Когомологии алгебр Хопфа, кобордизмы и фильтрация Бухштабера

Ф.Ю.Попеленский
Мехмат МГУ, МЛЗС НИУ ВШЭ

12 мая 2026 г.

«Определение»

Алгебра Хопфа $(A; m, \eta; \Delta, \varepsilon; \chi)$ над коммутативным кольцом K с единицей: заданы операции

- ассоциативное умножение $m : A \otimes A \to A$ с единицей $\eta : K \to A$;
- коассоциативное коумножение $\Delta : A \to A \otimes A$ с коединицей $\varepsilon : A \to K$;
- антигомоморфизм $\chi : A \to A$

согласованные определенным образом.

- ▷ Согласованность m и Δ:

  $m : A \otimes A \to A$ — гомоморфизм коалгебр,

  $\Delta : A \to A \otimes A$ — гомоморфизм алгебр

$$\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y).$$

$$\Delta(x) = \sum_i x_i^{(1)} \otimes x_i^{(2)}, \quad \Delta(y) = \sum_j y_j^{(1)} \otimes y_j^{(2)} \Longrightarrow \Delta(xy) = \sum_{i,j} \pm x_i^{(1)} y_j^{(1)} \otimes x_i^{(2)} y_j^{(2)}$$

- ▷ В топологии A обычно градуирована.

▷ Теория алгебр Хопфа восходит к работе
H. Hopf, Uber die Topologie der Gruppen-Mannigfaltigkeiten und ihrer Verallgemeinerungen (1941),
в которой обсуждались кольца когомологий многообразий, для которых определено нетривиальное умножение $\mu : M \times M \to M$.
Нетривиальность: $\mu(a, -) : x \mapsto \mu(a, x)$ и $\mu(-, b) : y \mapsto \mu(y, b)$ имеют ненулевые степени.

▷ Первые работы относятся к двум направлениям: Борель (1953), Милнор (1958), Милнор-Мур (1965, mimeo:1959), Дьедонне (1954-56), Картье (1955-56), Хохшильд (1957-58), Г.И.Кац (1961-62). Книга Свидлера (1969).

▷ Первые примеры алгебр Хопфа: когомологии пространств с умножением (H-пространства), кольца функций на алгебраических группах, групповые алгебры дискретных групп, универсальные обертывающие алгебр Ли

▷ Милнор (1958, The Steenrod algebra and its dual, Ann. Math, 67 (1), 150-171) алгебра Стинрода $\mathcal{A}_p$ стабильных когомологических операций в $\mathbb{Z}/p$-когомологиях является алгеброй Хопфа.

▷ Алгебра Ландвебера–Новикова S стабильных когомологических операций в комплексных кобордизмах является алгеброй Хопфа.

▷ Алгебры Хопфа комбинаторной природы

▷ Новые важные примеры алгебр Хопфа появились после работ Дринфельда, Джимбо (начало 1980-х). Термин «квантовая группа» — Дринфельд, 1986 г. Естестенные примеры не кокоммутативных и не коммутативных алгебр Хопфа

▷ Хазевинкель — Hopf algebras: their status and pervasiveness (as of Oct. 2004)

Пример

Г-многообразия Хопфа сильно отличаются от H-пространств:
— Хопф показал, что любая сфера S^{2k+1} является Г-многообразием.
— На сфере S^n структура H-пространства может быть задана только для $n = 0, 1, 3, 7$ (Адамс, 1958-1960).

- Вопросы:

— для каких n на $\mathbb{R}^n$ существует структура алгебры с делением (уравнения $a \cdot x = b$ и $x \cdot a = b$ разрешимы для любого $a \neq 0$)
— для каких n сфера S^{n-1} является H-пространством?
— для каких n сфера S^{n-1} параллелизуема (станд. гладкая структура)?
— для каких n сфера S^{n-1} параллелизуема (какая-то гладкая структура)?
— какие элементы h_i доживают до $E_\infty^{*,*}$?

- Ответ: $n = 1, 2, 4, 8$, $i = 0, 1, 2, 3$.
- Из относительно элементарных соображений следует, что $n = 2^k$

▷ Адамс в работе «On the structure and applications of the Steenrod algebra», 1958, Comm. Math. Helv. вводит новую спектральную последовательность для вычисления стабильных гомотопических групп пространства X

$$\pi_n^{st}(X) = \mathrm{colim}_k \pi_{n+k}(\Sigma^k X).$$

Спектральная последовательность Адамса

(1) $E_2^{t,s} = \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}_p}^{s,t}(H^*(X,\mathbb{Z}/p),\mathbb{Z}/p)$
(2) В $\pi_n^{st}(X)$ имеется фильтрация F^s такая, что последовательные факторы фильтрации — это группы $E_\infty^{t,s}$ при $t-s=n$, а пересечение $\bigcap_s F^s\pi_*^{st}(X)$ состоит в точности из всех элементов конечных порядков, взаимно простых с p.

$\mathrm{Ext}^{s,t}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$

s																	
4	h_0^4																
3	h_0^3																
2	h_0^2	$h_0 h_2$	h_1^2	$h_0 h_2$			h_2^2	$h_0 h_3$	$h_1 h_3$						h_3^2	$h_0 h_4$	$h_1 h_4$
1	h_0	h_1		h_2				h_3								h_4	
0	1																
	0				4				8				12				$t - s$

- Есть элементы, не выражающиеся через произведения h_i:

$$c_i = \langle h_{i+1}, h_i, h_{i+2}^2 \rangle$$

(С.П.Новиков, ДАН, 1959)

Вычисление колец кобордизмов

Милнор (1960), Новиков (1960, 1962)

$\Omega_*^U = \mathbb{Z}[y_1, y_2, \ldots]$, где $|y_k| = 2k$.

- И Новиков, и Милнор пользовались спектральной последовательностью Адамса, оба использовали структуру алгебры Хопфа на $\mathcal{A}_p$.
- Оба получили новые доказательства известных теоремы о Ω_*^O, Ω_*^{SO}, $\Omega_*^{Sp}, \ldots$
- Реализация образующих многообразиями с различными условиями.

С.П.Новиков «Методы алгебраической топологии с точки зрения теории кобордизмов», Изв. АН, 1967

— Основная наша цель — это выработка новых методов, позволяющих вычислять стабильные гомотопические инварианты регулярным образом с помощью экстраординарных теорий гомологии и аналогичных методам Картана—Серра—Адамса в обычной, классической теории $\mathbb{Z}/p$-когомологий.
— В процессе работы автору пришлось столкнуться с целым рядом новых и весьма заманчивых алгебраических и топологических ситуаций, аналоги которых в классическом случае либо полностью отсутствуют, либо сильно вырождаются; многие из них пока глубоко не рассмотрены. Все это позволяет высказать надежду на перспективность этого круга идей и методов как в отношении применений к известным, классическим проблемам теории гомотопий, так ж в постановке и решении новых задач, от которых можно ждать появления нетрадиционных алгебраических связей и понятий.

- Несколько результатов:
  - Введение алгебры Ландвебера—Новикова S (алгебра Хопфа)
  - Вычисление алгебры стабильных когомологических операций в теории $U^*(-)$
  - Правило коммутации элементов алгебры S с элементами кольца скаляров Ω_U^*
  - Построение спектральной последовательности Адамса–Новикова
  - Вычисление $\mathrm{Ext}_S^{1,*}(\mathbb{Z}, \Omega_U^*)$

Спектральная последовательность Адамса—Новикова

При определенных условиях на X, Y, T:

- $X^*(-)$ — теория когомологий с представляющим спектром X:

$$X^n(T) = [\Sigma^{-n} T, X], \quad X_n(T) = [\Sigma^n S^0, X \wedge T].$$

- A^X — алгебра стабильных когомологических операций в теории $X^*(-)$.
- Например, $U^*(-)$ представлена спектром Тома MU и $A^U = U^*(MU)$.
- Для любых двух спектров T, Y существуют

– спектральная последовательность $E_r^{s,t}$, $d_r : E_r^{s,t} \to E_r^{s+r,t+r-1}$
– фильтрация в $[\Sigma^* T, Y]$, к которой присоединены группы $E_\infty^{s,t}$
– $E_2^{s,t} = \mathrm{Ext}_{A^X}^{s,t}(X^*(Y), X^*(T))$

- Например, для стабильных гомотопических групп сфер: $E_r^{s,t} \Longrightarrow \pi_{t-s}^{st}$

$E_2^{s,t} = \mathrm{Ext}_{A^U}^{s,t}(\Omega_U^*, \Omega_U^*) = \mathrm{Ext}_S^{s,t}(\mathbb{Z}, \Omega_U^*)$

Алгебра $U^*(MU)$ и алгебра Ландвебера-Новикова S

- Умножение $x \in U^*(T)$ на элемент $\alpha \in \Omega_U^*$:
$T \to T \wedge S^0 \xrightarrow{x \wedge \alpha} MU \wedge MU \to MU$

- Операции Ландвебера-Новикова S_ω определяются в терминах характеристических классов в $U^*(-)$.
$c_n(\xi)$ — класс в $U^{2n}(X)$ комплексного расслоения $\xi \to X$.
Определяются по стандартной схеме из $c_1(\gamma)$ тавтологического расслоения γ над $\mathbb{C}P^1$.

- $\omega = (i_1, \ldots, i_k)$, $n = i_1 + \ldots i_k$. $Symm(t_1^{i_1} \ldots t_k^{i_k}) = P_\omega(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$.
$S_\omega = P_\omega(c_1, \ldots) \in U^*(BU)$. В силу изоморфизма Тома получается элемент из $U^*(MU)$.

▷ S — алгебра: $S_{\omega_1}S_{\omega_2}$ — целочисленная линейная комбинация S_ω

▷ S — алгебра Хопфа: $\Delta S = \sum\limits_{\omega=\omega_1\sqcup\omega_2} S_{\omega_1}\otimes S_{\omega_2}$

▷ $A^U = \Omega^*_U\widehat{\otimes}S$

▷ Умножение в A^U не совпадает со стандартным умножением в тензорном произведении алгебр, имеется правило коммутации
$(1\otimes S_\omega)(\alpha\otimes 1) = \sum\limits_{\omega=\omega_1\sqcup\omega_2} \sigma^*_{\omega_1}(\alpha)\otimes S_{\omega_2}$

Причина: действие S на Ω^*_U не тривиально.

$\mathrm{Ext}_S^{1,*}(\mathbb{Z}, \Omega_U^*)$

- $\mathrm{Ext}_S^{1,4}(\mathbb{Z}, \Omega_U^*) = \mathbb{Z}/12$
- $\mathrm{Ext}_S^{1,4k+2}(\mathbb{Z}, \Omega_U^*) = \mathbb{Z}/2$
- $\mathrm{Ext}_S^{1,8k+4}(\mathbb{Z}, \Omega_U^*) = \mathbb{Z}/N$, где N — знаменатель числа $\dfrac{B_{2k+1}}{8k+4}$
- В статье

Новиков С. П. Методы алгебраической топологии с точки зрения теории кобордизмов (1967)
есть много других интересных вычислений.

▷ Вычисление $\operatorname{Ext}_S^{s,t}(\mathbb{Z}, \Omega_U^*)$ — сложная задача на стыке гомологической алгебры, комбинаторики и теории чисел. Фактически она потребовала развития новых методов в теории когомологий (ко)алгебр и алгебр Хопфа.

▷ В 1970 г. В.М.Бухштабер (Характер Черна—Дольда в кобордизмах, I, 1970) предложил спектральную последовательность для вычисления второго члена спектральной последовательности Адамса—Новикова

$$\operatorname{Ext}_S^{s,t}(\mathbb{Z}, \Omega_U^*).$$

Она (BSS) связывает вместе несколько важных алгебраических объектов (подробности далее).

▷ Заметим, что группы $\operatorname{Ext}_S^{s,t}(\mathbb{Z}, S_*)$ тривиальны (нулевые при $(s,t) \neq (0,0)$, $\mathbb{Z}$ при $s = t = 0$).

▷ Зачем упоминается этот нехитрый факт?

▷ Имеет место вложение колец $\Omega_U^* \subset \Omega_U^* \otimes \mathbb{Q}$, согласованное с действием алгебры Ландвебера—Новикова как алгебры Хопфа (в терминологии Новикова — вложение модулей Милнора): $S_\omega(xy) = \sum\limits_{\omega_1 \sqcup \omega_2 = \omega} S_{\omega_1}(x)\, S_{\omega_2}(y)$.

▷ В работе [B1970] построено промежуточное кольцо $\Omega_U^*(\mathbb{Z})$ (тоже модуль Милнора)

$$\Omega_U^* \subset \Omega_U^*(\mathbb{Z}) \subset \Omega_U^* \otimes \mathbb{Q}$$

У него есть красивое определение в терминах характеристических чисел.

Теорема [B1970]

Милноровский S-модуль $\Omega_U^*(\mathbb{Z})$ изоморфен двойственной алгебре Хопфа S_*.

▷ Следовательно, группы $\mathrm{Ext}_S^{s,t}(\mathbb{Z}, \Omega_U^*(\mathbb{Z}))$ тривиальны (нулевые при $(s,t) \neq (0,0)$, $\mathbb{Z}$ при $s = t = 0$).

BSS

Определение фильтрации

- $N_0 = \Omega_U^* \subset \Omega_U^*(\mathbb{Z})$
- $N_{p+1} = \{x \in \Omega_U^*(\mathbb{Z}) \mid \forall s \in S, |s| > 0 \,:\, s(x) \in N_p\}$

Важные свойства фильтрации

▷ $\bigcup N_p = \Omega_U^*(\mathbb{Z})$

▷ Для всех $p > 1$ действие S на N_p/N_{p-1} тривиально: $1 \in S$ действует тождественно, любой элемент $s \in S$, $|s| > 0$, действует тривиально

▷ Напомним определение $\mathrm{Ext}_A^{s,t}(M,N)$, где M и N — левые градуированные A-модули (т. е. $A^iM^j\subset M^{i+j}$). Пусть $\ldots\to P_2\to P_1\to P_0\to M$ — проективная резольвента модуля M над A. Применяя к $P_\bullet$ функтор $\mathrm{Hom}_A^t(-,N)$, получаем комплекс $F(N)=\mathrm{Hom}_A^t(P_s,N)$ с дифференциалом d, индуцированным дифференциалом резольвенты — его когомологии по определению называются $\mathrm{Ext}_A^{s,t}(M,N)$.

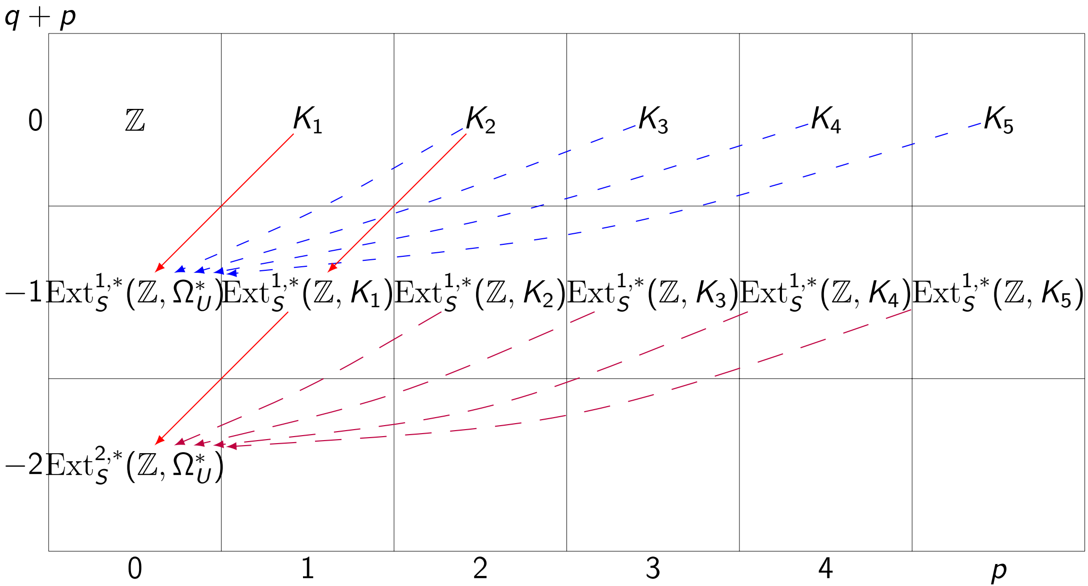
▷ Комплекс $F(N)$, вычисляющий $\mathrm{Ext}_S^{*,*}(\mathbb{Z},N)$, где N — произвольный S-модуль, функториален по N, так что фильтрация

$$N_0\subset N_1\subset\ldots\subset\Omega_U^*(\mathbb{Z})=S_*$$

индуцирует фильтрацию $F(N_0)\subset F(N_1)\subset F(N_2)\subset\ldots\subset F(\Omega_U^*(\mathbb{Z}))=F(S_*)$.

▷ Возникает триградуированная спектральная последовательность с тривиальным предельным членом $E_\infty^{*,*,*}$ (т.е. все $E_\infty^{*,*,*}=0$, кроме $E_\infty^{0,0,0}=R$)

▷ BSS для $\mathrm{Ext}_S^{*,*}(\mathbb{Z}, \Omega_U^*)$



Результаты В.М.Бухштабера, Н.В.Панова и А.В.Шокурова

- [B1970] Имеет место изоморфизм

$$N_1/\Omega_U^* = N_1/N_0 \xrightarrow{d_1} \mathrm{Ext}_S^{1,*}(\mathbb{Z}, \Omega_U^*)$$

- [B1970] Описана связь N_1/N_0 с $\Omega_*^{U,fr}$.
- [B1970] Кольцо $\Omega_U^*(\mathbb{Z})$ изоморфно $\mathbb{Z}[\frac{\mathbb{C}P^n}{n+1},\ n \geq 1]$.
Тем самым, в $\Omega_U^*(\mathbb{Z})$ фиксируется аддитивный базис.
- Н.В.Панов в работе «Характеристические числа в U-теории» (1971) описал группу N_1 в этом базисе.
- Это дает описание образующих в группах $\mathrm{Ext}_S^{1,*}(\mathbb{Z}, \Omega_U^*)$ в терминах базиса в N_1

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. *Пусть* $N_1 \subset \Omega_*^U \otimes Q$ — *градуированная подгруппа, состоящая из элементов, у которых все характеристические U-числа целые, и пусть* $(N_1)_{2n}$ — *однородная компонента в* N_1 *размерности* $2n$. *Тогда:*

1) *если* n *нечетно, то* $(N_1)_{2n}$ *порождена* Ω_{2n}^U *и* $\dfrac{CP(1)^n}{2}$;

2) *если* $n=2$, *то* $(N_1)_4$ *порождена* Ω_4^U, $\dfrac{CP(1)^2}{4}$, $\dfrac{CP(2)}{3}$;

3) *если* n *четно и* $n>2$, *то* $(N_1)_{2n}$ *порождена* Ω_{2n}^U *и элементами* $\dfrac{CP(1)^n}{2^{m+2}} + \dfrac{H_{2,2}CP(1)^{n-3}}{2}$, $\dfrac{CP(p_i-1)^{k_i}}{p_i^{m_i+1}}$; *здесь* $n = 2^{m_1} l_1$, *где* l_1 *нечетно;* p_i *пробегает все простые числа такие, что* $n \equiv 0 \mod (p_i - 1)$; $k_i = \dfrac{n}{p_i - 1}$; $k_i = p_i^{m_i} l_i$, $(l_i, p_i) = 1$; $H_{2,2}$ — *гиперповерхность в* $\mathbf{C}P(2) \times \mathbf{C}P(2)$ *степени* (1:1).

Результаты В.М.Бухштабера, Н.В.Панова и А.В.Шокурова

- Имеет место точная последовательность

$$0 \to N_2/N_1 \to \mathrm{Ext}_S^{1,*}(\mathbb{Z}, N_1/\Omega_U^*) \to \mathrm{Ext}_S^{2,*}(\mathbb{Z}, \Omega_U^*).$$

- Частичное вычисление $\mathrm{Ext}_S^{2,*}(\mathbb{Z}, \Omega_U^*)$

— В. М. Бухштабер, А. В. Шокуров «Алгебра Ландвебера–Новикова и формальные векторные поля на прямой» Функциональный анализ и его приложения, 1978, т. 12, в. 3, стр. 1–11
— А. В. Шокуров «Когомологии кольца операций в теории унитарных кобордизмов и гомотопические инварианты непрерывных отображений» УМН, 1978, т. 33, в. 3(201), стр. 195–196

[BP2024] общий случай: R — поле и $A = \bigoplus\limits_{n\geq 0} A^n$, $A^0 = R$.

Определение фильтрации Бухштабера $N_0 \subset N_1 \subset \ldots \subset A_*$

- $N_0 = R$
- $N_{p+1} = \{x \in A_* \,|\, \Delta(x) = 1\otimes x + x \otimes 1 + \sum\limits_k x_k^{(1)} \otimes x_k^{(2)}$ и $x_k^{(1)} \in N_p$ для всех $k\}$

▷ Для всех p действие A на модуле $K_p = N_p/N_{p-1}$ тривиально.

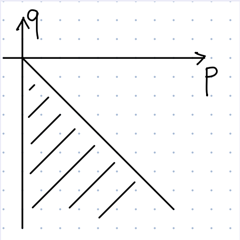
▷ при $p < 0$ или $p + q > 0$ выполнено $E_1^{p,q,*} = 0$

▷ нулевой столбец $E_1^{0,q,t} = \mathrm{Ext}_A^{-q,t}(R, R)$

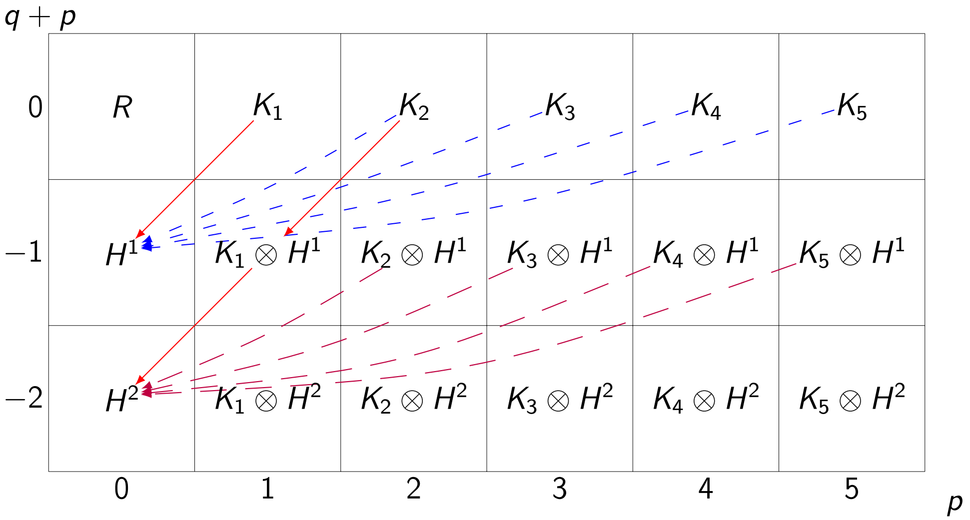
▷ диагональ $E_1^{p,-p,t} = (N_p/N_{p-1})^t = (K_p)^t$

▷ $E_1^{p,q,*} = \mathrm{Ext}_A^{-(p+q),*}(R,N_p/N_{p-1}) = K_p \otimes \mathrm{Ext}_A^{-(p+q),*}(R,R)$

▷ $d_1 : N_p/N_{p-1} \to (N_{p-1}/N_{p-2}) \otimes \mathrm{Ext}_A^{1,*}(R, R)$ мономорфизм



BSS для $H^s = \mathrm{Ext}_A^{s,*}(R, R)$



Простой пример

- $A = \Bbbk[x]$, $\deg x = 2$, $\deg x = 2$, $\Delta x = 1 \otimes x + x \otimes 1$
- A_* — алгебра разделенных степеней: элемент γ_n дуален x^n. Умножение и коумножение
$$\gamma_i \gamma_j = \binom{i+j}{i} \gamma_{i+j}, \qquad \Delta \gamma_n = \sum_{i+j=n} \gamma_i \otimes \gamma_j.$$
- Фильтрация Бухштабера, начинающаяся с $N_0 = \Bbbk$:
$$N_p = \Bbbk\langle \gamma_j \ : \ j \leq p \rangle$$
- Последовательные факторы фильтрации
$$K_p = N_p / N_{p-1} = \Bbbk\langle \gamma_p \rangle$$

BSS для $A = \Bbbk[x]$

$q + p$

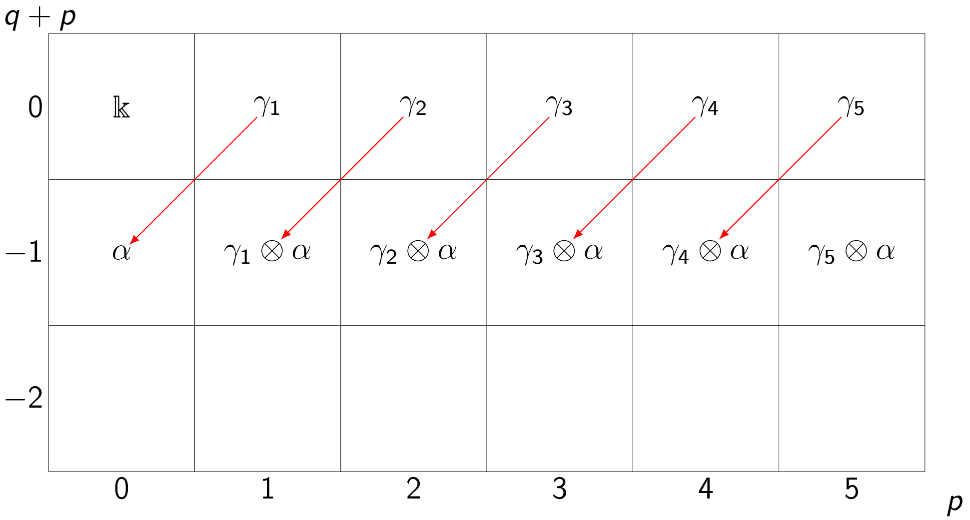
0	$\Bbbk$	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	
-1	?						
-2							
	0	1	2	3	4	5	p

BSS для $A = \Bbbk[x]$

$q+p$						
0	$\Bbbk$	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5
-1	α					
-2						
	0	1	2	3	4	5

p

BSS для $A = \Bbbk[x]$



BSS для $A = \Bbbk[x]/x^5$

$q+p$						
0	$\Bbbk$	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	0
-1	α	$\gamma_1 \otimes \alpha$	$\gamma_2 \otimes \alpha$	$\gamma_3 \otimes \alpha$	$\gamma_4 \otimes \alpha$	
-2	β	$\gamma_1 \otimes \beta$	$\gamma_2 \otimes \beta$	$\gamma_3 \otimes \beta$	$\gamma_4 \otimes \alpha$	
	0	1	2	3	4	5

p

Роль дифференциалов в *BSS*

- Для связной градуированной алгебры Хопфа над полем дифференциалы спектральной последовательности Бухштабера задают сложные рекуррентные соотношения между $\mathrm{Ext}_A^{s,t}(R,R)$ и группами $K_p = N_p/N_{p-1}$

- В оригинальной версии [B1970]

$$E_1^{p,q,*} = \mathrm{Ext}_S^{-(p+q),*}(\mathbb{Z}, N_p/N_{p-1})$$

поэтому дифференциалы спектральной последовательности задают соотношения между группами $\mathrm{Ext}_S^{-(p+q),*}(\mathbb{Z},\Omega_U^*)$, N_p/N_{p-1}, $\mathrm{Ext}_S^{-(p+q),*}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$ и $\mathrm{Tor}(\mathrm{Ext}_S^{-(p+q)+1,*}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}), N_p/N_{p-1})$

Роль дифференциалов в *BSS*

- Представление элементов фильтрации Φ^r произведениями Масси

Теорема [BP2024]

Пусть $x \in \Phi^k \mathrm{Ext}_A^{s,*}(R,R)$ и $x \notin \Phi^{k-1}\mathrm{Ext}_A^{s,*}(R,R)$.
Тогда x является представителем нетривиального матричного $(k+1)$-местного произведения Масси вида $\langle a_1, a_2, \dots, a_k, y\rangle$, где матрицы $a_1, a_2, \dots, a_k$ состоят из элементов группы $\mathrm{Ext}_A^{1,*}(R,R)$, а матрица a_{k+1} — из элементов группы $\mathrm{Ext}_A^{s-1,*}(R,R)$.

Фильтрация для $S_* \otimes \mathbb{Q} \cong \Omega_U^* \otimes \mathbb{Q}$

- Опишем фильтрацию Бухштабера, начинающуюся с $N_0 = \mathbb{Q} \subset \Omega_U^* \otimes \mathbb{Q}$. Для этого нам нужны удобные полиномиальные образующие в $\Omega_U^* \otimes \mathbb{Q}$ и описание действия S на них в терминах этих образующих.

- Характер Черна—Дольда в U-кобордизмах $\mathrm{ch}_U : U^*(X) \to H^*(X, \Omega_U^* \otimes \mathbb{Q})$.

- Пусть $u \in U^2(\mathbb{C}P^\infty)$ — первый класс Черна в U-кобордизмах универсального линейного расслоения γ над $\mathbb{C}P^\infty$. Тогда для элемента $\mathrm{ch}_U(u) \in H^*(\mathbb{C}P^\infty, \Omega_U^*(\mathbb{Z}))$ выполняется

$$\mathrm{ch}_U(u) = \beta(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} t_n \frac{z^{n+1}}{(n+1)!},$$

где $z \in H^2(\mathbb{C}P^\infty, \mathbb{Z})$ — класс Черна расслоения γ. Классы $t_n \in \Omega_U^{-2n}$ полностью охарактеризованы в работе [B1970], см. также [BV2024: Chern–Dold character in complex cobordisms and theta divisors]

▷ Ряд $\beta(z)$ является функционально обратным к логарифму (А.С.Мищенко) формальной группы геометрических кобордизмов

$$g(u) = u + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\mathbb{C}P^n]}{n+1} u^{n+1}.$$

▷ $\Omega_U^* \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}[t_1, t_2, \dots]$.

▷ Рассмотрим ряд

$$Q_v(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n v_n \frac{z^n}{(n+1)!},$$

определенный условием $Q_v(z)\beta(z) = z$.

▷ $\Omega_U^* \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}[t_1, t_2, \dots] = \mathbb{Q}[v_1, v_2, \dots]$.

▷ Для монома $v^I = v_1^{i_1} v_2^{i_2} \ldots v_m^{i_m}$ положим $p(I) = i_1 + \sum_k (k-1) i_k$.

Theorem ([BP2024])

(a) Элемент v_I принадлежит $N_{p(I)}$.
(b) Аддитивный базис $\Omega_U^* \otimes \mathbb{Q}$ согласован с фильтрацией N_p в следующем смысле:

$$\mathbb{Q}\langle v_I \ : \ p(I) = p \rangle \oplus N_{p-1} = N_p.$$

В частности, v_I не принадлежит $N_{p(I)-1}$.

▷ Трудность в том, что, вообще говоря, линейная комбинация мономов v^I с $p(I) = p$ могла бы принадлежать N_{p-1}.

Спасибо за внимание!