Действия n-значных групп и разветвленные накрытия

Майоров Степан

Санкт-Петербургский государственный университет

16 мая 2026 г.

Пространство орбит

Пусть X — n-значная группа, действующая на (топологическом) пространстве V.

Определение

Действие X на множестве V *обладает пространством орбит*, если существуют множество W и сюръективное отображение $\pi : V \to W$ такие, что для любой пары точек $v, v' \in V$ условие $\pi(v) = \pi(v')$ выполняется тогда и только тогда, когда $v' \in Xv$.

Определение

Если мы рассматриваем непрерывное действие на топологическом пространстве, то требуем существования топологического пространства орбит и непрерывного сюръективного отображения.

Случай косетных групп

Пусть заданы действия группы G и конечной группы A на пространстве U, а так же эквивариантное действие $\rho : A \to \mathrm{Aut}(G)$.

Теорема (Бухштабер, Веснин)

Пусть (G, A, ρ) — такая тройка, что n-значная косетная группа $X = G/\rho(A)$ косетно действует на топологическом пространстве $V = U/A$. Тогда пространство $W = U/\langle G, A\rangle$ является пространством орбит этого действия относительно канонической проекции $V \to W$.

$$
\begin{tikzcd}
 & U \arrow[dl, "G"'] \arrow[dr, "A"] & \\
U/G \arrow[dr, "A"'] & & V = U/A \arrow[dl, "\pi"] \\
 & W = U/\langle G, A\rangle &
\end{tikzcd}
$$

Случай гиперболический многообразий

Теорема (Mostow)

Пусть $M_1 = \mathbb{H}^3/\Gamma_1$ и $M_2 = \mathbb{H}^3/\Gamma_2$, где $\Gamma_1, \Gamma_2 < \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$, — компактные ориентируемые трёхмерные гиперболические многообразия. Если имеет место изоморфизм $\phi : \Gamma_1 \to \Gamma_2$, то найдётся такая изометрия $q \in \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^3)$, что

$$\phi(\gamma) = q \circ \gamma \circ q^{-1} \quad \text{для всех } \gamma \in \Gamma_1,$$

которая индуцирует изометрию $\chi : M_1 \to M_2$ такую, что $\chi_* = \phi$.

Задача Нильсена

Положим M замкнутым компактным трехмерным многообразием, есть естественное отображение $h : \mathrm{Homeo}(M) \to \mathrm{Out}(\pi_1(M))$.

Пусть есть гомоморфизм $\psi : G \to \mathrm{Out}(\pi_1(M))$ из конечной группы G. Встает вопрос реализации G конечной группой гомеоморфизмов, т.е. существования мономорфизма $\zeta : G \to \mathrm{Homeo}(M)$ такого, что $\psi = h\zeta$.

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Homeo}(M) \arrow[d, "h"] \\
G \arrow[ur, dashed, "\zeta"] \arrow[r, "\psi"'] & \mathrm{Out}(\pi_1(N))
\end{tikzcd}$$

Их связь

Теорема

Пусть M — многообразие, для которого разрешима задача Нильсена о реализации (G, ψ). Тогда n-значная косетная группа $\pi_1(M)/G$ действует на пространство $\overline{M}/G$, где $\overline{M}$ — универсальное накрытие M.

Утверждение

Пусть N — это многообразие, для которого разрешима задача Нильсена о реализации для $\psi : G \to \mathrm{Out}(\pi_1(N))$. Если есть $p \in \operatorname{Im} \psi$, то найдется такой $\alpha \in \mathrm{Homeo}(\overline{N})$, что

$$p(\gamma) = \alpha \circ \gamma \circ \alpha^{-1}, \quad \gamma \in \pi_1(N),$$

который индуцирует $\underline{\alpha} \in \mathrm{Homeo}(N)$ такой, что $\underline{\alpha}_* = p$.

Группы с циклическим представлением

Определим группу $G_m(w)$ следующим представлением:

$$G_m(w) = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \mid w = 1, \theta(w) = 1, \dots, \theta^{m-1}(w) = 1 \rangle.$$

Такое представление называется *циклическим*, а слово w — *определяющим словом*.

Определение

Группа G называется *группой с циклическим представлением*, если она изоморфна группе $G_m(w)$ для некоторых $m \geq 2$ и $w \in \mathbb{F}_m$.

Пусть θ — автоморфизм, циклически переставляющим образующие, порядка m. Далее мы будем рассматривать n-значные группы $G_m(w)/\langle \theta^s \rangle$.

Группы Фибоначчи

Группами Фибоначчи называются

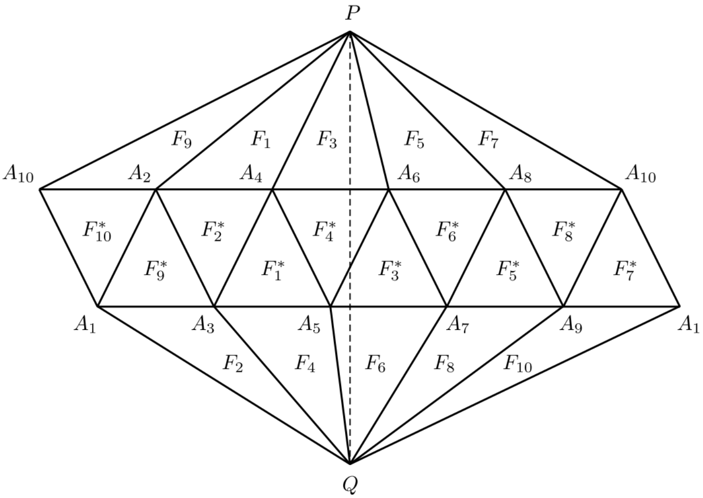
$$F(2,n) = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \mid x_i x_{i+1} = x_{i+2},\ i = 1, \dots, n \rangle$$

Для $n \geq 4$ группа $F(2,2n)$ реализуется как фундаментальная группа замкнутого ориентируемого гиперболического 3-многообразия M_n, называемое *многообразием Фибоначчи*.

Оно является n-листным циклическим разветвленным накрытием S^3 вдоль узла "восьмерки". Есть $r_n \in \mathrm{Out}(\pi_1(M_n))$ такой, что $r_n(x_i) = x_{i+2}$. Его можно реализовать вращением вдоль оси $\rho_n \in \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^3)$, т.е. $r_n(x_i) = \rho_n^{-1} x_i \rho_n = x_{i+2}$.

$$\mathcal{R}_n = \langle \rho_n \mid \rho_n^n = 1 \rangle < \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^3), \quad R_n = \langle r_n \mid r_n^n = 1 \rangle < \mathrm{Out}(F(2,2n))$$

Группы Фибоначчи



Группы Фибоначчи

Теорема (Бухштабер, Веснин)

При $n \geq 4$ имеет место действие n-значной костной группы $F(2,2n)/R_n$ на пространстве, гомеоморфном $\mathbb{R}^3$, с пространством орбит, гомеоморфным S^3.

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{H}^3 \arrow[dl, "F(2{,}2n)"'] \arrow[dr, "\mathcal{R}_n"] & \\
M_n \arrow[dr, "\mathcal{R}_n"'] & & \mathbb{H}^3/\mathcal{R}_n \arrow[dl, "\pi"] \\
 & \mathcal{O}_n(K_1) = \mathbb{H}^3/\langle F(2,2n), R_n\rangle \simeq S^3 &
\end{tikzcd}
$$

Двухмостовые узлы

Пусть $M_n(p,q)$ — n-листное циклическое разветвленное накрытие узла $\mathbf{b}(p/q)$. Обозначим

$$R_{p/q}(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 x_{1+s_1}^{-1} x_{1+s_2} x_{1+s_3}^{-1} \cdots x_{1+s_{p-1}}^{(-1)^{p-1}},$$

при этом

$$s_j = s_j(p,q) = \sum_{i=1}^{j} (-1)^{[iq^{-1}/p]},$$

где q^{-1} — это обратный элемент к q в $\mathbb{Z}_{2p}$ и $[x]$ обозначает целую часть x.

Тогда фундаментальная группа имеет представление

$$G_n(R_{p/q}) = \langle x_1, \dots, x_n \mid R_{p/q}(x_i, \dots, x_{i+n-1}) = 1,\ i = 1, \dots n \rangle$$

Двухмостовые узлы

Теорема

При $p = 5$, $n \geq 4$ или $p \neq 5$, $n \geq 3$ имеет место действие n-значная косетная группа $G_n(R_{p/q})/R_n$ на пространстве, гомеоморфном $\mathbb{R}^3$, с пространством орбит, гомеоморфном S^3.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{H}^3 \arrow[dl, "G_n(R_{p/q})"'] \arrow[dr, "\mathcal{R}_n"] & \\
M_n(p,q) \arrow[dr, "\mathcal{R}_n"'] & & \mathbb{H}^3/\mathcal{R}_n \arrow[dl, "\pi"] \\
 & \mathcal{O}_n(\mathbf{b}(p/q)) = \mathbb{H}^3/\langle G_n(R_{p/q}), R_n\rangle &
\end{tikzcd}$$

Обобщенные группы Серадски

Обобщенные группы Серадски называются

$$S(n,p,q) = \\ = \langle x_1,\dots,x_n \mid x_i x_{i+q} \cdots x_{i+(q-1)dq-q} x_{i+(q-1)dq} = \\ = x_{i+1} x_{i+q+1} \cdots x_{i+(q-1)dq-q+1},\ i = 1,\dots,n\rangle,$$

где индексы берутся по модулю n, а p и q — натуральные числа такие, что $(p,q)=1$ и $p = 1+dq$, $d \in \mathbb{Z}$.
Данное представление $S(n,p,q)$ соответствует спайну замкнутого 3-многообразия $M(n,p,q)$, которое является n-листным циклическим накрытием S^3, разветвленным вдоль торических узлов $T(p,q)$.

$$\mathcal{R}_n = \langle \rho_n \mid \rho_n^n = 1\rangle < \mathrm{Isom}(\widetilde{SL}(2;\mathbb{R})), R_n = \langle r_n \mid r_n^n = 1\rangle < \mathrm{Out}(S(n,p,q))$$

Обобщенные группы Серадски

Теорема

Пусть $n^{-1} + p^{-1} + q^{1} < 1$, тогда имеет место действие n-значной косетной группы $S(n,p,q)/R_n$ на пространстве, гомеоморфном $\mathbb{R}^3$, с пространством орбит, гомеоморфным S^3.

$$\begin{tikzcd}
 & \widetilde{SL}(2;\mathbb{R}) \arrow[dl, "S(n,p,q)"'] \arrow[dr, "\mathcal{R}_n"] & \\
M(n,p,q) \arrow[dr, "\mathcal{R}_n"'] & & \widetilde{SL}(2;\mathbb{R})/\mathcal{R}_n \arrow[dl, "\pi"] \\
 & \mathcal{O}_n(T(p,q)) &
\end{tikzcd}$$

Спасибо за внимание!