

Лекция 1: Комплексные кобордизмы и универсальная формальная группа

В.М. Бухштабер

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
Математический центр мирового уровня МИАН
НИУ ВШЭ, факультет математики

Летняя школа по топологии – 2026
“Торическая топология, гиперболическая геометрия
и комбинаторная теория групп”
Международный математический центр “Сириус”
17–21 мая 2026 г.

Два компактных многообразия без границы считаются кобордантными, если их несвязное объединение является границей некоторого многообразия. Это фундаментальное понятие эквивалентности многообразий содержится уже в работе Н. Пуанкаре, 1895 г.

Классы кобордизмов нашли первые приложения в работах Л. С. Понтрягина (конец 1930-х – начало 1950-х годов), в которых задача гомотопической классификации отображений $(k + n)$ -мерной сферы в n -мерную сферу была сведена к дифференциально-геометрическим задачам теории гладких многообразий.

В создании теории бордизмов и кобордизмов ключевую роль сыграли работы Р.Тома (R.Thom) начала 1950-х годов, посвященные проблеме Н.Стинрода (N.Steenrod) о реализации циклов пространства X .

Р. Том заменил в конструкции Понтрягина отображения в сферы на отображения в пространства Тома, определенные для любого конечномерного векторного расслоения.

В основе приложений конструкции Понтрягина–Тома лежит теория трансверсально регулярных отображений гладких многообразий.

В 1961 году М.Атиyah ввёл теории бордизмов и кобордизмов в терминах спектров пространств Тома.

Циклы в пространстве

Понятие **цикла** в пространстве X как образа отображения $f: M \rightarrow X$ гладкого замкнутого многообразия содержится в работе А. Пуанкаре (1895).

Цикл считается **гомологичным нулю**, если отображение f продолжается до отображения $W \rightarrow X$, где W – гладкое многообразие с границей $\partial W = M$.

Проблема (N.Steenrod, конец 1940-х)

Пусть X – топологическое пространство и $z \in H_n(X; \mathbb{Z})$ – класс гомологий.

Существуют ли замкнутое гладкое ориентированное многообразие M^n и непрерывное отображение $f: M^n \rightarrow X$, такие, что $f_*[M^n] = z$?

Если ответ положителен, то класс z называется **реализуемым**.

Теория комплексных кобордизмов $U^*(\cdot)$ использует **стабильно комплексные многообразия** (U -многообразия), т.е. гладкие многообразия, допускающие вложения $M^n \subset \mathbb{R}^N$, $n \ll N$, с **комплексным нормальным** расслоением.

Два замкнутых гладких вещественных ориентированных n -мерных U -многообразия M_1 и M_2 называются U -кобордантными, если существует вещественное $(n + 1)$ -мерное U -многообразие W такое, что граница ∂W является несвязным объединением многообразия M_1 с заданной ориентацией и многообразия M_2 с противоположной ориентацией, и такое, что ограничение стабильного комплексного нормального расслоения νW на M_i совпадает со стабильными комплексными нормальными расслоениями νM_i , где $i = 1, 2$.

Кольцо кобордизмов U -многообразий

На классах U -кобордизма U -многообразий определены операции:

Сумма классов $[M_1^m]$ и $[M_2^m]$ двух замкнутых U -многообразий M_1^m и M_2^m определяется как класс несвязного объединения этих многообразий

$$[M_1^m] + [M_2^m] = [M_1^m \cup M_2^m].$$

Произведение классов $[M_1^m]$ и $[M_2^n]$ определяется как класс прямого произведения этих многообразий

$$[M_1^m][M_2^n] = [M_1^m \times M_2^n].$$

Для любого U -многообразия M на многообразии $W = M \times [0, 1]$ определена соответствующая U -структура, такая, что $\partial W = M \cup \bar{M}$, т.е. $-[M] = [\bar{M}]$.

Таким образом, вводится коммутативное градуированное кольцо $\Omega_U = \sum_{m \geq 0} \Omega_U^{-m}$, где Ω_U^{-m} – группа классов кобордизмов m -мерных U -многообразий.

Теорема (J. Milnor, С.П.Новиков, 1960)

$$\Omega_U = U^*(pt) = \mathbb{Z}[a_1, \dots, a_n, \dots], \deg a_n = -2n.$$

Теорема (С.П.Новиков, 1960)

Целочисленный класс гомологий Z_{n-i} компактного гладкого замкнутого ориентируемого многообразия M^n реализуется подмногообразием $W^{n-i} \subset M^n$, если $i > [n/2] + 1$ и при $k < n - i - 2(p - 1)$ группы $H_k(M^n)$ не имеют p -кручения для всех $p > 2$.

Целочисленный класс гомологий Z_{n-2i} многообразия M^n допускает U -реализацию, если $2i > [n/2] + 1$ и при $k < n - 2i - 2(p - 1)$ группы $H_k(M^n)$ не имеют p -кручения для всех $p \geq 2$.

Спектр Тома MU

Теория комплексных кобордизмов $U^*(\cdot)$ задаётся спектром Тома

$$MU = \{T_n; \varepsilon_n : \Sigma T_n \rightarrow T_{n+1}, n \geq 0\}, \text{ т.е. } U^k(X) = \varinjlim_n [\Sigma^n X, T_{n+k}],$$

где $T_{2n} = T\xi_n = MU(n)$ – пространство Тома универсального n -мерного комплексного расслоения

$$\xi_n \rightarrow BU(n) = \varinjlim_N \mathbb{C}G_{N,n},$$

$\mathbb{C}G_{N,n}$ – многообразие Грассмана комплексных n -подпространств в \mathbb{C}^N .

По определению, $T_{2n+1} = \Sigma T_{2n}$ и ε_{2n} – тождественное отображение, а $\varepsilon_{2n+1} : \Sigma^2 T_{2n} \rightarrow T_{2(n+1)}$ соответствует отображению

$$\Sigma^2 MU(n) = T(\xi_n \oplus 1) \rightarrow T(\xi_{n+1}) = MU(n+1),$$

где 1 – одномерное комплексное тривиальное расслоение.

Отметим, что $BU(0) = pt$, $\xi_0 = pt$, $T_0 = MU(0) = S^0$ – нульмерная сфера, $T_2 = MU(1) = \mathbb{C}P^\infty$ и $\varepsilon_2 : S^2 \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ – стандартное вложение.

В докладе на Международном Математическом Конгрессе (Москва, 1966) С.П.Новиков выдвинул программу приложений теории комплексных кобордизмов к актуальным проблемам алгебраической топологии.

Подробное изложение этой программы см. Изв. АН СССР, сер. мат., 1967.

В предисловии к этой статье говорится:

“В процессе работы автору пришлось столкнуться с целым рядом новых и весьма заманчивых алгебраических и топологических ситуаций, аналоги которых в классическом случае либо полностью отсутствуют, либо сильно вырождаются; многие из них пока глубоко не рассмотрены.”

Результаты С. П. Новикова и его школы по этой программе собраны в томе “Кобордизмы в Советском Союзе”, 1967–1979, М., Ижевск, 2011, 584 стр.

Умножение в теории комплексных кобордизмов

Теория комплексных кобордизмов $U^*(\cdot)$ является мультипликативной. Умножение задается отображением спектров Тома $MU \wedge MU \rightarrow MU$ при помощи отображений пространств Тома

$$MU(n_1) \wedge MU(n_2) \rightarrow MU(n_1 + n_2),$$

соответствующих отображениям $BU(n_1) \times BU(n_2) \rightarrow BU(n_1 + n_2)$, классифицирующим расслоения $\xi_{n_1} \times \xi_{n_2} \rightarrow BU(n_1) \times BU(n_2)$.

В статье: Б.И. Ботвинник, В.М. Бухштабер, С.П. Новиков, С.А. Юзвинский, “Алгебраические аспекты теории умножений в комплексных кобордизмах” (УМН, 55:4(334), 2000, 5–24) поставлена общая задача классификации всех умножений в теории комплексных кобордизмов, которые являются стабильными и ассоциативными относительно стандартного сложения.

Показано, что эта задача сводится к теории алгебры Хопфа S (алгебры Ландвебера–Новикова), действующей в двойственной алгебре Хопфа S^* с выделенным вложением $\Omega_U \subset S^*$, которое задается действием алгебры S на Ω_U .

Пусть $h^*(\cdot)$ – некоторая мультипликативная теория когомологий и $\Omega_h = \sum \Omega_h^i$ – кольцо скаляров $h^*(pt)$, где Ω_h – кольцо с единицей $1 \in \Omega_h^0$.

Рассмотрим векторное n -мерное расслоение $\zeta \rightarrow X$ над связным клеточным комплексом X . Вложение слоя $i_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \zeta$ над точкой $x \in X$ задаёт отображение пространств Тома $T_{i_x} : S^n = T\mathbb{R}^n \rightarrow T\zeta$.

Расслоение ζ называется **ориентируемым в теории $h^*(\cdot)$ (h -ориентируемым)**, если гомоморфизм $(T_{i_x})^* : \tilde{h}^n(T\zeta) \rightarrow \tilde{h}^n(S^n)$ является эпиморфизмом.

Элемент $a \in \tilde{h}^n(T\zeta)$ такой, что $(T_{i_x})^* a = \Sigma^n \cdot 1$, называется **ориентацией** расслоения ζ в теории $h^*(\cdot)$, где $\Sigma^n : \Omega_h^0 \rightarrow \tilde{h}^n(S^n)$ – изоморфизм надстройки.

Этот элемент a называется также **классом Тома** расслоения ζ в теории $h^*(\cdot)$ и обозначается $u_h(\zeta)$.

Задача (изоморфизм Тома)

Доказать, что гомоморфизм $t_{u_h} : h^*(X) \rightarrow \tilde{h}^*(T\zeta) : t_{u_h}(x) = u_h(\zeta)x$ определен и является изоморфизмом.

\mathbb{C} -ориентируемые теории

Мультипликативная теория кохомологий $h^*(\cdot)$ называется \mathbb{C} -ориентируемой, если универсальное комплексное линейное расслоение $\xi \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ является ориентируемым в теории $h^*(\cdot)$.

Используя гомотопическую эквивалентность $\mathbb{C}P^\infty \cong T\xi$, можно дать следующее определение:

\mathbb{C} -ориентированной теорией называется пара $(h^*(\cdot), u_h)$, где $h^*(\cdot)$ – некоторая \mathbb{C} -ориентируемая теория и $u_h \in \tilde{h}^2(\mathbb{C}P^\infty)$ – фиксированная ориентация.

Задача

Пусть $h^*(\cdot)$ – \mathbb{C} -ориентированная теория $(h^*(\cdot), u_h)$. Доказать, что

$$h^*(\mathbb{C}P^\infty) = \varprojlim_n h^*(\mathbb{C}P^n) = \Omega_h[[u_h]].$$

Универсальный мультипликативный U^* -класс Тома

Каждое комплексное n -мерное расслоение $\zeta \rightarrow X$ над клеточным комплексом классифицируется отображением $f_\zeta : X \rightarrow BU(n)$, которое задаёт отображение пространств Тома $Tf_\zeta : T\zeta \rightarrow MU(n)$ и, следовательно, класс кобордизмов $u(\zeta) \in U^{2n}(T\zeta)$.

Класс $u(\zeta)$ является **функториальной** U^* -ориентацией расслоения ζ и называется его **канонической** U^* -ориентацией.

Нулевое сечение расслоения ζ задаёт вложение $s : X \rightarrow T\zeta$.

Характеристический класс $s^*u(\zeta) \in U^{2n}(X)$ называется **U^* -классом Эйлера**.

Пусть $\zeta = \zeta_1 \times \zeta_2 \rightarrow X \times Y$.

Задачи

1. Построить гомеоморфизм $T\zeta \simeq T\zeta_1 \wedge T\zeta_2$.
2. Доказать, что каноническая U^* -ориентация $u(\zeta)$ является мультипликативной, т.е. что $u(\zeta) = u(\zeta_1) \otimes u(\zeta_2)$.

В теории $U^*(\cdot)$ канонической считается \mathbb{C} -ориентация, задаваемая универсальной U^* -ориентацией универсального расслоения $\xi \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$.

Характеристические классы Черна

В любой \mathbb{C} -ориентированной теории $(h^*(\cdot), u_h)$ существуют характеристические классы Черна $cf_k^h(\zeta)$, $k = 0, \dots$, комплексных векторных расслоений ζ . Эти классы однозначно определяются условиями: $cf_1^h(\xi) = u_h$, $cf_k^h(\zeta) = 0$, если $k > \dim_{\mathbb{C}} \zeta$,

$$cf_k^h(\zeta_1 + \zeta_2) = \sum_{k_1+k_2=k} cf_{k_1}^h(\zeta_1) cf_{k_2}^h(\zeta_2).$$

\mathbb{C} -ориентируемые теории: классические когомологии $H^*(\cdot, \mathbb{Z})$, комплексная K -теория $K^*(\cdot)$, теория комплексных кобордизмов $U^*(\cdot)$, теория удвоенных комплексных кобордизмов $DU^*(\cdot)$.

Каноническая \mathbb{C} -ориентация теории $U^*(\cdot)$ задает канонические классы Черна в U^* -теории.

Задача.

Доказать, что для любой \mathbb{C} -ориентированной теории $(h^*(\cdot), u_h)$ существует единственное мультипликативное преобразование

$$\mu_h : U^*(\cdot) \rightarrow h^*(\cdot),$$

такое, что $\mu_h u = u_h$.

Таким образом, теория $(U^*(\cdot), u)$ является универсальной \mathbb{C} -ориентированной теорией когомологий.

Для любой \mathbb{C} -ориентированной теории $(h^*(\cdot), u_h)$ множество всех мультипликативных преобразований $U^*(\cdot) \rightarrow h^*(\cdot)$ можно отождествить с множеством всех формальных рядов $\varphi(u_h) \in \Omega_h[[u_h]]$ вида $\varphi(u_h) = u_h + (u_h^2)$, и следовательно, с множеством всех \mathbb{C} -ориентаций расслоения $\xi \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ в теории $(h^*(\cdot), u_h)$.

Каждое мультипликативное преобразование $\mu_h : U^*(\cdot) \rightarrow h^*(\cdot) : \mu_h(u) = u_h$ задает кольцевой гомоморфизм $\mu : \Omega_U \rightarrow \Omega_h$.

Обратное утверждение верно лишь отчасти, так как каждый кольцевой гомоморфизм $\mu : \Omega_U \rightarrow \Omega_h$ задает мультипликативное преобразование $\mu_h : U^*(\cdot) \rightarrow h^*(\cdot) \otimes_{\mu} \Lambda = h_{\Lambda}^*(\cdot)$ для некоторого кольца Λ , которое в общем случае отлично от кольца \mathbb{Z} .

Задачи:

1. Классифицировать кольцевые гомоморфизмы $\Omega_U \rightarrow \Omega_h$, которые индуцированы мультипликативными преобразованиями μ_h .
2. Для данного кольцевого гомоморфизма $\mu : \Omega_U \rightarrow \Omega_U$ найти минимальное кольцо Λ такое, что кольцевой гомоморфизм $\Omega_U \rightarrow \Omega_U \otimes_{\mu} \Lambda$ поднимается до мультипликативного преобразования $U^*(\cdot) \rightarrow U_{\Lambda}^*(\cdot)$.

Формальные группы

Пусть A – коммутативное кольцо с единицей.

Коммутативная одномерная формальная группа F над коммутативным кольцом A задается формальным рядом $F(x, y) \in A[[x, y]]$, таким, что

$$F(x, 0) = 0; \quad F(F(x, y), z) = F(x, F(y, z)); \quad F(x, y) = F(y, x).$$

Гомоморфизмом $\psi : F_1 \rightarrow F_2$ формальных групп над A называется формальный ряд $\psi(x) \in A[[x, y]]$, такой, что

$$\psi(0) = 0; \quad \psi(F_1(x, y)) = F_2(\psi(x), \psi(y)).$$

Пусть ряд $F(x, y) = x + y + \sum a_{ij}x^i y^j$ задает формальную группу над A_1 .

Тогда гомоморфизм колец $f : A_1 \rightarrow A_2$ определяет формальную группу над A_2 , задаваемую рядом $f_*(F(x, y)) = x + y + \sum f(a_{ij})x^i y^j$.

Универсальная формальная группа

Пусть

$$\mathcal{F}(x, y) \in \mathcal{A}[[x, y]]$$

— коммутативная одномерная формальная группа над коммутативным кольцом \mathcal{A} .

Она называется универсальной, если для любой коммутативной одномерной формальной группы

$$F(x, y) \in A[[x, y]]$$

над коммутативным кольцом A существует единственный гомоморфизм колец

$$\varphi_F: \mathcal{A} \longrightarrow A$$

такой, что

$$\mathcal{F}(x, y) = \varphi_F(\mathcal{F})(x, y).$$

Теорема Лазара

Задача. Построить универсальную коммутативную одномерную формальную группу $\mathcal{F}(x, y)$.

Теорема (M. Lazard, 1954)

Кольцо коэффициентов универсальной коммутативной одномерной формальной группы изоморфно кольцу многочленов

$$\mathcal{A} \cong \mathbb{Z}[\alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots].$$

Формальная группа геометрических кобордизмов

Теорема (С.П. Новиков, А.С. Мищенко, 1967)

Формальный ряд $F_U(u, v) \in U^2(\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty) \subset \Omega[[u, v]]$

$$F_U(u, v) = c_1^U(\xi_1 \otimes_{\mathbb{C}} \xi_2) = u + v + \sum_{i,j} a_{i,j} u^i v^j, \quad a_{i,j} \in \Omega_U^{-2(i+j-1)},$$

где $u = c_1^U(\xi_1)$, $v = c_1^U(\xi_2)$, задает формальную группу над Ω_U .

$F_U(u, v)$ называется формальной группой **геометрических** кобордизмов.

Теорема (А.С. Мищенко, 1967)

Логарифм группы $F_U(u, v)$ задается рядом

$$g(u) = u + \sum_{n=1}^{\infty} [\mathbb{C}P^n] \frac{u^{n+1}}{n+1}, \quad \text{т.е. } g(F_U(u, v)) = g(u) + g(v).$$

$$\mathbb{C}P(u) \cdot \left. \frac{\partial}{\partial v} F(u, v) \right|_{v=0} = 1, \quad \text{где } \mathbb{C}P(u) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} [\mathbb{C}P^n] u^n.$$

Теорема (D. Quillen, 1969)

Гомоморфизм колец

$$\varphi_{\Omega_U} : \mathcal{A} \longrightarrow \Omega_U,$$

классифицирующий формальную группу геометрических кобордизмов, является изоморфизмом.

Иными словами, формальная группа геометрических кобордизмов является универсальной коммутативной одномерной формальной группой.

Характер Черна–Дольда в комплексных кобордизмах

В 1970 г. В.М. Бухштабер ввел **характер Черна–Дольда в комплексных кобордизмах** (в честь S-S. Chern и A. Dold) как мультипликативное преобразование теорий когомологий $ch_U: U^*(X) \rightarrow H^*(X, \Omega_U \otimes \mathbb{Q})$ со свойствами:

- однозначно определяется тем, что при $X = pt$ представляет собой каноническое вложение $\Omega_U \otimes 1 \rightarrow \Omega_U \otimes \mathbb{Q}$;
- задаёт изоморфизм $U^*(X) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow H^*(X, \Omega_U \otimes \mathbb{Q})$;
- является вложением для любого X , такого, что группа $H^*(X, \mathbb{Z})$ не имеет кручения;
- коммутирует с действием алгебры когомологических операций $\mathcal{A}_U = \Omega_U S$ в теории комплексных кобордизмов на $U^*(X)$ и на $\Omega_U \otimes \mathbb{Q}$;
- разлагается в композицию

$$U^*(X) \xrightarrow{\widehat{ch}_U} H^*(X, B) \xrightarrow{\xi} H^*(X, \Omega_U \otimes \mathbb{Q}),$$

где $B = \mathbb{Z}[b_2, \dots, b_{2n}, \dots]$ – алгебра Хопфа, двойственная над \mathbb{Z} алгебре Ландвебера–Новикова S , и $\xi: B \rightarrow \Omega_U \otimes \mathbb{Q}$ – вложение.

Теорема (Бухштабер, 1970)

Преобразование ch_U однозначно определяется формулой

$$ch_U(u) = \beta(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} [\mathcal{B}^{2n}] \frac{z^{n+1}}{(n+1)!},$$

где $u = c_1^U(\xi)$ и $z = c_1^H(\xi)$ – **первые классы Черна** универсального одномерного комплексного расслоения $\xi \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ и $[\mathcal{B}^{2n}] \in \Omega_U^{-2n}$ – класс кобордизмов U -многообразия \mathcal{B}^{2n} с родом $2n$. Тогда $Td(\mathcal{B}^{2n}) = (-1)^n$.

Теорема (В.М. Бухштабер, 1970)

Ряд $F_U(u, v)$ задается формулой

$$F_U(u, v) = \frac{u + v + \sum_{i,j} [H_{i,j}] u^i v^j}{\mathbb{C}P(u)\mathbb{C}P(v)}, \quad i \geq 0, j \geq 0, i + j \geq 2,$$

где $\mathbb{C}P(u) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} [\mathbb{C}P^n] u^n$ и $H_{i,j} \subset \mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j$ – гладкие неприводимые алгебраические гиперповерхности Милнора $H_{i,j} = \{ \sum_{k \geq 0} z_k w_k = 0 \}$.

Следствие

Коэффициенты $a_{i,j}$ ряда $F_U(u, v)$ порождают кольцо Ω_U .

Теорема (В.М. Бухштабер, 1970)

Экспонента группы $F_U(u, v)$ задается рядом

$$\beta(z) = ch_U(u), \quad \text{т.е. } F_U(\beta(z_1), \beta(z_2)) = \beta(z_1 + z_2).$$

Роды Хирцебруха

Далее A – коммутативное кольцо без кручения, то есть гомоморфизм

$$A \longrightarrow A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} : a \rightarrow a \otimes 1$$

является вложением.

В задачах алгебраической топологии, алгебраической геометрии и математической физики возникают мультипликативные инварианты классов кобордизмов стабильно комплексных многообразий.

Эти инварианты задают гомоморфизмы колец

$$L: \Omega_U \longrightarrow A,$$

которые называются **родами Хирцебруха** (в честь F. Hirzebruch).

Следствие

Множество родов Хирцебруха

$$L: \Omega_U \longrightarrow A$$

можно отождествить с множеством коммутативных одномерных формальных групп над кольцом A .

Действительно, по теореме Квиллена кольцо Ω_U является кольцом коэффициентов универсальной коммутативной одномерной формальной группы.

Задача.

Доказать, что два рода Хирцебруха $L_k: \Omega_U \longrightarrow A$, $k = 1, 2$, совпадают тогда и только тогда, когда $L_1([\mathbb{C}P^n]) = L_2([\mathbb{C}P^n])$, $n = 1, 2, \dots$

Род Хирцебруха

$$T: \Omega_U \longrightarrow \mathbb{Z}[a], \quad \deg a = -2,$$

такой, что

$$T([\mathbb{C}P^n]) = a^n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

называется **родом Тодда** (в честь John Arthur Todd).

Ему соответствует формальная группа

$$F^T(u, v) = u + v - auv.$$

Логарифм этой формальной группы имеет вид

$$g^T(u) = -\frac{1}{a} \ln(1 - au), \quad \frac{d}{du} g^T(u) = \frac{1}{1 - au}.$$

Следствие

Имеет место формула

$$u + v + \sum_{i,j \geq 1} T([H_{i,j}])u^i v^j = \frac{u + v - auv}{(1 - au)(1 - av)}.$$

Здесь $H_{i,j}$ — гиперповерхность Милнора.

Род Хирцебруха

$$\tau: \Omega_U \longrightarrow \mathbb{Z}[b], \quad \deg b = -4,$$

такой, что

$$\tau([\mathbb{C}P^{2n}]) = b^n, \quad \tau([\mathbb{C}P^{2n-1}]) = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

называется **сигнатурой**.

Ему соответствует формальная группа

$$F^\tau(u, v) = \frac{u + v}{1 + buv}, \quad \frac{d}{du}g^\tau(u) = \frac{1}{1 - bu^2}.$$

Следствие

Имеет место формула

$$u + v + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i+j=2n+1} \tau([H_{i,j}]) u^i v^j = \frac{u + v}{(1 + buv)(1 - bu^2)(1 - bv^2)}.$$

Здесь $H_{i,j}$ — гиперповерхность Милнора.

Кобордизмы комплексных алгебраических многообразий

Проблема (J.Milnor–F.Hirzebruch, 1958)

Когда в классе кобордизмов $[M^{2n}] \in \Omega_U^{-2n}$ содержится **неприводимое** гладкое алгебраическое многообразие?

Для $n = 1$ решение этой проблемы является классическим:

Класс кобордизмов $[M^2] \in \Omega_U^{-2}$ содержит неприводимое гладкое алгебраическое многообразие тогда и только тогда, когда $c_1([M^2]) = 2 - 2g$, $g = 0, 1, \dots$

Для $n > 1$ этот вопрос до сих пор остается открытым.

Теорема (J.Milnor, 1960)

Каждый класс $[M^{2n}] \in \Omega_U^{-2n}$ содержит неособое комплексное алгебраическое многообразие (**необязательно связное**).

Тета-дивизоры

Пусть $A^{n+1} = \mathbb{C}^{n+1}/\Gamma$ – главно-поляризованное абелево многообразие (сокращенно, *прав*). Соответствующее линейное расслоение L над A^{n+1} имеет одномерное пространство голоморфных сечений, порожденное классической θ -функцией Римана

$$\theta(z, \tau) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^{n+1}} \exp[\pi i(m, \tau m) + 2\pi i(m, z)], \quad z \in \mathbb{C}^{n+1}, \quad \tau^t = \tau, \quad \text{Im } \tau > 0.$$

Теорема (Andreotti–Mayer, 1967)

Для общего *прав* тета-дивизор $\Theta^n \subset A^{n+1}$, заданный формулой $\theta(z, \tau) = 0$, является **неприводимым гладким алгебраическим** многообразием общего типа.

В частности:

- $\Theta^1 \cong \mathcal{C} \subset A^2 = J(\mathcal{C})$ для гладкой кривой \mathcal{C} рода 2;
- $\Theta^2 \cong S^2(\mathcal{C}) \subset A^3 = J(\mathcal{C})$ для гладкой негиперэллиптической кривой \mathcal{C} рода 3. Для $n \geq 3$ общее *прав* не является якобианом $J(\mathcal{C})$.

Коэффициенты ряда $ch_U(u)$

Теорема (В.М. Бухштабер, А.П. Веселов, 2020)

Коэффициент $[B^{2n}]$ экспоненты $\beta(z) = ch_U(u)$ формальной группы $F_U(u, v)$ содержит неприводимое гладкое алгебраическое многообразие Θ^n (тэта-дивизор главнополяризованного абелева многообразия).

Следствие (В.М. Бухштабер, А.П. Веселов, 2020)

Класс кобордизмов любого U -многообразия задается формулой

$$[M^{2n}] = \sum_{\lambda: |\lambda|=n} c_\lambda^\nu(M^{2n}) \frac{[\Theta^\lambda]}{(\lambda+1)!}, \quad \lambda = (\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_k), \quad |\lambda| = \lambda_1 + \dots + \lambda_k,$$

где $c_\lambda^\nu(M^{2n})$ – числа Черна комплексного нормального расслоения U -многообразия M^{2n} , $\Theta^\lambda = \Theta^{\lambda_1} \dots \Theta^{\lambda_k}$, $(\lambda+1)! = (\lambda_1+1)! \dots (\lambda_k+1)!$.

Следствие

Пусть $L : \Omega_U \rightarrow \mathbb{Z}$ – некоторый род Хирцебруха. Тогда

$$L([M^{2n}]) = \sum_{\lambda: |\lambda|=n} c_\lambda^\nu(M^{2n}) \frac{L([\Theta^\lambda])}{(\lambda+1)!} \in \mathbb{Z}.$$

Теория комплексных кобордизмов с коэффициентами

Пусть Λ – некоторое коммутативное кольцо с единицей, без элементов конечного порядка и без делителей нуля.

Тогда для каждой мультипликативной теории когомологий $h^*(\cdot)$ с кольцом скаляров Ω_h определена мультипликативная теория когомологий $h_\Lambda^*(\cdot) = h^*(\cdot) \otimes \Lambda$ над кольцом скаляров $\Omega_{h,\Lambda} = \Omega_h \otimes \Lambda$.
В случае $U^*(\cdot)$ положим $\Omega_{U,\Lambda} = \Omega_\Lambda$.

Каждое мультипликативное преобразование $\mu : U_\Lambda^*(\cdot) \rightarrow U_\Lambda^*(\cdot)$ задается своим значением $\mu(u)$ на канонической ориентации $u \in U_\Lambda^2(\mathbb{C}P^\infty)$ универсального одномерного расслоения $\xi \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$.

Проекторы в теории комплексных кобордизмов

Пусть $\mu : U_{\Lambda}^*(\cdot) \rightarrow U_{\Lambda}^*(\cdot)$ – мультипликативная операция. Тогда:

1. $\mu(u) = u + \sum_{k \geq 1} \varphi_k u^{k+1}$, $\varphi_k \in \Omega_{\Lambda}$;
2. $\mu(\mu(u)) = \mu(u) + \sum_{k \geq 1} \mu(\varphi_k)(\mu(u))^{k+1}$.

Операция $\mu(u)$ является проектором (т.е. $\mu\mu = \mu$) тогда и только тогда, когда ряд $\mu(u) = u + \sum_{k \geq 1} \varphi_k u^{k+1}$ такой, что $\mu(\varphi_k) = 0$, $k \geq 1$.

Образом каждого мультипликативного проектора является мультипликативная теория когомологий $h^*(\cdot)$ с кольцом скаляров $\Omega_h = \text{Im}(\mu : \Omega_{\Lambda} \rightarrow \Omega_{\Lambda})$.

Операторы С.П. Новикова

Пусть $y \in \Omega_U^{-2n}$, $n > 0$. **Оператором деления** на y (Δ_y -оператором Новикова) называется такая когомологическая операция $\Delta_y : U_\Lambda^*(\cdot) \rightarrow U_\Lambda^*(\cdot)$, что $\Delta_y y = 1$ и $\Delta_y ab = (\Delta_y a)b + a(\Delta_y b) - y(\Delta_y a)(\Delta_y b)$ для любых $a, b \in U_\Lambda^*(X)$.

Задачи

1. Доказать, что если оператор Δ_y существует для данного $y \in \Omega_U^{-2n}$, то y является **мультипликативно неразложимым** в кольце Ω_U .
2. Пусть $y \in \Omega_U^{-2n}$ и $s_n(y) = d \neq 0$, где $s_n \in S$ – операция Ландвебера–Новикова, соответствующая полиному Ньютона $\sum t_i^n$. Доказать, что оператор Δ_y существует и задает мультипликативное преобразование $\mu_y = 1 - y\Delta_y : U_\Lambda^*(\cdot) \rightarrow U_\Lambda^*(\cdot)$, где $\Lambda = Z[d^{-1}]$.
3. Доказать, что множество операторов Δ_y можно отождествить с множеством всех мультипликативных операций $\mu : U_\Lambda^*(\cdot) \rightarrow U_\Lambda^*(\cdot)$ таких, что $\mu u = \varphi_y(u) = u + yu^n (d^{-1}u + (u^2))$.
4. В условиях задачи 3, доказать, что каждый проектор μ выделяет в теории $U_\Lambda^*(\cdot)$ теорию когомологий $U_y^*(\cdot)$ с кольцом скаляров $\Omega_{U,y} = \Lambda[a_1, \dots, a_{n-1}, a_{n+1}, \dots]$.

Пусть $\Lambda = \mathbb{Z}_p$ – кольцо целых p -адических чисел, где p – простое число.

Используя классическую теорию препятствий в гомотопической топологии, Браун (E. Brown) и Петерсон (F. Peterson) в 1966 г. доказали, что спектр $MU\mathbb{Z}_p$ расщепляется в прямую сумму сдвигов некоторого спектра, получившего название **спектра Брауна–Петерсона** и обозначение BP_p .

Вскоре после этого С.П.Новиков получил этот результат при помощи введенных им операторов деления на скаляры.

Для вычисления $\text{mod } p$ -стабильных гомотопических групп методом спектральной последовательности Адамса–Новикова, он ввел и исследовал алгебру кохомологических операций \mathcal{A}_{BP} в теории $BP^*(\cdot)$.

Рациональные кохомологии

Формальные группы $F_1(x, y)$ и $F_2(x, y)$ над некоторым коммутативным кольцом A называются сильно изоморфными над A , если существует ряд $\varphi(x) = x + (x^2) \in A[[x]]$ такой, что

$$\varphi(F_1(x, y)) = F_2(\varphi(x), \varphi(y)).$$

Задача

Доказать, что для любой формальной группы $F_1(x, y) \in A[[x, y]]$ существует логарифм $g(x)$, который задает ее сильный изоморфизм над $A \otimes \mathbb{Q}$ с аддитивной группой $F_2(x, y) = x + y$.

Следствие

Мультипликативная операция $\varphi : U^*(\cdot) \rightarrow U^*(\cdot) \otimes \mathbb{Q} : \varphi(u) = g(u)$, где $g(u)$ – ряд А.С. Мищенко, задает проектор $U^*(\cdot) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow U^*(\cdot) \otimes \mathbb{Q}$, образом которого является классическая теория кохомологий $H^*(\cdot; \mathbb{Q})$.

Проекторы Квиллена

Квиллен применил теорему Картье (P. Cartier) о том, что над кольцом $\mathcal{A} \otimes \mathbb{Z}_p$ универсальная формальная группа $\mathcal{F}(x, y)$ **сильно изоморфна** группе $\mathcal{F}_p(x, y)$ с логарифмом

$$g_p(u) = u + \sum_{q \geq 1} [\mathbb{C}P^{p^q-1}] \frac{u^{p^q}}{p^q}.$$

Из этого следует, что кольцевой гомоморфизм

$$\pi_p : \mathbb{Z}[[\mathbb{C}P^n], n \geq 1] \rightarrow \mathbb{Z}[[\mathbb{C}P^n], n \geq 1]$$

такой, что $\pi_p([\mathbb{C}P^{p^q-1}]) = [\mathbb{C}P^{p^q-1}]$ и $\pi_p([\mathbb{C}P^n]) = 0$, $n \neq p^q - 1$, однозначно продолжается до проектора

$$\widehat{\pi}_p : \Omega_U \otimes \mathbb{Z}_p \rightarrow \Omega_U \otimes \mathbb{Z}_p, \quad \widehat{\pi}_p \widehat{\pi}_p = \widehat{\pi}_p.$$

Ряд $u_{BP} = u_{BP}(u)$, задающий сильный изоморфизм группы $\mathcal{F}(x, y)$ с группой $\mathcal{F}_p(x, y)$, определяет проектор

$$\pi_p : U^*(\cdot) \otimes \mathbb{Z}_p \rightarrow U^*(\cdot) \otimes \mathbb{Z}_p,$$

выделяющий в $U^*(\cdot) \otimes \mathbb{Z}_p$ теорию когомологий Брауна-Петерсона $BP^*(\cdot)$.

Формальные группы в \mathbb{C} -ориентированной теории

Рассмотрим некоторую \mathbb{C} -ориентированную теорию когомологий $(h^*(\cdot), u_h)$.

Существует мультипликативное преобразование $\mu_h: U^*(\cdot) \rightarrow h^*(\cdot)$, переводящее формальную группу геометрических кобордизмов

$F_U(u, v) = u + v + \sum a_{ij}u^i v^j$ в формальную группу над кольцом Ω_h

$$F_h(x, y) = x + y + \sum \alpha_{ij}x^i y^j,$$

где $x = \mu_h u$, $y = \mu_h v$, $\alpha_{ij} = \mu_h(a_{ij})$.

Задача

Доказать, что формальная группа $F(x, y)$ над Ω_h сильно изоморфна формальной группе $F_h(x, y)$ тогда и только тогда, когда кольцевой гомоморфизм $\varphi: \Omega_U \rightarrow \Omega_h$, классифицирующий формальную группу $F(x, y)$, продолжается до мультипликативного преобразования $\mu_h(F): U^*(\cdot) \rightarrow h^*(\cdot)$.

Пусть Λ – коммутативное кольцо с единицей, без элементов конечного порядка и без делителей нуля.

1. Рассмотрим классические когомологии $(H^*(\cdot; \Lambda), u_H)$.

Тогда $F_H(x, y) = x + y$, и мы получаем, что множество всех мультипликативных преобразований $\mu: U^*(\cdot) \rightarrow H^*(\cdot; \Lambda)$ можно отождествить с множеством всех формальных групп над Λ , сильно изоморфных группе $x + y$.

2. Рассмотрим комплексную K -теорию $(K_\Lambda^*(\cdot), u_K)$.

Тогда $F_K(x, y) = x + y - \beta xy$, и мы получаем, что множество всех мультипликативных преобразований $\mu: U^*(\cdot) \rightarrow K_\Lambda^*(\cdot)$ можно отождествить с множеством всех формальных групп над Λ , сильно изоморфных группе $x + y - \beta xy$.

3. Множество всех мультипликативных преобразований $\mu: U^*(\cdot) \rightarrow U_\Lambda^*(\cdot)$ можно отождествить с множеством всех формальных групп над $\Omega_U \otimes \Lambda$, сильно изоморфных универсальной формальной группе.

Рассмотрим ряд $g(u) = u + \sum [\mathbb{C}P^n] \frac{u^{n+1}}{n+1}$ и кольцевой гомоморфизм $\mu: \Omega_U \rightarrow \Lambda$. Положим

$$g_\mu(x) = x + \sum \mu([\mathbb{C}P^n]) \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

1. Кольцевой гомоморфизм $\mu: \Omega_U \rightarrow \Lambda$ продолжается до мультипликативного преобразования $\mu: U^*(\cdot) \rightarrow H^*(\cdot; \Lambda)$ тогда и только тогда, когда $g_\mu(x) \in \Lambda[[x]]$.
2. Кольцевой гомоморфизм $\mu: \Omega_U \rightarrow \Lambda[\beta]$ продолжается до мультипликативного преобразования $\mu: U^*(\cdot) \rightarrow K_\Lambda(\cdot)$ тогда и только тогда, когда $\exp(\beta g_\mu(x)) \in \Lambda[\beta][[x]]$.
3. Кольцевой гомоморфизм $\mu: \Omega_U \rightarrow \Omega_U \otimes \Lambda$ продолжается до мультипликативного преобразования $\mu: U^*(\cdot) \rightarrow U_\Lambda^*(\cdot)$ тогда и только тогда, когда $g^{-1}(g_\mu(x)) \in \Omega_U \otimes \Lambda[[x]]$.



С.П.Новиков,

О некоторых задачах топологии многообразий, связанных с теорией пространств Тома.

Докл. АН СССР, 132:5 (1960), 1031–1034.



С.П.Новиков,

Методы алгебраической топологии с точки зрения теории кобордизмов.

Известия АН СССР, Сер. матем., 31:4 (1967), 855–951.



В.М.Бухштабер,

Характер Чженя-Дольда в кобордизмах, I.

Матем. сб., 83(125):4(12) (1970), 575–595.



В.М.Бухштабер, С.П.Новиков,

Формальные группы, степенные системы и операторы Адамса.


Матем. Сб., 84(126):1 (1971), 81–118.





А.Пуанкаре,


Analysis situs.


Избранные труды, т. 2, М., Наука, 1972, 457–548.

 В.М.Бухштабер,
Кобордизмы в задачах алгебраической топологии.
Итоги науки, т. 13, ВИНТИ, М., 1975, 231–271.

 В.М.Бухштабер,
Характеристические классы в кобордизмах и топологические приложения
теорий однозначных и двузначных формальных групп.
Итоги науки и техники, Совр. Пробл. матем., т. 10, ВИНТИ, М., 1978,
5–178.

 Топологическая библиотека,
Кобордизмы в Советском Союзе, 1967–1979.
Москва-Ижевск, 2011, 584 стр.

 В.М.Бухштабер,
Комплексные кобордизмы и формальные группы.
УМН, 67:5 (407), 2012, 111–174.

 V.M.Buchstaber, A.P.Veselov,
Chern-Dold character in complex cobordisms and theta divisors.
Advances in Mathematics, 449 (2024), 109720, 35 pp.; arXiv 2007.05782 (2020).

Спасибо за внимание!