > 1$, тогда $Q \sim \mathcal{Z}_{\mathcal{K}_{[m] \setminus \{1\}}}$.
Для политопальных \mathcal{K} имеем:

$$Q = \{(x, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}_{\geq} \times \mathbb{C}^m : (x^2 + |z_1|^2) + \sum_{i>1} |z_i|^2 = 1 \\ \gamma_1(x^2 + |z_1|^2) + \sum_{i>1} \gamma_i |z_i|^2 = 0\}$$

Таким образом, Q — гладкое многообразие с краем и $\partial Q = Q \cap \{x = 0\} = \mathcal{Z}_P$. Заметим также, что при малых $c \in \mathbb{R}_{\geq}$ верно $Q \cap \{x = c\} \cong \mathcal{Z}_P$. Обозначим как $i: \mathcal{Z}_P \hookrightarrow Q$ вложение края и как i_c вложение $\mathcal{Z}_P \cong Q \cap \{x = c\} \hookrightarrow Q$. Нормальные расслоения этих вложений, очевидно, тривиальны.

Диффеоморфизм

Теорема (Панов-К.)

Пусть \mathcal{K} — трёхмерная *политопальная* симплициальная сфера такая, что \mathcal{K}^1 имеет ровно два недостающих ребра, и они не смежны друг с другом (т. е. образуют границу квадрата). Тогда имеется диффеоморфизм $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \cong M_1 \# \cdots \# M_k$, где каждое M_i — произведение сфер, причем одно из M_i является произведением трёх сфер.

Гипотеза

Пусть \mathcal{K} — трёхмерная *политопальная* симплициальная сфера такая, что \mathcal{K}^1 — хордовый граф. Тогда имеется диффеоморфизм $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \cong M_1 \# \cdots \# M_k$, где каждое M_i — произведение пары сфер.

Недостающие грани и подкомплексы

Лемма

Пусть $\partial\Delta_I$ — недостающая грань в \mathcal{K}_P , где $|I| = k$. Тогда существует гладкое вложение $S^{2k-1} \times T^{[m]\setminus I} \hookrightarrow \mathcal{Z}_P$ с тривиальным нормальным расслоением, для которого образ композиции

$$i: S^{2k-1} \hookrightarrow S^{2k-1} \times T^{[m]\setminus I} \hookrightarrow \mathcal{Z}_P$$

является гладким подмногообразием $X = i(S^{2k-1}) \subset \mathcal{Z}_P$, реализующим образующую группы $\mathbb{Z} \cong \mathcal{H}_{k-2,I}(\mathcal{K}_P) \subset H_{2k-1}(\mathcal{Z}_P)$.

Лемма

Пусть P — многогранник размерности n с m гипергранями, где $m \geq 7$, и пусть X — вложенное в \mathcal{Z}_P подмногообразие, диффеоморфное $S^3 \times S^3$. Тогда нормальное расслоение $\nu(X \hookrightarrow \mathcal{Z}_P)$ тривиально.

Перестройки подмногообразий

Лемма

Пусть \mathcal{Z}_P — момент-угол-многообразие, представленное в виде пересечения эрмитовых квадратик и $\partial\Delta_I$ — недостающая грань в \mathcal{K}_P , где $|I| = k$. Рассмотрим $i: S^{2k-1} \hookrightarrow \mathcal{Z}_P$ — гладкое вложение сферы $X = i(S^{2k-1})$, реализующее образующую образующую группы $\mathbb{Z} \cong \mathcal{H}_{k-2,I}(\mathcal{K}_P) \subset H_{2k-1}(\mathcal{Z}_P)$.

Тогда для всякого $J \subset [m] \setminus I$, $|J| = l$, вложение $i: S^{2k-1} \hookrightarrow \mathcal{Z}_P$ продолжается до вложения $i': S^{2k-1} \times T^J \hookrightarrow \mathcal{Z}_P$, где $i'(S^{2k-1} \times T^J) = T^J \cdot X$ — объединение орбит точек из X под действием координатного подтора T^J .

Кроме того, существует вложение l -кратной гирации $g: \mathcal{G}^l(S^{2k-1}) \hookrightarrow \mathcal{Z}_P$ с тривиальным нормальным расслоением такое, что вложения i' и g бордантны. В частности, образы фундаментальных классов в гомологиях совпадают: $g_*[\mathcal{G}^l(S^{2k-1})] = i'_*[S^{2k-1} \times T^J]$.

Иллюстрация

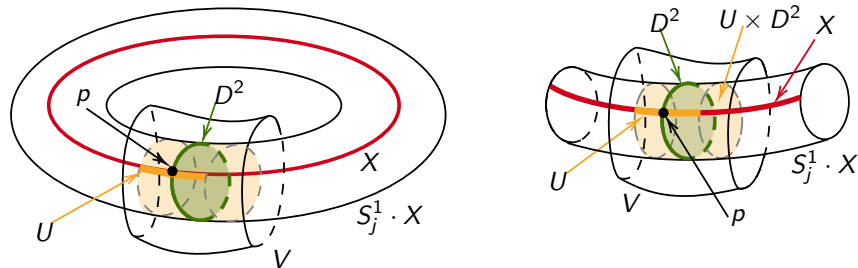


Рис.: Иллюстрация вложений рассматриваемых в лемме объектов.

Иллюстрация

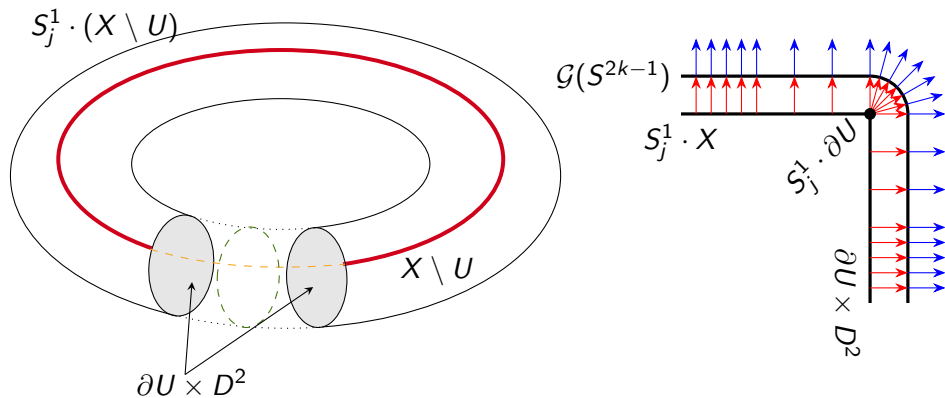


Рис.: Вложение $G(S^{2k-1}) \hookrightarrow Z_P$ с углами (слева) и их сглаживание (справа).

Смежностные сферы

Симплициальная сфера \mathcal{K} размерности $(n - 1)$ называется *смежностной*, если \mathcal{K} не содержит недостающих граней размерности $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ и меньше.

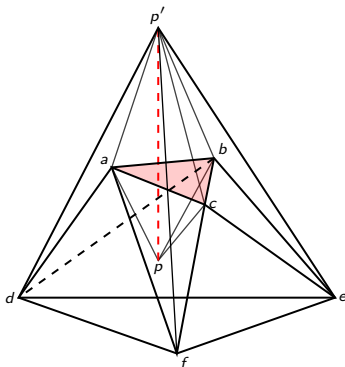
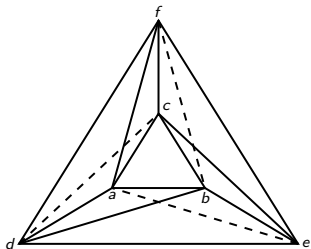
Теорема (Панов-К.)

Пусть \mathcal{K} — смежностная *политопальная* симплициальная сфера нечётной размерности $(n - 1)$. Тогда имеется диффеоморфизм $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \cong M_1 \# \cdots \# M_k$, где каждое M_i — произведение двух сфер.

Гипотеза

Пусть \mathcal{K} — смежностная *сильно политопальная* симплициальная сфера чётной размерности $(n - 1)$. Тогда имеется диффеоморфизм $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \cong M_1 \# \cdots \# M_k$, где каждое M_i — произведение двух сфер.

Звездчатые сферы



Теорема (Панов-К.)

Момент-угол многообразия $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_{Ba}}$ и $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_{Br}}$, соответствующие сферам Барнетта и Брюкнера, диффеоморфны связным суммам произведений пар сфер, а именно:

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_{Ba}} \cong S^3 \times S^9 \# (S^5 \times S^7) \#^{12} \# (S^6 \times S^6) \#^{12}$$

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_{Br}} \cong (S^5 \times S^7) \#^{13} \# (S^6 \times S^6) \#^{12}.$$

Недостающие грани и подкомплексы

В случае звёздчатых сфер становится сложнее работать с нормальными расслоениями:

Лемма

Пусть симплициальный комплекс \mathcal{K} на $[m]$ и набор векторов $A = \{a_1, \dots, a_m\} \subset \mathbb{R}^n$ задают веер $\{\mathcal{K}, A\}$, и пусть $\partial\Delta_I$ — недостающая грань в \mathcal{K} , где $|I| = k$. Тогда существует гладкое вложение $S^{2k-1} \times T^{[m]\setminus I} \hookrightarrow \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, для которого образ композиции

$$i: S^{2k-1} \hookrightarrow S^{2k-1} \times T^{[m]\setminus I} \hookrightarrow \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$$

является гладким подмногообразием $X = i(S^{2k-1}) \subset \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, реализующим образующую группы $\mathbb{Z} \cong \mathcal{H}_{k-2, I}(\mathcal{K}_P) \subset H_{2k-1}(\mathcal{Z}_P)$. При этом для $k = 2, 3$ нормальное расслоение $\nu(X \hookrightarrow \mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ тривиально.

Примеры многогранников

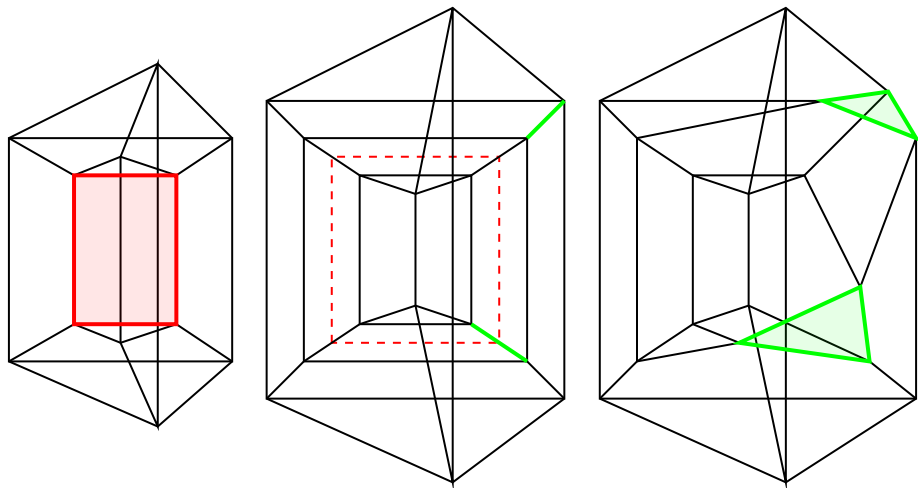


Рис.: Получение P_0 из $\Delta^2 \times I^2$.

Примеры многогранников

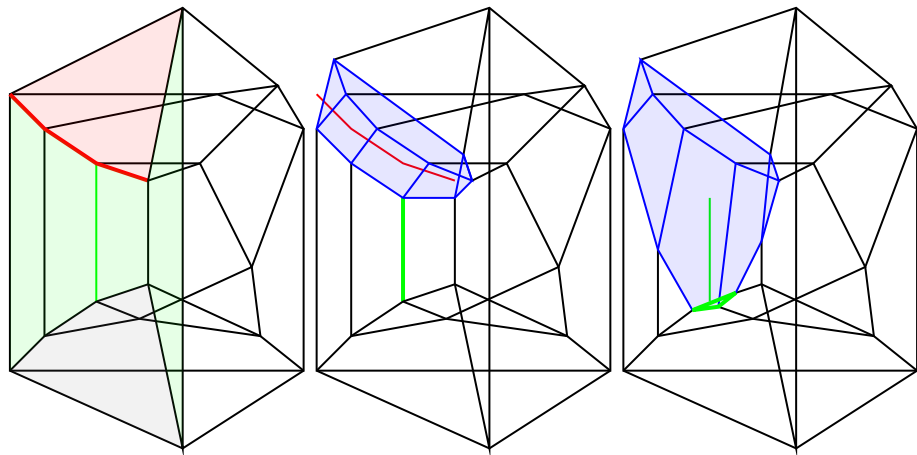


Рис.: Получение P_1 из P_0

Примеры многогранников

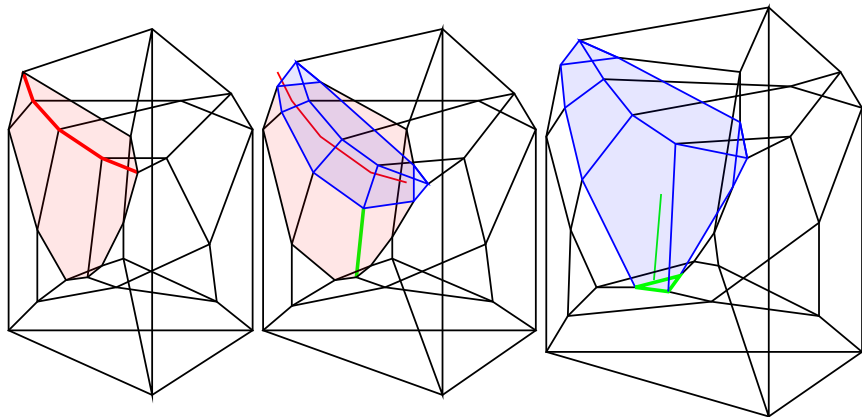







Рис.: Получение P_2 из P_1

Библиография

-  Buchstaber, Victor; Panov, Taras. *Toric Topology*. Math. Surveys Monogr., 204, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.
-  Gitler, Samuel; López de Medrano, Santiago. *Intersections of quadrics, moment-angle manifolds and connected sums*. Geom. Topol. 17 (2013), no. 3, 1497–1534.
-  Fan, Feifei Fan; Chen, Liman; Ma, Jun; Wang, Xiangjun. *Moment-angle manifolds and connected sums of sphere products*. Osaka J. Math. 53 (2016), no. 1, 31–45.
-  Bosio, Frédéric; Meersseman, Laurent. *Real quadrics in C^n , complex manifolds and convex polytopes*. Acta Math. 197 (2006), no. 1, 53–127.
-  Iriye, Kouyemon. *On the moment-angle manifold constructed by Fan, Chen, Ma and Wang*. Osaka J. Math. 55 (2018), no. 4, 587–593.