Итерированные скобки и полиэдральные произведения

(по совместным работам с Я. Верёвкиным, Т. Пановым, С. Терио)

Федор Вылегжанин

МИАН им. В.А.Стеклова / НИУ ВШЭ

Алгебраическая топология, действия групп и комбинаторика
14 мая 2026 @ ММЦ Сириус

Аннотация

Продолжая известную аналогию между “вещественной” и “комплексной” алгебраической топологией, мы изучаем

(1) Градуированную $\mathbb{F}_2$-алгебру Ли $L(\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}) = \bigoplus_{k\geq 1} \gamma_k(\mathrm{RC}_{\mathcal{K}})/\gamma_{k+1}(\mathrm{RC}_{\mathcal{K}})$, присоединённую к нижнему центральному ряду прямоугольной группы Кокстера (Vylegzhanin, Veryovkin, 2026; accepted to Moscow Math. J.);

(2) Квази-алгебру Ли $\pi_{*+1}((\mathbb{C}P^\infty, *)^{\mathcal{K}})$ относительно скобки Уайтхеда (Panov, Theriault, Vylegzhanin, work in progress).

Основная тема доклада — новейшие продвижения в задаче (1), вдохновлённые аналогией с задачей (2).

Полиэдральные произведения

Для набора пар $(\underline{X}, \underline{A}) = ((X_1, A_1), \ldots, (X_m, A_m))$, $X_i \supset A_i$ и симплициального комплекса $\mathcal{K}$ на множестве вершин $[m] = \{1, \ldots, m\}$ обозначим

$$(\underline{X}, \underline{A})^{\mathcal{K}} := \bigcup_{I \in \mathcal{K}} \Big(\prod_{i \in I} X_i \times \prod_{j \in [m] \setminus I} A_j \Big) \subset X_1 \times \cdots \times X_m.$$

Например, $(\underline{X}, \underline{A})^{\bullet\bullet} = (X_1 \times A_2) \cup (A_1 \times X_2) \subset X_1 \times X_2$.

Теорема

Имеем гомотопическое расслоение $(C\Omega\underline{X}, \Omega\underline{X})^{\mathcal{K}} \to (\underline{X}, *)^{\mathcal{K}} \to \prod_{i=1}^{m} X_i$.

В торической топологии важную роль играют

- момент–угол-комплекс $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} := (D^2, S^1)^{\mathcal{K}}$,
- пространство Дэвиса–Янушкевича $(\mathbb{C}P^\infty, *)^{\mathcal{K}}$,
- их вещественные аналоги $\mathcal{R}_{\mathcal{K}} := (D^1, S^0)^{\mathcal{K}}$, $(\mathbb{R}P^\infty, *)^{\mathcal{K}}$.

Сравнение вещественного и комплексного случая

Пусть $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $\mathbb{F}^\times := \mathbb{F} \setminus \{0\}$. По теореме, имеем гомотопическое расслоение

$$(C\mathbb{F}^\times, \mathbb{F}^\times)^{\mathcal{K}} \to (\mathbb{F}P^\infty, *)^{\mathcal{K}} \xrightarrow{p} (\mathbb{F}P^\infty)^m.$$

Более того, у Ωp есть гомотопическое сечение, поэтому для $k \geq 1$ имеем точную последовательность групп

$$1 \to G_k((C\mathbb{F}^\times, \mathbb{F}^\times)^{\mathcal{K}}) \to G_k((\mathbb{F}P^\infty, *)^{\mathcal{K}}) \to G_k(\mathbb{F}P^\infty)^{\times m} \to 1,$$

$G_k(X) := [\Sigma(\mathbb{F}^\times)^{\wedge k}, X]$.
При $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ получаем точную последовательность групп

$$1 \to \underbrace{\pi_1(\mathcal{R}_{\mathcal{K}})}_{=\mathrm{RC}'_{\mathcal{K}}} \to \underbrace{\pi_1((\mathbb{R}P^\infty, *)^{\mathcal{K}})}_{=\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}} \to \underbrace{\pi_1(\mathbb{R}P^\infty)^{\times m}}_{=(\mathbb{Z}/2)^m} \to 1;$$

при $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ получаем точную последовательность квази-алгебр Ли

$$0 \to \pi_*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \to \pi_*((\mathbb{C}P^\infty, *)^{\mathcal{K}}) \to \underbrace{\pi_*(\mathbb{C}P^\infty)^{\oplus m}}_{=\mathbb{Z}^m,\ \deg=2} \to 0.$$

Флаговый случай

Прямоугольная группа Коксетера:

$$\mathrm{RC}_{\mathcal{K}} := \langle g_1, \ldots, g_m \mid g_i^2 = 1;\ (g_i, g_j) = 1,\ \{i,j\} \in \mathcal{K} \rangle.$$

Легко проверить, что $\pi_1((\mathbb{R}P^\infty, *)^{\mathcal{K}}) \cong \mathrm{RC}_{\mathcal{K}}$, поэтому $\pi_1(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}) \cong \mathrm{RC}'_{\mathcal{K}}$. Симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ флаговый, если любой набор попарно соединённых вершин образует симплекс (эквивалентно, если $\mathcal{K}$ — это кликовый комплекс графа $\mathrm{sk}_1\,\mathcal{K}$). Далее $\mathcal{K}$ по умолчанию флаговый.

Теорема (Дэвис / Панов, Верёвкин)

$\mathcal{K}$ флаговый $\Leftrightarrow$ $(\mathbb{R}P^\infty, *)^{\mathcal{K}}$ асферично $\Leftrightarrow$ $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ асферично.

Комплексный аналог: описание алгебры Понтрягина $H_*(\Omega X)$.

Теорема (Панов, Рэй)

$\mathcal{K}$ флаговый $\Leftrightarrow$ $(\mathbb{C}P^\infty, *)^{\mathcal{K}}$ коформально $\Leftrightarrow$ имеем изоморфизм

$$H_*(\Omega(\mathbb{C}P^\infty, *)^{\mathcal{K}}) \cong T(u_1, \ldots, u_m)/(u_i^2 = 0;\ [u_i, u_j] = 0,\ \{i,j\} \in \mathcal{K}).$$

Присоединённая алгебра Ли дискретной группы

Нижний центральный ряд группы G — это цепочка подгрупп

$$G = \gamma_1(G) \supset \gamma_2(G) \supset \dots, \quad \gamma_{k+1}(G) := (G, \gamma_k(G)).$$

Известно, что $\gamma_{k+1} \lhd \gamma_k$ и $(\gamma_k, \gamma_\ell) \subseteq \gamma_{k+\ell}$. Следовательно, определены абелевы группы $L_k(G) := \gamma_k(G)/\gamma_{k+1}(G)$.

Теорема (Магнус)

$L(G) := \bigoplus_{k\geq 1} L_k(G)$ — градуированное кольцо Ли относительно сложения $+ : L_k \times L_k \to L_k$ и скобки Ли $[-,-] : L_k \times L_\ell \to L_{k+\ell}$,

$$a\gamma_{k+1} + a'\gamma_{k+1} := aa'\gamma_{k+1}, \quad [a\gamma_{k+1}, b\gamma_{\ell+1}] := (a,b)\gamma_{k+\ell+1}.$$

Магнус доказал, что, что $L(F(g_1,\dots,g_m)) \cong FL_{\mathbb{Z}}(x_1,\dots,x_m)$. Известно обобщение на прямоугольные группы Артина:

$$L(F(g_1,\dots,g_m)/((g_i,g_j)=1,\ \{i,j\}\in\mathcal{K}) \cong$$
$$FL(x_1,\dots,x_m)/([x_i,x_j]=0,\ \{i,j\}\in\mathcal{K}).$$

Что известно про $L(\mathrm{RC}_{\mathcal{K}})$

Введём *граф-алгебру Ли* над полем из двух элементов,
$L_{\mathcal{K}} := FL_{\mathbb{F}_2}(x_1, \dots, x_m)/([x_i, x_j] = 0,\ \{i,j\} \in \mathcal{K})$.

- Если $x \in \gamma_k(\mathrm{RC}_{\mathcal{K}})$, то $x^2 \in \gamma_{k+1}(\mathrm{RC}_{\mathcal{K}})$.
- Следовательно, $L(\mathrm{RC}_{\mathcal{K}})$ — алгебра Ли над $\mathbb{F}_2$.
- Следовательно, определён сюръективный гомоморфизм алгебр Ли $\varphi : L_{\mathcal{K}} \to L(\mathrm{RC}_{\mathcal{K}})$.
- Он далёк от изоморфизма: если $\mathcal{K} = \bullet\bullet$, то $L_{\mathcal{K}} = FL(x_1, x_2)$, $L(\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}) \cong \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2^2 \oplus \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2 \oplus \dots$;
- Первое соотношение, которое есть в $L(\mathrm{RC}_{\mathcal{K}})$, но не в $L_{\mathcal{K}}$: $[x_i, [x_i, x_j]] = [x_j, [x_i, x_j]]$.
- Известен базис в $L_{\leq 3}(\mathrm{RC}_{\mathcal{K}})$.
- В неопубликованной диссертации Р.Пренера описана аддитивая структура $L(\mathrm{RC}_{\mathcal{K}})$ в случае, когда $\mathcal{K}$ — несвязное объединение симплексов. На основе этого результата описан базис в $L_4(\mathrm{RC}_{\mathcal{K}})$.

Новая операция в $L'(G) = \bigoplus_{k\geq 2} \gamma_k(G)/\gamma_{k+1}(G)$

Пусть группа G порождена инволюциями $g_1, \ldots, g_m$.
Тогда выполнено свойство: если $x \in \gamma_k$, то $x^2 \in \gamma_{k+1}$. Можно попытаться определить операцию $h : L_k(G) \to L_{k+1}(G)$,

$$h(x\gamma_{k+1}) := x^2\gamma_{k+2} \in \gamma_{k+1}/\gamma_{k+2}.$$

Теорема (В., Верёвкин)

Операция $h : L_k(G) \to L_{k+1}(G)$ корректно определена при $k \geq 2$, и имеет следующие свойства:

- $h(a + b) = h(a) + h(b)$;
- $h([a, b]) = [h(a), b]$, $a \in L_{\geq 2}$;
- $h([\overline{g}_i, \overline{g}_j]) = [\overline{g}_i, [\overline{g}_i, \overline{g}_j]]$, где $\overline{g}_i := g_i\gamma_2 \in L_2(G)$.
- $h([\overline{g}_{i_1}, [\ldots[\overline{g}_{i_k}, \overline{g}_j]\ldots]]) = [\overline{g}_{i_1}, [\overline{g}_{i_1}, [\ldots[\overline{g}_{i_k}, \overline{g}_j]\ldots]]]$.

В частности, h — линейная операция степени $+1$ на $L'(G) = \bigoplus_{k\geq 2} L_k(G)$, удовлетворяющая тождеству $[h(a), b] = h([a, b])$.

Основной результат

Для градуированной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ введём структуру алгебры Ли на $\mathfrak{g}[t] := \bigoplus_{k\geq 0} \mathfrak{g}t^k$ по правилу: $|xt^k| := |x| + k$, $[xt^k, yt^\ell] := [x,y]t^{k+\ell}$.

Определение

$N_\mathcal{K} \subset L_\mathcal{K}$ — это подалгебра Ли, порождённая элементами вида $[x_{i_1}, [\ldots[x_{i_k}, x_j]\ldots]]$, $k \geq 1$ такими, что $i_1, \ldots, i_k, j$ попарно различны.

Теорема (В., Верёвкин)

Определён сюръективный гомоморфизм алгебр Ли

$$\psi : N_\mathcal{K}[t] \to L'(\mathrm{RC}_\mathcal{K}), \quad xt^k := \underbrace{h(h(\ldots h}_{k \text{ раз}}(\varphi(x))\ldots)).$$

Гипотеза: ψ — изоморфизм. Если она верна, то имеем расширение алгебр Ли

$$0 \to N_\mathcal{K}[t] \to L(\mathrm{RC}_\mathcal{K}) \to \mathbb{F}_2^{\oplus m} \to 0.$$

Аддитивная структура $\mathbb{F}_2$-алгебры Ли $N_{\mathcal{K}}$

В [Vyleghanin'25] и [Grbić,Panov,Theriault,Wu'15] получены результаты о структуре алгебры Хопфа $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\Bbbk)$.

Теорема (В., Верёвкин)

- $U(N_{\mathcal{K}}) \cong H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\mathbb{F}_2)$.
- $N_{\mathcal{K}}$ минимально задаётся $\sum_{J\subset[m]}\dim\widetilde{H}_0(\mathcal{K}_J)$ образующими по модулю $\sum_{J\subset[m]}\dim H_1(\mathcal{K}_J;\mathbb{F}_2)$ соотношений. В качестве порождающих можно взять явное множество $GPTW$.
- $N_{\mathcal{K}}$ — свободная алгебра Ли $\Leftrightarrow \mathrm{sk}_1\,\mathcal{K}$ — хордовый граф (и в этом случае $N_{\mathcal{K}} \cong FL_{\mathbb{F}_2}(GPTW)$).
- Если $n_i := \dim(N_{\mathcal{K}})_i$, то $\prod_{i\geq 2}(1-t^i)^{n_i} = \sum_{J\subset[m]}(1-\chi(\mathcal{K}_J))t^{|J|}$.

Следствие

Гипотеза верна $\Leftrightarrow \dim L_k(\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}) \geq n_2+\dots+n_k$ для всех $k\geq 2$.

Из результатов Верёвкина следует, что она верна при $k=2,3$.

Элементы GPTW

Определение

$[x_{i_1}, [x_{i_2} \dots [x_{i_k}, x_j] \dots]]$ — GPTW-элемент, если выполнены условия:

- $i_1 < \dots < i_k > j$, $j \neq i_1, \dots, i_k$;
- i_k и j лежат в разных компонентах связности комплекса $\mathcal{K}_{\{i_1,\dots,i_k,j\}}$;
- j — наименьшая вершина в своей компоненте связности.

Ясно, что таких элементов ровно $\sum_{J\subset[m]} \dim \widetilde{H}_0(\mathcal{K}_J)$.

Теорема (Грбич, Панов, Терио, Ву)

GPTW — минимальный набор порождающих для алгебры $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \subset H_*(\Omega(\mathbb{C}P^\infty, *)^\mathcal{K}) \cong T(u_1, \dots, u_m)/(u_i^2 = 0;\ [u_i, u_j] = 0,\ \{i,j\} \in \mathcal{K})$.

Теорема (Панов, Верёвкин)

GPTW — минимальный набор порождающих для группы $\mathrm{RC}'_\mathcal{K}$.

В каждом из этих случаев свободность равносильна хордовости.

Аналог в гомотопических группах

Свойства операции $h : L_k(G) \to L_{k+1}(G)$ были угаданы по аналогии со свойствами композиционной операции $(-) \circ \eta : \pi_{n+1}(X) \to \pi_{n+2}(X)$, где $\eta := \Sigma^{n-2}\eta_2$, $\eta_2 \in \pi_3(S^2)$ — расслоение Хопфа. А именно:

- $(\alpha + \alpha') \circ \Sigma f = \alpha \circ \Sigma f + \alpha' \circ \Sigma f$;
- $[\alpha \circ \Sigma f, \beta] = [\alpha, \beta] \circ \Sigma^{|\beta|} f$;
- $[\alpha \circ \eta_2, \beta] = [\alpha, \beta] \circ \eta - [\alpha, [\alpha, \beta]]$;
- Таким образом, для канонических элементов $t_1, \dots, t_m \in \pi_2((\mathbb{C}P^\infty, *)^{\mathcal{K}})$ выполнено $[t_i, [t_i, \beta]] = [t_i, \beta] \circ \eta$. В частности,

$$[t_i, [t_i, t_j]] = [t_j, [t_i, t_j]] \neq 0 \in \pi_4((\mathbb{C}P^\infty, *)^{\mathcal{K}}), \quad \{i, j\} \notin \mathcal{K};$$

$$[t_{i_1}, [t_{i_1}, [t_{i_2}, [\dots [t_{i_k}, t_j] \dots]]]] = [t_{i_1}, [t_{i_2}, [\dots [t_{i_k}, t_j] \dots]]] \circ \eta.$$

Итерированные скобки Уайтхеда

Элементы $t_1, \dots, t_m \in \pi_2((\mathbb{C}P^\infty, *)^{\mathcal{K}})$ индуцируют отображения $f : (S^2)^{\vee m} \to (\mathbb{C}P^\infty, *)^{\mathcal{K}}$, $g : \bigvee_{x \in GPTW} S^{|x|} \to (\mathbb{C}P^\infty, *)^{\mathcal{K}}$,

$$f_* : \pi_*((S^2)^{\vee m}) \to \pi_*((\mathbb{C}P^\infty, *)^{\mathcal{K}}),$$

$$\Phi := \bigoplus_i t_i \oplus g_* : \mathbb{Z}^m \oplus \pi_*(\vee_{x \in GPTW} S^{|x|}) \to \pi_*((\mathbb{C}P^\infty, *)^{\mathcal{K}}).$$

$\operatorname{Im} f_* \subset \pi_*$ порождено элементами $t_1, \dots, t_m$ относительно скобок Уайтхеда и композиций с элементами гомотопических групп сфер.

Теорема (Панов, Терио, В.)

- $\operatorname{Im} f_* = \operatorname{Im} \Phi$.
- Φ сюръективно $\Leftrightarrow$ $\mathcal{K}$ флаговый.
- Φ инъективно $\Leftrightarrow$ $\operatorname{sk}_1 \mathcal{K}$ хордовый.

Если $\operatorname{sk}_1 \mathcal{K}$ хордовый — мы также описываем под-квази-алгебру Ли в π_*, порождённую $t_1, \dots, t_m$.

Спасибо за внимание!