

Лекция 2: SC -кобордизмы и универсальная 2-значная формальная группа

В.М. Бухштабер

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
Математический центр мирового уровня МИАН
НИУ ВШЭ, факультет математики

Летняя школа по топологии – 2026
“Торическая топология, гиперболическая геометрия
и комбинаторная теория групп”
Международный математический центр “Сириус”
17–21 мая 2026 г.

Тензорное произведение над телом \mathbb{H}

Как получить аналог формальной группы в кватернионном случае?

Проблема: тензорное произведение векторных расслоений над телом кватернионов не является кватернионным.

Пусть

$$\zeta_1 = \text{pr}_1^*(\zeta), \quad \zeta_2 = \text{pr}_2^*(\zeta)$$

— кватернионные линейные расслоения, где ζ — универсальное кватернионное линейное расслоение над $\mathbb{H}\mathbb{P}^\infty$, и

$$\text{pr}_j : \mathbb{H}\mathbb{P}^\infty \times \mathbb{H}\mathbb{P}^\infty \rightarrow \mathbb{H}\mathbb{P}^\infty$$

— две проекции на декартовы сомножители.

Определено вещественное 4-мерное расслоение

$$\zeta_1 \otimes_{\mathbb{H}} \zeta_2 \rightarrow \mathbb{H}\mathbb{P}^\infty \times \mathbb{H}\mathbb{P}^\infty,$$

где тензорное произведение над некоммутативным телом \mathbb{H} определено относительно левой структуры послойного \mathbb{H} -модуля ζ_1 и правой структуры послойного \mathbb{H} -модуля ζ_2 .

Самосопряжённые расслоения

Самосопряжённым расслоением над X называется пара

$$(\eta, T),$$

где $\eta \rightarrow X$ — комплексное векторное расслоение, а

$$T : \eta \longrightarrow \eta$$

— антилинейный изоморфизм, т.е. $T(\lambda v) = \bar{\lambda} T(v)$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ и $v \in \eta$.

Операции с самосопряжёнными расслоениями

Пусть (η_1, T_1) и (η_2, T_2) — два самосопряжённых расслоения.

Их сумма определяется как

$$(\eta_1, T_1) + (\eta_2, T_2) := (\eta_1 \oplus \eta_2, T_1 \oplus T_2).$$

Их тензорное произведение определяется как

$$(\eta_1, T_1) \otimes (\eta_2, T_2) := (\eta_1 \otimes_{\mathbb{C}} \eta_2, T_1 \otimes T_2).$$

Здесь

$$(T_1 \otimes T_2)(v_1 \otimes v_2) = T_1(v_1) \otimes T_2(v_2).$$

Случай $T^2 = 1$

Рассмотрим самосопряжённое расслоение (η, T) .

Если

$$T^2 = \text{id},$$

то множество неподвижных точек

$$\xi := \{v \in \eta \mid T(v) = v\}$$

является вещественным подрасслоением в η .

В этом случае комплексное расслоение η получается комплексификацией:

$$\eta \cong \xi \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

Случай $T^2 = -1$

Если

$$T^2 = -\text{id},$$

то у расслоения η нет вещественной формы как множества неподвижных точек.

В этом случае η имеет структуру симплектического, или кватернионного, расслоения.

Оператор T играет роль умножения на кватернионную единицу j :

$$j(v) := T(v), \quad j^2 = -1.$$

Антилинейность T соответствует правилу

$$j(\lambda v) = \bar{\lambda} j(v).$$

Обозначим через $\mathbb{C}SG_{n,k}$ многообразие, точками которого являются пары

$$(V, T),$$

где

$$V \subset \mathbb{C}^n$$

— k -мерное комплексное подпространство, а

$$T : V \longrightarrow V$$

— унитарный антиавтоморфизм.

Над $\mathbb{C}SG_{n,k}$ определено каноническое k -мерное самосопряжённое расслоение

$$\xi_{n,k}^{\text{SC}} \longrightarrow \mathbb{C}SG_{n,k}.$$

Его слой над точкой (V, T) равен V .

Связь с комплексным многообразием Грассмана

Пусть $\mathbb{C}G_{n,k}$ — комплексное многообразие Грассмана.

Имеется отображение

$$\pi_{n,k} : \mathbb{C}SG_{n,k} \longrightarrow \mathbb{C}G_{n,k}, \quad \pi_{n,k}(V, T) = V.$$

Это отображение забывает антиавтоморфизм T .

Оно является расслоением со слоем

$$U(k).$$

Описание расслоения $\pi_{n,k}$

Расслоение

$$\pi_{n,k} : \mathbb{C}SG_{n,k} \longrightarrow \mathbb{C}G_{n,k}$$

ассоциировано с главным $U(k)$ -расслоением над $\mathbb{C}G_{n,k}$ относительно действия группы $U(k)$ на себе сопряжением:

$$\varphi : U(k) \times U(k) \longrightarrow U(k),$$

$$\varphi(g, g_1) = gg_1g^{-1}.$$

Тем самым слой над точкой $V \in \mathbb{C}G_{n,k}$ отождествляется с множеством унитарных антиавтоморфизмов пространства V .

Универсальное самосопряжённое расслоение

Положим

$$\mathbf{BSC}(k) := \operatorname{colim}_{n \rightarrow \infty} \mathbb{C}SG_{n,k} .$$

Также положим

$$\xi(k; \mathbf{SC}) := \operatorname{colim}_{n \rightarrow \infty} \xi_{n,k}^{\mathbf{SC}} .$$

Тогда

$$\xi(k; \mathbf{SC}) \longrightarrow \mathbf{BSC}(k)$$

является универсальным k -мерным самосопряжённым расслоением.

Положим

$$\mathbf{BSC} := \varinjlim_n \mathbf{BSC}(n), \quad \mathbf{BU} := \varinjlim_n \mathbf{BU}(n).$$

$$\pi := \varinjlim_n \pi_n, \quad m_{\mathbf{SC}} := \varinjlim_{n,m} B\hat{i}_{n,m}, \quad m_{\mathbf{C}} := \varinjlim_{n,m} Bi_{n,m}.$$

Пространства **BSC** и **BU** являются коммутативными H -пространствами, а

$$\pi : \mathbf{BSC} \longrightarrow \mathbf{BU}$$

является гомоморфизмом H -пространств.

Пространство **BSC** является классифицирующим пространством для К-теории самосопряжённых расслоений:

$$KSC^*(-).$$

Теория $KSC^*(-)$ является мультипликативной и 4-периодической.

Она связана с комплексной К-теорией $K^*(-)$ и вещественной К-теорией $KO^*(-)$ точными последовательностями.

Когомологическая и гомотопическая структура пространства **BSC** описана в работе [Smith L., Stong R.E., 1968].

Связь с комплексной K-теорией

Для каждого конечного CW-комплекса X имеется точная последовательность

$$\dots \longrightarrow K^{-1-q}(X) \longrightarrow KSC^{-q}(X) \xrightarrow{\mu_K^{KSC}} K^{-q}(X) \xrightarrow{1-t} K^{-q}(X) \longrightarrow \dots$$

Здесь μ_K^{KSC} индуцировано отображением $\pi : \mathbf{BSC} \rightarrow \mathbf{BU}$ и $t : K(X) \rightarrow K(X)$ — оператор комплексного сопряжения.

Задачи:

1. Докажите, что

$$KSC^{-q}(pt) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{если } q \equiv 0 \pmod{4}; \\ \mathbb{Z}/2, & \text{если } q \equiv 1 \pmod{4}; \\ 0, & \text{если } q \equiv 2 \pmod{4}; \\ \mathbb{Z}, & \text{если } q \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

2. Вычислите $KSC^*(\mathbb{C}P^n)$ и $KSC^*(\mathbb{H}P^n)$ при $n > 0$.

Также имеется точная последовательность

$$\dots \longrightarrow \mathrm{KO}^{2-q}(X) \xrightarrow{\times\theta^2} \mathrm{KO}^{-q}(X) \xrightarrow{\mu_{\mathrm{KSC}}^{\mathrm{KO}}} \mathrm{KSC}^{-q}(X) \xrightarrow{\delta} \mathrm{KO}^{3-q}(X) \longrightarrow \dots$$

Здесь $\mu_{\mathrm{KSC}}^{\mathrm{KO}}$ индуцировано комплексификацией вещественных расслоений, а $\times\theta^2$ означает умножение на образующий элемент группы

$$\mathrm{KO}^{-2}(\mathrm{pt}) \cong \mathbb{Z}/2.$$

Последовательности расслоений

$$\xi(n; \text{SC}) \longrightarrow \mathbf{BSC}(n)$$

задают мультипликативный спектр Тома

$$\text{TSC} = \{\text{TSC}(2n)\}_{n \geq 0},$$

где

$$\text{TSC}(2n) = \text{T}\xi(n; \text{SC}).$$

Структурные отображения имеют вид

$$T\hat{i}_n : \Sigma^2 \text{TSC}(2n) \longrightarrow \text{TSC}(2n + 2),$$

$$T\hat{i}_{n,m} : \text{TSC}(2n) \wedge \text{TSC}(2m) \longrightarrow \text{TSC}(2n + 2m).$$

Когомологическая теория $SC^*(-)$

Спектру Тома TSC соответствует мультипликативная теория когомологий

$$SC^*(-).$$

Теория $SC^*(-)$ является теорией кобордизмов.

Она построена по гладким многообразиям, в нормальном расслоении которых фиксирован класс эквивалентности структуры самосопряжённого расслоения.

Задача.

Докажите, что мультипликативные теории когомологий $KSC^*(-)$ и $SC^*(-)$ **НЕ** являются \mathbb{C} -ориентируемыми.

Определены канонические мультипликативные преобразования теорий кохомологий

$$\mu_{SC}^{Sp} : Sp^*(-) \longrightarrow SC^*(-),$$

$$\mu_{SC}^{CO} : CO^*(-) \longrightarrow SC^*(-),$$

где теория CO^* построена по гладким многообразиям, в нормальном расслоении которых фиксирован класс эквивалентности структуры комплексификации вещественного расслоения.

Они индуцируются соответствующими преобразованиями структур в нормальных расслоениях.

Теорема (В.М. Бухштабер, 1978 ВИНТИ)

В теории самосопряжённых кобордизмов $SC^*(-)$ определена функция, сопоставляющая каждому самосопряжённому расслоению

$$(\eta, T) \longrightarrow X, \quad \dim_{\mathbb{C}} \eta = 2n,$$

характеристический класс

$$p(\eta; SC) = 1 + p_1(\eta; SC) + \cdots + p_n(\eta; SC),$$

где

$$p_m(\eta; SC) \in SC^{4m}(X).$$

Характеристические классы в SC-теории

Если $T^2 = 1$ и $\eta = \zeta \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, то

$$\mathfrak{p}_m(\eta; \text{SC}) = (-1)^m \mu_{\text{SC}}^{\text{CO}}(p_m^{\text{CO}}(\zeta)).$$

Если $T^2 = -1$, то η имеет структуру симплектического расслоения ζ , и

$$\mathfrak{p}_m(\eta; \text{SC}) = \mu_{\text{SC}}^{\text{Sp}}(p_m^{\text{Sp}}(\zeta)).$$

Классы p_m^{Sp} называются **классами Бореля–Коннера–Флойда** в Sp-теории (в честь А. Borel, Р.Е. Conner, Е.Е. Floyd).

При каноническом преобразовании $\text{Sp} \rightarrow K\mathbb{Z}$ классы p_m^{Sp} переходят в классические классы Бореля.

При каноническом преобразовании $\text{CO} \rightarrow K\mathbb{Z}$ классы p_m^{CO} переходят в классические классы Понтрягина.

Тензорное произведение над \mathbb{C}

В лекции 1 введена формальная группа геометрических кобордизмов

$$F(u, v) = c_1^U(\eta_1 \otimes_{\mathbb{C}} \eta_2) \in U^2(\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty) = \Omega_U[[u, v]],$$

где

$$\eta_k = \text{pr}_k^* \eta, \quad k = 1, 2.$$

Здесь η — тавтологическое комплексное одномерное расслоение над $\mathbb{C}P^\infty$,

$$\text{pr}_k : \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty \longrightarrow \mathbb{C}P^\infty, \quad u = c_1^U(\eta_1), \quad v = c_1^U(\eta_2).$$

Пусть $\zeta_k = \text{pr}^*(\zeta)$, ζ — одномерное тавтологическое кватернионное расслоение над $\mathbb{H}P^\infty$. Расслоения ζ_k являются самосопряженными.

Расслоение $\zeta_1 \otimes_{\mathbb{C}} \zeta_2$ является самосопряженным над $\mathbb{H}P^\infty \times \mathbb{H}P^\infty$, и $\iota^*(\zeta_1 \otimes_{\mathbb{C}} \zeta_2)$ является симплектическим над $\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty$, где $\iota : \mathbb{C}P^\infty \rightarrow \mathbb{H}P^\infty$ — отображение, индуцированное вложением $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \text{Sp}(1)$.

Рассмотрим расслоение

$$\zeta_1 \otimes_{\mathbb{C}} \zeta_2 \longrightarrow \mathbb{H}P^\infty \times \mathbb{H}P^\infty.$$

Так как

$$\zeta_1 \otimes_{\mathbb{C}} \zeta_2 = (\zeta_1 \otimes_{\mathbb{H}} \zeta_2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C},$$

то определены характеристические классы

$$\mathfrak{P}_m(\zeta_1 \otimes_{\mathbb{C}} \zeta_2; \text{SC}) = (-1)^m \mu_{\text{SC}}^{\text{CO}} p_m^{\text{CO}}(\zeta_1 \otimes_{\mathbb{H}} \zeta_2).$$

Имеем

$$\mathfrak{p}_m(\zeta_1 \otimes \zeta_2; \mathbf{SC}) \in \mathbf{SC}^{4m}(\mathbb{H}P^\infty \times \mathbb{H}P^\infty).$$

Причём

$$\mathfrak{p}_m(\zeta_1 \otimes \zeta_2; \mathbf{SC}) = 0 \quad \text{при } m > 2.$$

Имеет место изоморфизм

$$\mathbf{SC}^*(\mathbb{H}P^\infty \times \mathbb{H}P^\infty) \cong \Omega_{\mathbf{SC}}[[x_1^{\mathbf{SC}}, x_2^{\mathbf{SC}}]],$$

где

$$x_i^{\mathbf{SC}} = \mathfrak{p}_1(\zeta_i; \mathbf{SC}) = \mu_{\mathbf{SC}}^{\mathbf{Sp}} \mathfrak{p}_1^{\mathbf{Sp}}(\zeta_i).$$

Формальные ряды Θ_1 и Θ_2

Рассмотрим каноническое преобразование

$$\mu_U^{\text{SC}} : \text{SC}^*(-) \longrightarrow U^*(-).$$

Положим

$$\Theta_i(x_1, x_2) = \mu_U^{\text{SC}} \mathfrak{p}_i(\zeta_1 \otimes \zeta_2; \text{SC}), \quad i = 1, 2.$$

Тогда

$$\Theta_i(x_1, x_2) \in U^{4i}(\mathbb{H}P^\infty \times \mathbb{H}P^\infty) \cong \Omega_U[[x_1, x_2]],$$

где

$$x_i = \mu_U^{\text{SC}} x_i^{\text{SC}}.$$

Подстановка многозначных формальных рядов

Рассмотрим два многозначных формальных ряда:

$$\mathcal{F}_1^n + \sum_{i=1}^n (-1)^i \Theta_{i,1}(x) \mathcal{F}_1^{n-i} = 0,$$

$$\mathcal{F}_2^m + \sum_{j=1}^m (-1)^j \Theta_{j,2}(x) \mathcal{F}_2^{m-j} = 0.$$

Пусть

$$\Theta_{i,1}(0) = 0, \quad 1 \leq i \leq n, \quad \Theta_{j,2}(0) = 0, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Тогда определена операция подстановки m -значного ряда $\mathcal{F}_2(x)$ в n -значный ряд $\mathcal{F}_1(x)$.

Результат подстановки

Результатом подстановки является nm -значный формальный ряд

$$\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}_1(\mathcal{F}_2(x)).$$

Он задаётся уравнением

$$\prod_{k=1}^m \left(\mathcal{F}^n + \sum_{i=1}^n (-1)^i \Theta_{i,1}(\mathcal{F}_2^{(k)}) \mathcal{F}^{n-i} \right) = 0.$$

Здесь

$$\mathcal{F}_2^{(1)}, \dots, \mathcal{F}_2^{(m)}$$

обозначают формальные ветви m -значного ряда \mathcal{F}_2 .

Одномерная n -значная формальная группа

Коммутативной одномерной n -значной формальной группой над кольцом A называется n -значный формальный ряд $\mathcal{F}(x, y)$, задаваемый уравнением

$$\mathcal{F}^n + \sum_{i=1}^n (-1)^i \Theta_i(x, y) \mathcal{F}^{n-i} = 0,$$

где

$$\theta_i(x, y) \in A[[x, y]].$$

Формальный ряд $\mathcal{F}(x, y)$ должен удовлетворять условиям:

I. $\mathcal{F}(x, 0)$ задаётся уравнением $(\mathcal{F} - x)^n = 0$.

II. $\mathcal{F}(\mathcal{F}(x, y), z) = \mathcal{F}(x, \mathcal{F}(y, z))$.

III. $\mathcal{F}(x, y) = \mathcal{F}(y, x)$.

Аксиома II равносильна равенству n^2 -значных формальных рядов от переменных x, y, z .

Примеры двузначных формальных групп

Далее положим $z(x, y) = \mathcal{F}(x, y)$.

1. Элементарные формальные группы

$$z^2 - 2(x + y)z + (x - y)^2 = 0, \quad z^2 - 2(x + y)z + (x + y)^2 = 0.$$

2. Многочлен Бухштабера

$$\mathcal{B}_a(z; x, y) = (x + y + z - a_2xyz)^2 - 4(1 + a_3xyz)(xy + yz + xz + a_1xyz),$$

введенный в [Бухштабер В.М., 1990], задает двузначную формальную группу

$$\mathcal{B}_a(z; x, y) = 0.$$

Приложения этой двузначной группы см. [Buchstaber V.M., Gaiur I.Yu., Rubtsov V.N., 2026] и [Бухштабер В.М., Корнев М.И., Рубцов В.Н., 2026].

Двузначная формальная группа в SC-теории

Обозначим через Λ подкольцо в Ω_U , порождённое коэффициентами рядов

$$\Theta_1(x_1, x_2), \quad \Theta_2(x_1, x_2).$$

Теорема (Бухштабер В.М., 1978 ВИНТИ)

Двузначный формальный ряд

$$z^2 - \Theta_1(x_1, x_2)z + \Theta_2(x_1, x_2) = 0 \quad (1)$$

над кольцом Λ задаёт двузначную формальную группу первого типа.

Двузначная формальная группа над кольцом Λ , задаваемая уравнением (1), называется **двузначной формальной группой в кобордизмах**.

Обратный образ расслоения $\zeta_1 \otimes_{\mathbb{C}} \zeta_2$

Имеем следующую диаграмму обратных образов:

$$\begin{array}{ccc} (\eta_1 \oplus \bar{\eta}_1) \otimes_{\mathbb{C}} (\eta_2 \oplus \bar{\eta}_2) & \longrightarrow & \zeta_1 \otimes_{\mathbb{C}} \zeta_2 \\ \downarrow \lrcorner & & \downarrow \\ \mathbb{C}P^{\infty} \times \mathbb{C}P^{\infty} & \xrightarrow{\iota \times \iota} & \mathbb{H}P^{\infty} \times \mathbb{H}P^{\infty} \end{array}$$

где η_j – универсальное комплексное линейное расслоение над j -м множителем и отображение $\iota : \mathbb{C}P^{\infty} \rightarrow \mathbb{H}P^{\infty}$ индуцировано вложением $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \text{Sp}(1)$.

Существует изоморфизм комплексных векторных расслоений:

$$(\eta_1 \oplus \bar{\eta}_1) \otimes_{\mathbb{C}} (\eta_2 \oplus \bar{\eta}_2) \cong (\eta_1 \eta_2 \oplus \bar{\eta}_1 \bar{\eta}_2) \oplus (\eta_1 \bar{\eta}_2 \oplus \bar{\eta}_1 \eta_2).$$

Расслоения

$$\xi_1 = \eta_1 \eta_2 \oplus \bar{\eta}_1 \bar{\eta}_2, \quad \xi_2 = \eta_1 \bar{\eta}_2 \oplus \bar{\eta}_1 \eta_2$$

допускают кватернионные структуры.

Группа Пикара $\text{Pic}(M)$ и двузначная группа $\text{Pic}(M)/\sigma$

Расслоение $\zeta_1 \otimes_{\mathbb{C}} \zeta_2$ **не допускает** никакой кватернионной структуры.

В то же время, $(\zeta_1 \otimes_{\mathbb{C}} \zeta_2) \otimes_{\mathbb{C}} \zeta_3$ **имеет** кватернионную структуру.

Пусть $\text{Pic}(M)$ – группа Пикара (в честь Е. Picard) классов изоморфизма $\xi := [\xi]$ комплексных линейных расслоений над комплексным многообразием M .

Рассмотрим инволюцию $\sigma : [\xi] \mapsto [\bar{\xi}]$. Точки соответствующего пространства орбит $X := \text{Pic}(M)/\sigma$ отождествляются с неупорядоченными парами $[\xi, \bar{\xi}]$.

Получаем **2-значную косетную группу** с умножением

$$[\xi, \bar{\xi}] * [\eta, \bar{\eta}] = [[\xi\eta, \bar{\xi}\bar{\eta}], [\xi\bar{\eta}, \bar{\xi}\eta]]$$

и нейтральным элементом $[\mathbf{1}_{\mathbb{C}}, \mathbf{1}_{\mathbb{C}}]$, где $\mathbf{1}_{\mathbb{C}}$ обозначает класс тривиального комплексного линейного расслоения.

Естественный изоморфизм $(\zeta_1 \otimes_{\mathbb{C}} \zeta_2) \otimes_{\mathbb{C}} \zeta_3 \cong \zeta_1 \otimes_{\mathbb{C}} (\zeta_2 \otimes_{\mathbb{C}} \zeta_3)$ эквивалентен ассоциативности двузначной операции $*$.

Основные определения и конструкции теории n -значных групп даны в обзоре [Buchstaber V.M., 2006].

Конструкция квадрата модуля

Эта двузначная группа является геометрической реализацией более общей конструкции:

Предложение

Пусть G — абелева группа и $\sigma : g \mapsto -g$ — инволюция. Обозначим через X пространство орбит G/σ с точками $[g, -g]$. Тогда X наделяется структурой инволютивной коммутативной двузначной косетной группы с операцией

$$X \times X \rightarrow \text{Sym}^2 X$$
$$[g, -g] * [h, -h] = [[g + h, -g - h], [g - h, -g + h]]$$

с нейтральным элементом $[0, 0]$, где 0 — нейтральный элемент группы G .

Условие нейтрального элемента: $0 * [g, -g] = [[g, -g], [g, -g]]$.

Ассоциативность: $([g, -g] * [h, -h]) * [t, -t] = [g, -g] * ([h, -h] * [t, -t])$.

Каждый элемент обратен себе: $[g, -g] * [g, -g] = [[2g, 0], [-2g, 0]]$.

Двузначная формальная группа \mathbb{G}_F

Конструкция квадрата модуля имеет следующий **инфинитезимальный аналог**:

Пусть $F(u, v)$ – коммутативная формальная группа над алгеброй A с логарифмом $g(u)$ и экспонентой $f(u)$ (они определены над $A \otimes \mathbb{Q}$).

Пусть $x = u\bar{u}$, $y = v\bar{v}$. Тогда по определению **двузначная формальная группа** \mathbb{G}_F задается законом

$$x * y = [F(u, v)F(\bar{u}, \bar{v}), F(u, \bar{v})F(\bar{u}, v)],$$

нейтральным элементом $x = 0$ и обратным элементом $\text{inv}(x) = x$.

Двузначная формальная группа \mathbb{G}_F

Определим следующие формальные ряды:

$$\begin{aligned}z_1 &= F(u, v)F(\bar{u}, \bar{v}), & z_2 &= F(u, \bar{v})F(\bar{u}, v) \\ \Theta_1 &= z_1 + z_2, & \Theta_2 &= z_1 z_2.\end{aligned}$$

Задача. Доказать, что ряды Θ_1 и Θ_2 принадлежат кольцу $A[[x, y]]$.

Предложение (Бухштабер В.М., Новиков С.П., 1971)

Двузначная формальная группа \mathbb{G}_F определяется корнями z_1, z_2 квадратного многочлена над кольцом $A[[x, y]]$:

$$\begin{aligned}z^2 - \Theta_1(x, y)z + \Theta_2(x, y) &= 0, \\ x * y &= [z_1, z_2].\end{aligned}$$

Двузначная формальная группа \mathbb{G}_F

Ряд

$$B(x) = g(u)g(\bar{u}) = -g(u)^2$$

называется **логарифмом** двузначной формальной группы \mathbb{G}_F по следующей причине:

Предложение (Бухштабер В.М., Новиков С.П., 1971)

$$z_{1,2} = B^{-1} \left(\left(\sqrt{B(x)} \pm \sqrt{B(y)} \right)^2 \right).$$

Доказательство. Имеем $B^{-1}((\sqrt{B(x)} \pm \sqrt{B(y)})^2) = B^{-1}(-(g(u) \pm g(v))^2)$.

Достаточно проверить, что $B(z_{1,2}) = -(g(u) \pm g(v))^2$.

Рассмотрим случай z_1 (случай z_2 полностью аналогичен).

Имеем

$$B(z_1) = B(V\bar{V}) = -g(V)^2 = -(gg^{-1}(g(u) + g(v)))^2 = -(g(u) + g(v))^2,$$

где $V = g^{-1}(g(u) + g(v))$. Что и требовалось доказать.

Рассмотрим формальную группу $F(u, v) = F_U(u, v)$ геометрических кобордизмов над кольцом $\Omega_U = U^*(\text{pt})$ с логарифмом $g(u) = g_U(u)$ и экспонентой $f(u) = f_U(u)$.

Введем классы $z_1, z_2 \in U^4(\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty)$ как классы Черна в U -теории:

$$z_1 := c_2^U(\eta_1 \eta_2 \oplus \bar{\eta}_1 \bar{\eta}_2) = c_1^U(\eta_1 \eta_2) c_1^U(\bar{\eta}_1 \bar{\eta}_2) = F_U(u, v) F_U(\bar{u}, \bar{v}),$$

$$z_2 := c_2^U(\eta_1 \bar{\eta}_2 \oplus \bar{\eta}_1 \eta_2) = c_1^U(\eta_1 \bar{\eta}_2) c_1^U(\bar{\eta}_1 \eta_2) = F_U(u, \bar{v}) F_U(\bar{u}, v),$$

где $u = c_1^U(\eta_1)$, $v = c_1^U(\eta_2)$, $\bar{u} = c_1^U(\bar{\eta}_1)$, $\bar{v} = c_1^U(\bar{\eta}_2)$.

Д. ф. \mathbb{G}_{F_U} группа комплексных кобордизмов

Пусть

$$x = \mu_{\mathbb{S}^1}^{\text{Sp}} \iota^* p_1^{\text{Sp}}(\zeta_1) = u\bar{u}, \quad y = \mu_{\mathbb{S}^1}^{\text{Sp}} \iota^* p_1^{\text{Sp}}(\zeta_2) = v\bar{v} \in \text{Sp}^4(\mathbb{C}P^\infty),$$

где $p_1^{\text{Sp}}(\zeta_j) \in \text{Sp}^4(\mathbb{H}P^\infty)$ обозначает класс Бореля–Коннера–Флойда в Sp -теории и $\iota : \mathbb{C}P^\infty \rightarrow \mathbb{H}P^\infty$ – отображение, индуцированное вложением $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \text{Sp}(1)$.

Определим ряды в кольце $\Omega_U[[x, y]]$

$$\Theta_1 := \iota^* p_1^{\text{CO}}(\zeta_1 \otimes_{\mathbb{C}} \zeta_2) = p_1^{\text{Sp}} \iota^*(\zeta_1 \otimes_{\mathbb{C}} \zeta_2) = z_1 + z_2,$$

$$\Theta_2 := \iota^* p_2^{\text{CO}}(\zeta_1 \otimes_{\mathbb{C}} \zeta_2) = p_2^{\text{Sp}} \iota^*(\zeta_1 \otimes_{\mathbb{C}} \zeta_2) = z_1 z_2.$$

Теорема (Бухштабер В.М., 1978 ВИНТИ)

Д. ф. группа в кобордизмах над кольцом $\Lambda \subset \Omega_U$ при гомоморфизме μ_U^{SC} переходит в д. ф. группу, построенную при помощи конструкции квадрата модуля формальной группы геометрических кобордизмов.

Двузначные формальные группы основного типа

Двузначная формальная группа

$$z^2 - \Theta_1(x, y)z + \Theta_2(x, y) = 0$$

над кольцом R называется **группой первого типа**, если

$$\Theta_2(x, y) \equiv (x - y)^2 \pmod{\deg 3},$$

и **группой второго типа**, если

$$\Theta_2(x, y) \equiv (x + y)^2 \pmod{\deg 3}.$$

Теорема (Бухштабер В.М., 1975)

Над кольцом R без делителей нуля любая 2-значная формальная группа имеет первый или второй тип.

Универсальность д. ф. в комплексных кобордизмах

Д. ф. группа G_F с двузначным законом $z^2 - \Theta_1 z + \Theta_2 = 0$ и кольцом коэффициентов R называется **универсальной**, если для любой другой д. ф. группы $G_{\tilde{F}}$ с двузначным законом $z^2 - \tilde{\Theta}_1 z + \tilde{\Theta}_2 = 0$ и кольцом коэффициентов \tilde{R} существует и единственен гомоморфизм $\varphi : R \rightarrow \tilde{R}$, такой, что $\tilde{\Theta}_j = \varphi(\Theta_j)$, $j = 1, 2$.

Задача. Докажите существование универсальной двузначной группы.

Теорема (Бухштабер В.М., 1978)

Двузначная формальная группа в кобордизмах над кольцом $\Lambda \subset \Omega_U$ изоморфна универсальной д. ф. группе первого типа.

При некоторых дополнительных условиях на кольцо R универсальная формальная группа второго типа имеет вид

$$(z - F_U(x, y))^2 = 0,$$

где $F_U(x, y)$ – формальная группа геометрических кобордизмов, см. [Бухштабер В.М., 1976].

Экспонента для \mathbb{G}_{F_U} – это характер Черна–Дольда

Пусть z – образующий группы $H^4(\mathbb{H}P^\infty, \mathbb{Z})$ такой, что $\iota^* z = -t^2$, где t – образующий группы $H^2(\mathbb{C}P^\infty, \mathbb{Z})$.

Пусть ζ – универсальное кватернионное линейное расслоение над $\mathbb{H}P^\infty$, и η – универсальное комплексное линейное расслоение над $\mathbb{C}P^\infty$.

Мы знаем, что $x = \iota^* c_2^U(\zeta) = c_1^U(\eta)c_1^U(\bar{\eta}) = u\bar{u}$.

Тогда $\text{ch}_U(g(u)) = t$ и $\text{ch}_U(B(x)) = -t^2 = \iota^* z$, где $B(x) = g(u)g(\bar{u}) = -g(u)^2$ и $\text{ch}_U(x)$ – характер Черна–Дольда

$$\text{ch}_U : U^*(\mathbb{H}P^\infty) \rightarrow H^*(\mathbb{H}P^\infty, \Omega_U \otimes \mathbb{Q}) \cong \Omega_U \otimes \mathbb{Q}[[z]],$$

введенный в [Бухштабер В.М., 1970].

Поэтому обратный степенной ряд $B^{-1}(z)$, называемый **экспонентой**, совпадает с характером Черна:

$$B^{-1}(c_2^U(\zeta)) = \text{ch}_U(x) \in H^*(\mathbb{H}P^\infty, \Omega_U \otimes \mathbb{Q}).$$

Теорема (Бухштабер В.М., 1975)

(i) Пусть $x * y = \{z \mid z^2 - \Theta_1(x, y)z + \Theta_2(x, y) = 0\}$ – произвольная двузначная формальная группа $\mathbb{G}(R)$ в формальных степенных рядах над произвольной \mathbb{Q} -алгеброй R . Пусть $B(x)$ – ее логарифм.

Тогда $B(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{2}\varphi_1(x)B'(x) + \frac{1}{8}\varphi_2(x)B''(x) = 1$$

с начальным условием $B(0) = 0$, где

$$\varphi_1(x) = \left. \frac{\partial \Theta_1(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0}, \quad \varphi_2(x) = \left. \frac{\partial \sigma(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0}, \quad \sigma(x, y) = \Theta_1^2 - 4\Theta_2.$$

Двузначные формальные группы над \mathbb{Q} -алгебрами

Если $\mathbb{G}(R)$ имеет первый тип, то есть $\Theta_2(x, y) \equiv (x - y)^2 \pmod{\deg 3}$, то ряд $B(x)$ задает строгий изоморфизм этой двузначной формальной группы с элементарной двузначной формальной группой, определенной многочленом

$$z^2 - 2(x + y)z + (x - y)^2.$$

Более того, для логарифма группы $\mathbb{G}(R)$ имеем:

$$B(x) = \left(\int_0^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\sqrt{\varphi(t^2)}} \right)^2, \quad \varphi_2(x) = 8 \int_0^x \varphi_1(t) dt,$$

где $\varphi(t) = \varphi_2(t)/(16t)$ и $\varphi(0) = 1$.

Двузначные формальные группы над \mathbb{Q} -алгебрами

(ii) Если $F(x, y)$ – д. ф. группа второго типа, то ряд $B(x)$ устанавливает сильный изоморфизм этой д. ф. группы с д. ф. группой

$$F_1^2 - 2(x + y)F_1 + (x + y)^2 - \delta(x, y) = 0,$$

где

$$\delta(x, y) = \mathcal{A}(x, y) - \mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(y), \quad \mathcal{A}(x) = \int_0^x a(x) dx,$$

$$a(x) = \varphi_2(B^{-1}(x)) \left(\frac{dx}{dB^{-1}(x)} \right)$$

и коэффициенты ряда

$$a(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$$

удовлетворяют условиям $a_n a_m = 0$ для всех пар (n, m) , $n + m \geq 4$.

В частности, если кольцо R не содержит нильпотентных элементов, то $\delta(x, y) \equiv 0$.

Список литературы I



L. Smith, R.E. Stong,
The structure of BSC .
Inventiones mathematicae, 5:2 (1968), 138–159.



В.М. Бухштабер,
Характер Чженя–Дольда в кобордизмах, I.
Матем. сб., 83(125):4(12) (1970), 575–595.



В.М. Бухштабер, С.П. Новиков,
Формальные группы, степенные системы и операторы Адамса.
Матем. Сб., 84(126):1 (1971), 81–118.









В.М. Бухштабер,
Двухзначные формальные группы. Алгебраическая теория и приложения
к кобордизмам. I
Изв. АН СССР, Сер. матем., 39:5 (1975), 1044–1064.



В.М. Бухштабер,
Двухзначные формальные группы. Алгебраическая теория и приложения
к кобордизмам. II
Изв. АН СССР, Сер. матем., 40:2 (1976), 289–325.

Список литературы II

-  В.М. Бухштабер,
Характеристические классы в кобордизмах и топологические приложения теорий однозначных и двузначных формальных групп.
Итоги науки и техники, Совр. Пробл. матем., т. 10, ВИНТИ, М., 1978, 5–178.
-  В.М. Бухштабер,
Топологические приложения теории двузначных формальных групп.
Изв. АН СССР, сер. мат., 42:1 (1978), 130–184.
-  В.М. Бухштабер,
Функциональные уравнения, ассоциированные с теоремами сложения для эллиптических функций, и двузначные алгебраические группы.
УМН, 45:3 (1990), 185–186.
-  V.M. Buchstaber,
n-valued groups: theory and applications.
Moscow Math. J., 6:1 (2006), 57–84.

-  V.M. Buchstaber, I.Yu. Gaiur, V.N. Rubtsov,
Algebraic 2-valued group structures on P^1 , Kontsevich-type polynomials,
and multiplication formulas, I.
[Izv. Math.](#), 90:1 (2026), 34–69.
-  V.M. Buchstaber, M.I. Kornev, V.N. Rubtsov,
Two-valued groups, Chazy equation, Dubrovin–Frobenius structures,
and QYBE.
[arXiv:2604.26641 v1 \[math.AG\] 29 Apr 2026 \(48 pp\)](#).

Спасибо за внимание!