

Лекция 3: кольцо кобордизмов многообразий Стонга

В.М. Бухштабер

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
Математический центр мирового уровня МИАН
НИУ ВШЭ, факультет математики

Летняя школа по топологии — 2026
“Торическая топология, гиперболическая геометрия
и комбинаторная теория групп”
Международный математический центр “Сириус”
17–21 мая 2026 г.

Двузначная формальная группа $F_U^\pm(x, y) = B^{-1}((\sqrt{B(x)} \pm \sqrt{B(y)})^2)$ над кольцом $\Omega_U[[x, y]]$ задается решением квадратного уравнения $z^2 - \Theta_1(x, y)z + \Theta_2(x, y) = 0$.

Обозначим через $\Lambda \subset \Omega_U$ подкольцо в Ω_U , порожденное коэффициентами рядов $\Theta_1(x, y)$ и $\Theta_2(x, y)$.

Имеем $\Lambda = \bigoplus_{n \geq 0} \Lambda_{4n}$, $\Lambda_{4n} \subset \Omega_U^{-4n}$.

В кольце Λ содержатся два подкольца Λ_1 и Λ_2 , порожденные коэффициентами рядов $\Theta_1(x, y)$ и $\Theta_2(x, y)$.

Ни одно из колец Λ_1 , Λ_2 не совпадает с кольцом Λ .

Пусть \mathcal{A}^U – алгебра всех когомологических операций теории комплексных кобордизмов:

$$\mathcal{A}_n^U \cong U^n(\mathrm{MU}), \quad \mathcal{A}^U = \prod_n \mathcal{A}_n^U.$$

Каноническое отображение спектров $\mathrm{MSp} \rightarrow \mathrm{MU}$, соответствующее вложениям $\mathrm{Sp}(n) \subset U(2n)$, $n = 1, 2, \dots$, определяет эпиморфизм $\mathcal{A}^U \rightarrow U^*(\mathrm{MSp})$ и вложение $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^U}(U^*(\mathrm{MSp}), \Omega_U) \hookrightarrow \Omega_U$.

Теорема (Бухштабер В.М., Новиков С.П., 1971)

Квадратное уравнение $z^2 - \Theta_1(x, y)z + \Theta_2(x, y) = 0$, задающее закон умножения в двузначной формальной группе $F^\pm(x, y)$, определено над кольцом $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^U}(U^*(\mathrm{MSp}), \Omega_U)$, и, более того,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^U}(U^*(\mathrm{MSp}), \Omega_U) \otimes \mathbb{Z} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cong \Lambda \otimes \mathbb{Z} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cong \Omega_{\mathrm{Sp}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Оказалось, что $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^U}(U^*(\mathrm{MSp}), \Omega_U) \not\cong \Lambda$.

Рассмотрим отрезок свободной резольвенты \mathcal{A}^U -модуля $U^*(\mathrm{MSp})$:

$$0 \longleftarrow U^*(\mathrm{MSp}) \xleftarrow{\varepsilon_{\mathrm{Sp}}} \mathcal{A}^U \xleftarrow{d} C^1 \widehat{\otimes} \mathcal{A}^U.$$

Здесь $\varepsilon_{\mathrm{Sp}}$ — гомоморфизм, индуцированный каноническим отображением спектров $\mathrm{MSp} \rightarrow \mathrm{MU}$.

Применяя точный слева функтор $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^U}(\cdot, U^*(X))$, где X — конечный клеточный комплекс, получаем точную последовательность

$$0 \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^U}(U^*(\mathrm{MSp}), U^*(X)) \xrightarrow{\varepsilon_{\mathrm{Sp}}^*} U^*(X) \xrightarrow{d^*} C^1 \widehat{\otimes} U^*(X).$$

Положим

$$\mathcal{L}^*(X) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^U}(U^*(\mathrm{MSp}), U^*(X)).$$

Гомоморфизм

$$\mu_{\Lambda}^{\text{Sp}} : \text{Sp}^*(X) \longrightarrow \mathcal{L}^*(X)$$

совпадает со следующей композицией гомоморфизмов спектральной последовательности Адамса–Новикова для $\text{Sp}^*(X)$:

$$\text{Sp}^*(X) \xrightarrow{q_0} E_{\infty}^{2,0} \longrightarrow E_2^{2,0} \simeq \text{Hom}_{\mathcal{A}_U}(U^*(\text{MSp}), U^*(X)) = \mathcal{L}^*(X).$$

Здесь q_0 – краевой гомоморфизм.

Элементы кольца $\mathcal{L}^*(X)$, не лежащие в образе гомоморфизма q_0 , не являются циклами всех дифференциалов.

Для локально конечных клеточных комплексов X положим

$$\mathcal{L}^*(X) = \varprojlim \mathcal{L}^*(X_n),$$

где X_n — n -мерный остов.

Непосредственно из конструкции группы $\mathcal{L}^*(X)$ следует, что соответствие

$$X \mapsto \mathcal{L}^*(X)$$

определяет гомотопический контравариантный функтор из категории локально конечных клеточных комплексов в категорию коммутативных колец.

Кольца $\mathcal{L}^*(X)$

Пусть $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*(\text{pt})$. Кольца $\mathcal{L}^*(X)$ играют ключевую роль в вычислении колец $\text{Sp}^*(X)$ методом спектральной последовательности Адамса–Новикова.

Отметим, что если пространство X не имеет 2-крючения в гомологиях, то кольцо $\mathcal{L}^*(X)$ является минимальным аддитивно прямым слагаемым в кольце $U^*(X)$, содержащим образ кольца $\text{Sp}^*(X)$.

Особый интерес представляет кольцо $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*(\text{pt}) \subset \Omega_U$, которое можно отождествить с кольцом комплексных кобордизмов стабильно комплексных многообразий M^m , обладающих накрытиями

$$\widehat{M}^m \longrightarrow M^m$$

со стабильно симплектической структурой.

Иначе говоря, многообразие \widehat{M}^m допускает вложение

$$\widehat{M}^m \subset \mathbb{R}^{m+4n},$$

нормальное расслоение которого имеет структурную группу $\text{Sp}(n)$.

Пусть $\tilde{\Lambda}$ — подкольцо в $\Lambda \left[\frac{1}{2}\right]$, порождённое коэффициентами рядов

$$\frac{1}{2}\Theta_1(x, y), \quad \Theta_2(x, y).$$

Теорема (Бухштабер В.М., 1978)

Верны равенства:

$$\mathcal{L} = \tilde{\Lambda} \cap \Omega_U, \quad \tilde{\Lambda} = \mathbb{Z}[c_n, n \geq 1]$$

где $\deg c_n = -4n$.

В работе С.П. Новикова (1960) методом классической спектральной последовательности Адамса было показано, что

$$\Omega_{Sp} \left[\frac{1}{2} \right] = \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right] [b_n, n = 1, 2, \dots], \quad \deg b_n = -4n.$$

Тем самым после обращения двойки, кольцо симплектических кобордизмов становится полиномиальным кольцом.

Однако полное вычисление кольца Ω_{Sp} , включая структуру кольца $\Omega_{Sp}/(2\text{-кручение})$, остаётся одной из известных нерешённых задач алгебраической топологии.

Сервантные расширения

Пусть B – коммутативное кольцо с единицей без аддитивного кручения.
Пусть A и \hat{A} – подкольца в B , такие, что \hat{A} содержит A и выполнено условие

$$a \in A : a = nb \text{ для некоторого } b \in B \Leftrightarrow b \in \hat{A}.$$

В этом случае кольцо \hat{A} называется **сервантным расширением** кольца A относительно вложения $A \subset B$.

Из свойств спектральной последовательности Адамса–Новикова для спектра MSp следует, что кольцо \mathcal{L} является сервантным расширением кольца $\Omega_{\mathrm{Sp}}/\mathrm{Tors}$ относительно вложения $\Omega_{\mathrm{Sp}}/\mathrm{Tors} \subset \Omega_{\mathrm{U}}$, т.е.

$$\Omega_{\mathrm{Sp}} \left[\frac{1}{2} \right] \cap \Omega_{\mathrm{U}} = \mathcal{L}.$$

Теорема (Бухштабер В.М., 1978)

Для любого локально конечного клеточного комплекса X канонический гомоморфизм

$$\mu_U^{\text{Sp}}: \text{Sp}^*(X) \longrightarrow U^*(X)$$

разлагается в композицию

$$\text{Sp}^*(X) \xrightarrow{\mu_{\mathcal{L}}^{\text{Sp}}} \mathcal{L}^*(X) \longrightarrow U^*(X),$$

и гомоморфизм $\mu_{\mathcal{L}}^{\text{Sp}}$ индуцирует изоморфизм

$$\mu_{\mathcal{L}}^{\text{Sp}} \left[\frac{1}{2} \right] : \text{Sp}^*(X) \left[\frac{1}{2} \right] \xrightarrow{\cong} \mathcal{L}^*(X) \left[\frac{1}{2} \right].$$

Проектор \varkappa

Рассмотрим мультипликативную когомологическую операцию

$$\varkappa : U^*(X) \longrightarrow U^*(X) \left[\frac{1}{2} \right],$$

определенную рядом $\varkappa(u) = u + \dots \in U^2(\mathbb{C}P^\infty) \left[\frac{1}{2} \right]$, удовлетворяющим системе уравнений

$$\varkappa(u) + \varkappa(\bar{u}) = 0, \quad \varkappa(u)\varkappa(\bar{u}) = x.$$

Теорема (Бухштабер В.М., 1978)

Операция \varkappa задает мультипликативный проектор

$$\varkappa : U^*(X) \left[\frac{1}{2} \right] \longrightarrow U^*(X) \left[\frac{1}{2} \right],$$

который выделяет в $U^*(X) \left[\frac{1}{2} \right]$ образ гомоморфизма $\mu_U^{\text{Sp}} \left[\frac{1}{2} \right]$, т.е.

$$\text{Sp}^*(X) \left[\frac{1}{2} \right] = \text{Im} \left(\mu_U^{\text{Sp}}(\text{Sp}^*(X)) \right) \left[\frac{1}{2} \right] = \text{Im} \varkappa^*(U^*(X)).$$

Рассмотрим $(n + 1)$ -мерное векторное пространство \mathbb{H}^{n+1} над телом кватернионов \mathbb{H} и положим

$$S^{4n+3} = \{v \in \mathbb{H}^{n+1} \mid |v| = 1\}.$$

Вложение тора группы $\mathrm{Sp}(1)$

$$S^1 \subset S^3 = \mathrm{Sp}(1)$$

индуцирует действие группы S^1 на S^{4n+3} .

Обозначим через

$$\mathbb{C}P_*^{2n+1} := S^{4n+3}/S^1$$

соответствующее Sp -многообразие.

Для многообразия

$$\mathbb{C}P_*^{2n+1} = S^{4n+3}/S^1$$

стабильное касательное расслоение имеет вид

$$(n+1)(\xi + \bar{\xi}),$$

где $\xi \rightarrow \mathbb{C}P_*^{2n+1}$ – каноническое комплексное линейное расслоение.

Тем самым, многообразие $\mathbb{C}P_*^{2n+1}$ будем рассматривать как S^p -многообразие.

Задача.

Докажите, что класс $[\mathbb{C}P_*^{2n+1}] \in \Omega_U^{-(4n+2)}$ равен 0 для всех $n \geq 0$.

Пусть

$$\omega = (n_1, \dots, n_{2s})$$

– набор чётного числа целых неотрицательных чисел.

Положим

$$\mathbb{C}P_*^\omega = \prod_{l=1}^{2s} \mathbb{C}P_*^{2n_l+1}.$$

На каждом сомножителе задано каноническое линейное расслоение

$$\xi_l \longrightarrow \mathbb{C}P_*^{2n_l+1}.$$

Определение многообразий Стонга

Пусть q – положительное целое число. Многообразием Стонга (R. Stong)

$$M(\omega; q)$$

называется $\mathbb{S}p$ -многообразием, которое реализуется как подмногообразие в $\mathbb{C}P_*^\omega$, двойственное симплектическому расслоению

$$q\xi, \quad \text{где} \quad \xi = \xi_1 \cdots \xi_{2s} + \bar{\xi}_1 \cdots \bar{\xi}_{2s}.$$

Многообразия $M(\omega; 1)$ впервые были введены Стонгом.

Теорема (R. Stong, 1967)

Множество всех классов кобордизмов $[M(\omega; 1)]$ мультипликативно порождает кольцо $\Omega_{\mathbb{S}p}[\frac{1}{2}]$.

В настоящее время многообразия Стонга являются основными примерами $\mathbb{S}p$ -многообразий и широко используются в вычислениях симплектических кобордизмов.

Инволюция и двулистное накрытие

Пусть $1, i, j, k$ – стандартные образующие тела кватернионов \mathbb{H} над полем вещественных чисел \mathbb{R} . Тогда

$$(1, i) \in S^1 \subset Sp(1) \subset \mathbb{H}.$$

Элемент

$$\mathcal{J} = (j, \dots, j) \in \prod Sp(1)$$

определяет свободную инволюцию на многообразии $\mathbb{C}P_*^\omega$.

Таким образом, получаем двулистное накрытие

$$\pi : \mathbb{C}P_*^\omega \longrightarrow \mathbb{C}P_*^{\omega; \mathcal{J}} = \mathbb{C}P_*^\omega / \mathcal{J}.$$

Лемма

- (i) Стабильное касательное расслоение к многообразию $\mathbb{C}P_*^{\omega; \mathcal{J}}$ является комплексным самосопряжённым расслоением.
- (ii) Над многообразием $\mathbb{C}P_*^{\omega; \mathcal{J}}$ определено комплексное самосопряжённое расслоение $\zeta(\mathcal{J})$, такое, что $\pi^*\zeta(\mathcal{J}) = \zeta$.

Многообразия $M(\omega; q; \mathcal{J})$

Обозначим через $M(\omega; q; \mathcal{J})$ многообразие, которое реализуется как подмногообразие в $\mathbb{C}P_*^{\omega; \mathcal{J}}$, двойственное комплексному самосопряжённому расслоению $q \cdot \zeta(\mathcal{J})$.

Так как

$$\pi^* \zeta(\mathcal{J}) = \zeta,$$

то можно выбрать многообразия $M(\omega; q)$ и $M(\omega; q; \mathcal{J})$ так, чтобы имело место накрытие

$$\pi : M(\omega; q) \longrightarrow M(\omega; q; \mathcal{J}).$$

Следствие

Пусть

$$[M(\omega; q)] \quad \text{и} \quad [M(\omega; q; \mathcal{J})]$$

– классы самосопряженных кобордизмов многообразий $M(\omega; q)$ и $M(\omega; q; \mathcal{J})$.

Тогда

$$[M(\omega; q)] = 2[M(\omega; q; \mathcal{J})].$$

Приложения операторов обобщенного сдвига

Пусть

$$\mathcal{F}^2 - \Theta_1(x, y)\mathcal{F} + \Theta_2(x, y) = 0$$

– двузначная формальная группа в кобордизмах над кольцом Λ .

Первый канонический инвариантный дифференциальный оператор имеет вид

$$d_1 = d_1^x = \frac{1}{2}\varphi_1(x)\frac{d}{dx} + \frac{1}{8}\varphi_2(x)\frac{d^2}{dx^2}.$$

Оператор d_1 задает в $\Omega_U[[x]]$ структуру коалгебры с диагональю

$$\Delta_y^x : \Omega_U[[x]] \longrightarrow \Omega_U[[x, y]] : \Delta_y^x(x^n) = \frac{1}{2}(z_1^n + z_2^n),$$

где $z_1 + z_2 = \Theta_1(x, y)$, $z_1 z_2 = \Theta_2(x, y)$ и Δ_y^x – гомоморфизм Ω_U -модулей.

Пусть $\Psi_q(x) \in \Lambda \otimes \mathbb{Q}[[x]]$, $q \geq 0$, – единственное решение уравнения

$$d_1 \Psi_q(x) = x^q, \quad \Psi_q(0) = 0.$$

Обозначим через $u_q(x, y)$ единственное решение [уравнения обобщенного сдвига](#)

$$d_1^x u_q(x, y) = d_1^y u_q(x, y), \quad u_q(x, 0) = \Psi_q(x).$$

т.е. $u_q(x, y) = \Delta_y^x(\Psi_q(x))$.

Свойства рядов $H_q(x, y)$

Положим

$$H_q(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u_q(x, y).$$

Теорема (Бухштабер В.М., 1978)

Ряды $H_q(x, y)$ имеют следующие свойства:

$$H_q(x, y) \in \mathcal{L}[[x, y]], \quad H_0(x, y) = 0, \quad H_1(0, 0) = 1.$$

При $q \geq 1$ имеет место рекуррентное соотношение

$$H_{q+1}(x, y) = \Theta_1(x, y)H_q(x, y) - \Theta_2(x, y)H_{q-1}(x, y).$$

Теорема (Бухштабер В.М., 1978)

Ряд $H_1(x, y)$ не лежит в кольце $\Lambda[[x, y]]$, т. е. вложение $\Lambda \subset \mathcal{L}$ не является эпиморфизмом.

Теорема (Бухштабер В.М., 1978)

Для формальных рядов $H_q(x, y) \in \mathcal{L}[[x, y]]$ имеет место формула:

$$H_q(x, y) = - \sum_{k, l \geq 0} [M(k, l; q)] x^k y^l.$$

Следствие (Бухштабер В.М., 1978)

Для коэффициентов $\Theta_1(x, y)$ и $\Theta_2(x, y)$ двузначной формальной группы в координатах имеют место формулы:

$$\Theta_1(x, y) = \frac{H_2(x, y)}{H_1(x, y)}, \quad \Theta_2(x, y) = \Theta_1^2(x, y) - \frac{H_3(x, y)}{H_1(x, y)},$$

где $H_1(0, 0) = 1$.

Кольцо Λ_{St} многообразий Стонга

Обозначим через Λ_{St} подкольцо в Ω_U , порожденное классами кобордизмов $[M(\omega; q; \mathcal{J})]$ для всех наборов ω и положительных целых чисел q .

Имеем включение:

$$\Lambda_{St} \subset \text{Im} \{ \mu_{\mathcal{J}}^{SC} : \Omega_{SC} \longrightarrow \Omega_U \},$$

в частности, $\Lambda_{St} \subset \mathcal{L}$.

Следовательно, $\Lambda \subset \Lambda_{St}$. При этом $\Lambda \neq \Lambda_{St}$.

Теорема (Бухштабер В.М., 1978)

Кольцо Λ_{St} порождено классами кобордизмов многообразий $M(k, l; s; \mathcal{J})$, где (k, l) пробегает все пары неотрицательных чисел, а $s = 1, 2, 3$.

Следствие (Бухштабер В.М., 1978)

Класс комплексных кобордизмов $[M(\omega; q)]$ любого многообразия Стонга $M(\omega; q)$ является полиномом от классов $[M(k, l; s; \mathcal{J})]$ для $s = 1, 2, 3$.

Рассмотрим род Тодда и соответствующую ему формальную группу

$$F^T(u, v) = u + v - auv.$$

Задача

Доказать, что двузначная формальная группа квадрата модуля формальной группы F^T задается уравнением

$$z^2 - \Theta_1^T(x, y)z + \Theta_2^T(x, y) = 0,$$

где

$$\Theta_1^T(x, y) = 2x + 2y - a^2xy, \quad \Theta_2^T(x, y) = (x - y)^2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} h^T(x) &= -x(4 - a^2x), \\ \sigma^T(x, y) &= xy(4 - a^2x)(4 - a^2y). \end{aligned}$$

Из формул $\Theta_1 = H_2/H_1$, $\Theta_2 = \Theta_1^2 - H_3/H_1$ и из явного вида ряда H_q получаем:

Теорема

Для многообразий Стонга $M(k, l; i)$ имеют место формулы

$$\sum_{k, l \geq 0} T([M(k, l; 1)]) x^k y^l \equiv -1,$$

$$\sum_{k, l \geq 0} T([M(k, l; 2)]) x^k y^l \equiv -\Theta_1^T(x, y),$$

$$\sum_{k, l \geq 0} T([M(k, l; 3)]) x^k y^l \equiv (x - y)^2 - (\Theta_1^T(x, y))^2.$$

Сигнатура многообразий Стонга

Рассмотрим формальную группу, соответствующую сигнатуре:

$$F^\tau(u, v) = \frac{u + v}{1 + buv}.$$

Задача

Доказать, что двузначная формальная группа квадрата модуля формальной группы F^τ задается уравнением

$$z^2 - \Theta_1^\tau(x, y)z + \Theta_2^\tau(x, y) = 0,$$

где

$$\Theta_1^\tau(x, y) = 2 \frac{x + y + 4bxy + b^2xy(x + y)}{(1 - b^2xy)^2}, \quad \Theta_2^\tau(x, y) = \frac{(x - y)^2}{(1 - b^2xy)^2}.$$

Задача

Вычислить $\tau([M(k, l; q)])$, $q = 1, 2, 3$.

Действие оператора d_1

Пусть d_1 – первый оператор инвариантного дифференцирования на формальной группе геометрических кобордизмов $F_U(u_1, u_2)$.

Напомним, что

$$d_1 u = \frac{du}{dg(u)} = \frac{1}{\mathbb{C}P(u)},$$

где $u = c_1^U(\xi(1; \mathbb{C})) \in U^2(\mathbb{C}P^\infty)$.

Для любого клеточного комплекса X имеет место изоморфизм

$$U^*(X \times \mathbb{C}P^\infty) \simeq U^*(X)[[u]].$$

Оператор d_1 определяет гомоморфизм $U^*(X)$ -модулей

$$d_1 : U^*(X)[[u]] \longrightarrow U^*(X)[[u]].$$

Кольцо $\mathcal{L}^*(X \times \mathbb{C}P^\infty) \subset U^*(X)[[u]]$ не замкнуто относительно обычного дифференцирования $\frac{d}{du}$, но замкнуто относительно дифференцирования d_1 .

Например,

$$x = \bar{u}u \in \mathcal{L}^4(\mathbb{C}P^\infty), \quad \frac{dx}{dg(u)} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{C}P^\infty), \quad \text{но} \quad \frac{dx}{du} \notin \mathcal{L}^2(\mathbb{C}P^\infty).$$

Замкнутость относительно d_1

Лемма

Пусть X – клеточный комплекс, у которого группы гомологий не имеют 2-кручения. Тогда если

$$a \in \mathcal{L}^*(X \times \mathbb{C}P^\infty),$$

то

$$d_1 a \in \mathcal{L}^*(X \times \mathbb{C}P^\infty).$$

Таким образом, кольцо

$$\mathcal{L}^*(X \times \mathbb{C}P^\infty)$$

замкнуто относительно инвариантного дифференцирования

$$d_1 = \frac{d}{dg(u)}.$$

Следствие

Кольцо $\mathcal{L}^*(\mathbb{C}P^\infty)$ является дифференциальным расширением кольца $\mathcal{L}^*(\mathbb{H}P^\infty)$ относительно оператора $d_1 = \frac{d}{dg(u)}$.

Кольцо $\mathcal{L}^*(\mathbb{C}P^\infty)$

Теорема (Бухштабер В.М., 1978)

Имеет место изоморфизм

$$\mathcal{L}^*(\mathbb{C}P^\infty) \simeq \mathcal{L} \left[\left[x, \frac{dx}{dg(u)} \right] \right] / \left\{ \left(\frac{dx}{dg(u)} \right)^2 - h(x) \right\}.$$

Здесь

$$h(x) = \frac{1}{4} \frac{\partial \sigma(x_1, x_2)}{\partial x_2} \Big|_{\substack{x_1=x \\ x_2=0}} = - \frac{\partial}{\partial x_2} (x_1 \Theta_1(x_1, x_2) - \Theta_2(x_1, x_2)) \Big|_{\substack{x_1=x \\ x_2=0}}$$

и $\sigma(x_1, x_2) = H_1^2(x_1, x_2)h(x_1)h(x_2)$.

Кольцо $\mathcal{L}^*(\mathbb{C}P^\infty)$ является квадратичным дифференциальным расширением кольца $\mathcal{L}^*(\mathbb{H}P^\infty) \cong \mathcal{L}[[x]]$.

Задача.

Вычислите $\frac{d^2 x}{dg(u)^2}$.

Теорема (Бухштабер В.М., 1978)

Имеет место изоморфизм

$$\mathcal{L}^{4*}(\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty) \simeq \mathcal{L}[[x_1, x_2, Z]] / \{Z^2 - \Theta_1(x_1, x_2)Z + \Theta_2(x_1, x_2)\}.$$

Для элемента Z выполнена формула

$$2 \frac{dZ}{dg(u_1)} = \frac{\partial \Theta_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dg(u_1)} + \frac{\partial \Theta_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dg(u_2)}.$$

Таким образом, $\mathcal{L}^{4*}(\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty)$ является квадратичным расширением кольца $\mathcal{L}^{4*}(\mathbb{H}P^\infty \times \mathbb{H}P^\infty) \cong \mathcal{L}[[x_1, x_2]]$ при помощи закона двузначной формальной группы.

Теорема (Бухштабер В.М., 1978)

Для любого элемента $a \in \mathcal{L}^{4*+2}(\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty)$ имеет место формула

$$2a = B_1(x_1, x_2) \frac{dx_1}{dg(u_1)} + B_2(x_1, x_2) \frac{dx_2}{dg(u_2)},$$

где $B_i(x_1, x_2) \in \mathcal{L}[[x_1, x_2]]$, $i = 1, 2$.

Кольцо $\mathcal{L}^*(\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty)$ является сервантным дифференциальным расширением кольца $\mathcal{L}^{4*}(\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty) \subset U^*(\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty)$ с операторами

$$\frac{d}{dg(u_1)} \quad \text{и} \quad \frac{d}{dg(u_2)}.$$

Теорема (Бухштабер В.М., 1978)

Для любого элемента $a \in \mathcal{L}^{4*}(\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty)$ имеет место представление

$$2a = 2B_1(x_1, x_2, x_3) + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} B_{ij}(x_1, x_2, x_3)Z_{ij},$$

где $Z_{ij} = \pi_{ij}^*Z$ и $\pi_{ij} : \mathbb{C}P_1^\infty \times \mathbb{C}P_2^\infty \times \mathbb{C}P_3^\infty \longrightarrow \mathbb{C}P_i^\infty \times \mathbb{C}P_j^\infty$ – очевидная проекция.

Кольцо $\mathcal{L}^*(\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty)$

Теорема (Бухштабер В.М., 1978)

Для элемента $W = m^*(3)x$, где $m(3) : \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ и $m^*(3)(\xi) = \xi_1\xi_2\xi_3$, имеет место формула

$$2W = \Theta_1(x_1, Z_{23}) + \Theta_1(x_2, Z_{13}) + \Theta_1(Z_{12}, x_3) - \Omega(x_1, x_2, x_3).$$

Здесь $\Omega(x_1, x_2, x_3)$ – формальный ряд, стоящий в левой части первого уравнения ассоциативности двузначной формальной группы в кобордизмах.

Задача.

Дайте полное описание кольца $\mathcal{L}^*(\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty) \subset U^*(\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty)$

Характеристические h^* -числа

Пусть $B = \mathbb{Z}[b_1, \dots, b_n, \dots]$, $\deg b_n = -2n$.

Каждой \mathbb{C} -ориентированной теории когомологий $(h^*(\cdot), u_h)$ соответствует \mathbb{C} -ориентированная теория $(h^*(\cdot; B), u_h^B)$, где

$$h^*(\cdot; B) = h^*(\cdot) \otimes_{\mathbb{Z}} B \text{ и } u_h^B = t + \sum_{n \geq 1} b_n t^{n+1}, t = u_h.$$

Определено мультипликативное преобразование $\mu_B^U: U^*(\cdot) \rightarrow h^*(\cdot; B)$ и соответствующий гомоморфизм колец $\mu_B^U: \Omega_U \rightarrow \Omega_h \otimes_{\mathbb{Z}} B$.

Для стабильно комплексного многообразия M^{2n} имеем

$$\mu_B^U([M^{2n}]) = \mu_h^U([M^{2n}]) + \sum_{|\omega| > 0} c_\omega^h([M^{2n}]) b^\omega, \quad (1)$$

где $\omega = (i_1, \dots, i_k, \dots)$, $b^\omega = b_1^{i_1} \dots b_k^{i_k} \dots$

Коэффициенты $c_\omega^h([M^{2n}]) \in \Omega_h$ в разложении (1) называются **характеристическими h^* -числами** многообразия M^{2n} .

Задачи I: Характеристические h^* -числа

Пусть $H^*(\cdot; \mathbb{Z})$ – классические когомологии с ориентацией

$$t \in H^2(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}).$$

Задача 1.

Построить мультипликативные базисы

$$\{a_n^*\} \subset \Omega_U, \quad \{b_n^*\} \subset B,$$

такие, что

$$\mu_B^U(a_n^*) = \lambda_n b_n^*, \quad n = 1, 2, \dots,$$

и найти числа

$$\lambda_n \in \mathbb{Z}.$$

Задачи I: Характеристические h^* -числа

Пусть K^* – комплексная K -теория над кольцом

$$\mathbb{Z}[\beta^{-1}, \beta]$$

с ориентацией

$$(1 - \bar{\xi})\beta^{-1} \in K^2(\mathbb{C}P^\infty),$$

где ξ – тавтологическое комплексное линейное расслоение.

Задача 2.

Доказать, что для $a \in \Omega_U^{-2n}$ существует

$$\tilde{a} \in \Omega_U^{-2n}$$

такой, что

$$a = m\tilde{a}, \quad m \in \mathbb{Z},$$

тогда и только тогда, когда

$$\mu_K^U(a) = m \mu_K^U(\tilde{a}).$$

Пусть MSU – спектр Тома теории SU -кобордизмов. Каноническое отображение

$$MSp \longrightarrow MU$$

разлагается в композицию

$$MSp \longrightarrow MSU \longrightarrow MU.$$

Используя отрезок свободной резольвенты A^U -модуля $U^*(MSU)$, введём мультипликативный функтор

$$\mathcal{L}_{SU}^*(X) = \text{Hom}_{A^U}(U^*(MSU), U^*(X)).$$

Задачи II: SU -кобордизмы

Напомним

$$\mathcal{L}_{Sp}^*(X) = \mathcal{L}^*(X) = \text{Hom}_{AU}(U^*(MSp), U^*(X)).$$

Тогда получаем последовательность преобразований мультипликативных функторов

$$\mathcal{L}_{Sp}^*(X) \longrightarrow \mathcal{L}_{SU}^*(X) \longrightarrow U^*(X).$$

Задача 3.

Вычислить $\mathcal{L}_{SU}^*(X)$ для следующий пространств X :

$$\text{pt}, \quad \mathbb{C}P^\infty, \quad \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty, \quad \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty.$$

Положим

$$\mathcal{L}_{SC}^*(X) = \text{Hom}_{AU}(U^*(MSC), U^*(X)).$$

Тогда получаем последовательность преобразований мультипликативных функторов

$$\mathcal{L}_{Sp}^*(X) \longrightarrow \mathcal{L}_{SC}^*(X) \longrightarrow U^*(X).$$

Задача 4.

Вычислить $\mathcal{L}_{SC}^*(X)$ для следующий пространств X :

$$\text{pt}, \quad \mathbb{C}P^\infty, \quad \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty, \quad \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty.$$



В.М. Бухштабер, С.П. Новиков,
Формальные группы, степенные системы и операторы Адамса.
Матем. Сб., 84(126):1 (1971), 81–118.



В.М. Бухштабер,
Топологические приложения теории двузначных формальных групп.
Изв. АН СССР, сер. мат., 42:1 (1978), 130–184.

Спасибо за внимание!