Оснащённые косы и числа Эйлера

Сочи, Сириус

Бирюкова Ульяна

факультет Математики и компьютерных наук
Санкт-Петербургского Государственного Университета

16 мая 2026 года

Действие фундаментальной группы на окружности

S_g — замкнутая ориентируемая поверхность рода $g \geq 2$ конечного типа.

$$S^1 \to E \to S_g \quad \text{— расслоение}$$

В частности, тотальное пространство E является 3-многообразием Зейферта.
Данные расслоения классифицируются числами Эйлера — целыми числами, являющимися результатом применения класса Эйлера (элемент $H^2(S_g;\mathbb{Z})$) к фундаментальному классу поверхности.
Классическая теорема (см. [Mil58], [Woo71]):

Теорема (Милнор, Вуд, 1958 и 1971 год)

Расслоение допускает трансверсальное слоение тогда и только тогда, когда

$$|e(E)| \leq |\chi(S_g)| = 2g - 2.$$

Действие фундаментальной группы на окружности

Теорема (Милнор, Вуд, 1958 и 1971 год)

Расслоение допускает трансверсальное слоение тогда и только тогда, когда

$$|e(E)| \leq |\chi(S_g)| = 2g - 2.$$

Её можно переформулировать в терминах представлений:
Существует нетривиальный гомоморфизм $\rho : \pi_1(S_g) \to \mathrm{Homeo}^+(S^1)$ с числом Эйлера $e(E)$ тогда и только тогда, когда

$$|e(E)| \leq 2g - 2.$$

$$\pi_1(S_g) \cong \langle a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1] \cdot [a_2, b_2] \cdot \cdots \cdot [a_g, b_g] = 1 \rangle$$

Вильям Гольдман в 1988 году доказал, что пространство представлений $\mathrm{Hom}(\pi_1(S_g), \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}))$ имеет $4g - 1$ компонент связности, по одной на каждое число Эйлера в диапазоне Милнора-Вуда, каждая распадается на две неприводимые компоненты (см. [Gol88]).

Результаты о действиях фундаментальной группы на окружности

В 2018 году Jason DeBlois and Richard P. Kent IV доказали, что множество точных представлений плотно в $\mathrm{Hom}(\pi_1(S_g), \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}))$ в топологии Зарисского (см. [DK20]). Интересно исследовать минимальные действия.

Определение

Действие называется минимальным, если орбита каждой точки плотна.

Теорема (Б.)

Множество $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$-представлений, которые индуцируют минимальные действия на окружности, плотны в $\mathrm{Hom}(\pi_1(S_g), \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}))$ в топологии Зарисского.

Теорема (Б.)

Группа $\pi_1(E)$ допускает минимальное эффективное действие на прямой гомеоморфизмами, сохраняющими ориентацию, тогда и только тогда, когда для данного расслоения выполнено неравенство Милнора-Вуда $|e(E)| \leq 2g - 2$.

Приложение в теории кос

А. В. Малютин ввёл в 2004 году инвариант кос под названием закрученность (см. [M4]):

$$w_n : B_n \to \mathbb{R}$$

- Выбор названия обусловлен тем, что, в некотором смысле, инвариант w_n показывает, насколько сильно коса „закручена“ или „перекручена“.
- Изотопические классы замкнутых кос в полнотории находятся во взаимно-однозначном соответствии с классами сопряженности в группах кос. Закрученность инвариантна относительно сопряжения, что позволяет определить её для замкнутых кос.
- Группа классических n-ниточных кос на диске изоморфна группе классов отображений диска с n проколами $B_n \cong \mathrm{Mod}(D_n)$. С этой точки зрения закрученность совпадает с коэффициентом дробного скручивания Дена, что позволяет расширить определение закрученности на группы классов отображений поверхностей с непустым краем.
- Закрученность совпадает с пулбэком числа вращения Пуанкаре относительно представления Нильсена—Тёрстона.

Закрученность кос

Определение

Однородный квазиморфизм на группе Γ — функция, для которой дефект

$$D := \sup_{f,h\in\Gamma} |\phi(fh) - \phi(f) - \phi(h)|$$

конечен и $\phi(g^n) = n\phi(g)$.

В случае классических кос на диске определение закрученности принимает следующий вид:

Определение

Однородный квазиморфизм w на группе B_n такой, что $D \leq 1$, принимающий на подгруппе B_{n-1} нулевое значение и принимающий значение единица на порождающей центра.

Из полученного обобщения теорем о действии фундаментальной группы и некоторых оценок значения на коммутаторах получается следующий результат для однониточного случая:

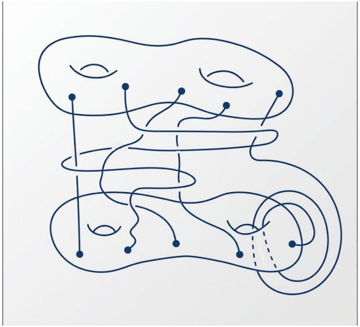
Закрученность кос

Теорема (Б.)

На группе $\pi_1(E)$ существует однородный квазиморфизм с дефектом $D \leq 1$, принимающий единичное значение на порождающем элементе центра тогда и только тогда, когда $|e| \leq 2g - 2$.

Естественно ожидать, что в случае большего количества нитей верна аналогичная теорема.
Закрученность косы с касательным оснащением вокруг выделенной нити определена с помощью вложения в группу классов отображения с одной компонентой края и пуллбэка коэффициента дробного скручивания Дэна.
Упорядоченное конфигурационное пространство с оснащением первой точки: Пространство $F_n^{E,1}(S_g)$, точки которого — упорядоченные наборы из n различных точек, над первой из точек в каждом наборе висит единственная точка в слое.
Группы крашенных кос с оснащением первой нити: Фундаментальная группа такого конфигурационного пространства $P_n^{E,1}(S_g) = \pi_1(F_n^{E,1}(S_g))$.

Группы кос с оснащением



Примеры:

- *тривиальное оснащение:* $P_n^{triv,1}(S_g) \cong \mathbb{Z} \times P_n(S_g)$
- *касательное оснащение:* единичное касательное векторное поле вдоль первой нити

Универсальная группа кос

Необходимо установить согласованность желаемого обобщения закрученности с уже описанными в литературе случаями.

Теорема (Б.)

Существует мономорфизм $c : P_{n,g}^{E',1} \longrightarrow P_{n,g}^{E,1}$ для расслоений E и E' с различными числами Эйлера тогда и только тогда, когда $e' \mid e$.

Утверждение (Б.)

Группа $P_{n,g}^{E,1}$ эквивариантно вкладывается в группу классов отображений тогда и только тогда, когда $e \mid 2g - 2$.

Рассмотрим следующие категории и функтор между ними: Пусть $\mathcal{C} = (\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \preceq)$ — категория с множеством объектов $\mathcal{O}b(\mathcal{C}) = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ и множеством морфизмов $\mathcal{M}or(\mathcal{C}) = \{e' \preceq e \overset{\text{def}}{=} e' \mid e\}$.
Пусть $\mathcal{F} : (\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \preceq) \longrightarrow \underline{\mathsf{Grp}}$ — функтор в категорию групп, заданный на объектах как $e \mapsto P_{n,g}^{E,1}$. По утверждению он корректно определен на морфизмах.
Определим универсальную группу кос как следующий копредел: $\widetilde{P}_n = \operatorname{colim} \mathcal{F}$

Явная конструкция

Универсальная группа кос изоморфна рационализации центра группы оснащённых кос:

$$\widetilde{P}_n = (P_{n,g}^{tg,1} \times \mathbb{Q}) \,/\, t = 1,$$

где $P_{n,g}^{tg,1}$ — группа крашенных кос на поверхности рода g с касательным оснащением первой нити, t — порождающий элемент её центра.

- Стоит отметить, что группа крашенных оснащённых кос на орбифолде тоже вкладывается в универсальную группу кос.
- Закрученность легко продолжается с группы касательно оснащённых на универсальную:

$$w(\beta, q) := w_{tg}(\beta) + q$$

- Таким образом, инвариант закрученности обобщается на косы с оснащением в произвольных нетривиальных расслоениях на поверхностях и орбифолдах с помощью пуллбэка вдоль вложения в универсальную группу.

Теоремы про действие кос

Гипотеза

Группа $P_n(S_g)$ допускает минимальное эффективное действие на окружности ρ.

Теорема (Б.)

Для любого представления $\rho : P_n(S_g) \to \mathrm{Homeo}_+(S^1)$ для соответствующего действия выполняются следующие утверждения:
1) Если ограничение действия на базу, $\rho|_{\pi_1(S_g)}$, минимально и имеет число Эйлера e, а ограничение на ядро, $\rho|_U$, нетривиально и не минимально, то ядро действует поворотами порядка $k \geq 2$, и их параметры удовлетворяют неравенству:

$$k \cdot |e| \leq 2g - 2$$

2) Равенство $k \cdot |e| = 2g - 2$ достигается тогда и только тогда, когда действие всей группы $P_n(S_g)$ топологически сопряжено поднятию фуксова действия, т. е. вкладывается в конечномерную группу Ли, а именно в k-листное накрытие $\mathrm{PSL}^{(k)}(2, \mathbb{R})$.
3) Последний случай продолжений является тривиальным.

Теоремы про действие кос

Теорема (Б.)

(A) Группа $\mathrm{P}_{n,g}$ допускает действие $\rho : \mathrm{P}_{n,g} \times S^1 \longrightarrow S^1$ тогда и только тогда, когда $\rho|_{\pi_1(S_g)}$ удовлетворяет условию $|e| \leq 2g-2$. Более того, существует точное действие для всех ненулевых чисел Эйлера в допустимом диапазоне.
(B) Группа $\mathrm{P}_{n,g}^{E,1}$ допускает эффективное действие, коммутирующее с целочисленными сдвигами на прямой $\mathbb{R}$, тогда и только тогда, когда для расслоения E выполняется неравенство Милнора-Вуда $|e| \leq 2g-2$.

Для полной классификации действий $P_n(S_g)$ на S^1, которые продолжают минимальные точные действия группы $\pi_1(S_g)$, необходимо разобрать ещё случай минимального неэффективного действия ядра.
Также можно получить следствия о действии оснащённых кос на прямой.

Когомологическая интерпретация

Закрученность является однородным квазиморфизмом. Пространство однородных квазиморфизмов — это в точности ядро отображения сравнения

$$c : H_b^2(P_{n,g}^{E,1}; \mathbb{R}) \to H^2(P_{n,g}^{E,1}; \mathbb{R})$$

- Через когомологическую интерпретацию закрученности получается показать, что закрученность, полученная с помощью пуллбэка вдоль вложения в универсальную группу, совпадает с полученной через число переноса действия.
- Часто про это пространство известно лишь то, что оно бесконечномерно, а конкретных примеров элементов крайне мало, структура самого пространства не ясна.
- Тем не менее это интересно специалистам по геометрической теории групп и маломерной топологии (изучение стабильной коммутаторной длины и минимальных подповерхностей).

Для классических кос на диске И. А. Дынников и В. А. Шастин в 2013 году доказали, что $Q(B_n)$ имеет структуру модуля над алгеброй Вейля $W = \langle xy - yx = 1\rangle_{\mathbb{R}}$, с помощью операторов, индуцированных операциями удаления и добавления нитей (см. [12] и [M9]). В работе докладчика получены аналогичные результаты для случая крашенных кос на поверхности рода $g \geq 2$.

Пространство EH_b^m

Изучение ядра отображения

$$c_m : H_b^m(\Gamma; \mathbb{R}) \to H^m(\Gamma; \mathbb{R})$$

является перспективным направлением (см. [FFPS19]).

Литература I

Jason DeBlois and Richard P. Kent, IV.
Surface groups are frequently faithful.
Duke Mathematical Journal, 169(1):1–47, 2020.
Preprint available arXiv:1811.05529 (2018).

Federico Franceschini, Roberto Frigerio, Maria Beatrice Pozzetti, and Alessandro Sisto.
The zeronorm subspace of bounded cohomology of acylindrically hyperbolic groups.
Commentarii Mathematici Helvetici, 94(1):89–139, 2019.

William M. Goldman.
Topological components of spaces of representations.
Inventiones mathematicae, 93(3):557–607, 1988.

Литература II

John Milnor.
On the existence of a connection with curvature zero.
Commentarii Mathematici Helvetici, 32:215–223, 1958.

John W. Wood.
Bundles with totally disconnected structure group.
Commentarii Mathematici Helvetici, 46:257–273, 1971.

А. В. Малютин.
Закрученность (замкнутых) кос.
Алгебра и анализ, 16(5):156–182, 2004.
English translation: St. Petersburg Mathematical Journal, 2005, vol. 16, no. 5, pp. 863–882.

Литература III

А. В. Малютин.

Операторы пространств псевдохарактеров групп кос.

Алгебра и анализ, 21(2):136–165, 2009.

English translation: St. Petersburg Mathematical Journal, 2010, vol. 21, no. 2, pp. 287–308.

И. А. Дынников and В. А. Шастин.

О независимости некоторых псевдохарактеров на группах кос.

Алгебра и анализ, 24(6):21–41, 2012.

English translation: St. Petersburg Mathematical Journal, 2013, vol. 24, no. 6, pp. 863–876.

Благодарю!

Спасибо за внимание!

Бирюкова Ульяна

фМКН СПбГУ