Лекция 1. Геометрические кобордизмы, формальные группы и роды Хирцебруха

Т. Е. Панов

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
МГУ, НИУ ВШЭ

Торическая топология, гиперболическая геометрия и комбинаторная теория групп
Школа для молодых исследователей
Сириус, Сочи, 17–21 мая 2026 г.

Элементы теории формальных групп

R — коммутативное кольцо с 1.
Формальный степенной ряд $F(u,v) \in R[[u,v]]$ наз. (коммутативной одномерной) формальной группой над R, если

а) $F(u,0)=u,\ F(0,v)=v$;
б) $F(F(u,v),w)=F(u,F(v,w))$;
в) $F(u,v)=F(v,u)$.

Исходный пример — разложение вблизи единицы отображения умножения $G\times G\to G$ в одномерной алгебраической группе над полем k. (Что объясняет терминологию.)

Формальная группа F над R линеаризуема, если существует замена координат $u\mapsto g_F(u)=u+\sum_{i\geqslant 1} g_i u^{i+1}\in R[[u]]$, такая, что

$$g_F(F(u,v))=g_F(u)+g_F(v).$$

Теорема

Любая формальная группа F линеаризуема над $R \otimes \mathbb{Q}$.

Доказательство.

Рассмотрим ряд $\omega(u) = \frac{\partial F(u,w)}{\partial w}\Big|_{w=0}$. Применим $\frac{\partial}{\partial w}\Big|_{w=0}$ к обеим частям равенства $F(F(u,v),w) = F(u,F(v,w))$:

$$\omega(F(u,v)) = \frac{\partial F(F(u,v),w)}{\partial w}\Big|_{w=0} = \frac{\partial F(u,F(v,w))}{\partial F(v,w)} \cdot \frac{\partial F(v,w)}{\partial w}\Big|_{w=0} = \frac{\partial F(u,v)}{\partial v}\omega(v).$$

Отсюда $\frac{dv}{\omega(v)} = \frac{dF(u,v)}{\omega(F(u,v))}$, где u — параметр. Положим

$$g(u) = \int_0^u \frac{dv}{\omega(v)}.$$

Интегрируя равенство $\frac{dv}{\omega(v)} = \frac{dF(u,v)}{\omega(F(u,v))}$, получаем

$$g(w) = \int_0^w \frac{dv}{\omega(v)} = \int_0^w \frac{dF(u,v)}{\omega(F(u,v))} = \int_u^{F(u,w)} \frac{dt}{\omega(t)} = g(F(u,w)) - g(u),$$

что и означает, что g линеаризует F. □

Ряд $g_F(u) = u + \sum_{i\geqslant 1} g_i u^{i+1}$, удовлетворяющий соотношению $g_F(F(u,v)) = g_F(u) + g_F(v)$, называется логарифмом ф. г. F. Его функционально обратный ряд $f_F(t) \in R \otimes \mathbb{Q}[[t]]$ называется экспонентой ф. г. F, так что $F(u,v) = f_F(g_F(u) + g_F(v))$ над $R \otimes \mathbb{Q}$.

Если R не содержит кручения (т. е. $R \to R \otimes \mathbb{Q}$ — мономорфизм), то ф. г. полностью определяется своим логарифмом.

Пример

Мультипликативная формальная группа

$$F(u,v) = (1+u)(1+v) - 1 = u + v + uv.$$

Имеется 1-параметрическая градуированная версия

$$F_\beta(u,v) = u + v - \beta uv, \quad \deg\beta = -2,$$

с коэффициентами в $\mathbb{Z}[\beta]$. Её экспонента и логарифм суть

$$f(x) = \frac{1 - e^{-\beta x}}{\beta}, \quad g(u) = -\frac{\ln(1-\beta u)}{\beta} \in \mathbb{Q}[\beta].$$

Пример

Классический пример происходит из теории эллиптических функций. Существует единственная мероморфная функция $f(x)$ с $f(0)=0$ и $f'(0)=1$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$(f'(x))^2 = 1 - 2\delta f^2(x) + \varepsilon f^4(x)$$

с $\delta, \varepsilon \in \mathbb{C}$. Она униформизует эллиптическую кривую в модели Якоби $y^2 = 1 - 2\delta x^2 + \varepsilon x^4$. Если дискриминант

$$\Delta = \varepsilon(\delta^2 - \varepsilon)$$

не обращается в нуль, то кривая невырожденная, а $f(x)$ — двоякопериодическая функция эллиптический синус, обозначается $\mathrm{sn}(x)$. Её обратная задаётся эллиптическим интегралом

$$g(u) = \int_0^u \frac{dt}{\sqrt{1 - 2\delta t^2 + \varepsilon t^4}}.$$

Пример

Формула сложения Эйлера для $\mathrm{sn}(x)$:

$$F_{\mathrm{ell}}(u,v)=\mathrm{sn}(x+y)=\frac{u\sqrt{1-2\delta v^2+\varepsilon v^4}+v\sqrt{1-2\delta u^2+\varepsilon u^4}}{1-\varepsilon u^2v^2},$$

где $u=\mathrm{sn}\,x$, $v=\mathrm{sn}\,y$, задаёт эллиптическую формальную группу с экспонентой $\mathrm{sn}(x)$ и логарифмом $g(u)$ (эллиптический интеграл выше).

Рассматривая δ, ε как формальные параметры с $\deg\delta=-4$, $\deg\varepsilon=-8$, получаем универсальную эллиптическую формальную группу над кольцом $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}][\delta,\varepsilon]$.

Вырождение $\varepsilon=0$ даёт формулу сложения для $f(x)=\frac{\sin\sqrt{2\delta}x}{\sqrt{2\delta}}$, а вырождение $\varepsilon=\delta^2$ даё формул сложения для $f(x)=\frac{\tanh\sqrt{\delta}x}{\sqrt{\delta}}$.

Если $r\colon R \to R'$ — гомоморфизм колец и $F = \sum_{k,l} a_{kl} u^k v^l$ — ф. г. над R, то $r(F) := \sum_{k,l} r(a_{kl}) u^k v^l \in R'[[u, v]]$ — ф. г. над R'.

Формальная группа $\mathcal{F}$ над кольцом A называется универсальной, если для любой ф. г. F над любым кольцом R существует единственный гомоморфизм $r\colon A \to R$, для которого $F = r(\mathcal{F})$.

Предложение

Универсальная формальная группа $\mathcal{F}(u, v) = u + v + \sum_{k\geqslant1, l\geqslant1} a_{kl} u^k v^l$ *существует, а её кольцо коэффициентов есть факторкольцо*

$$A = \mathbb{Z}[\, a_{kl}\colon k \geqslant 1,\ l \geqslant 1]/\mathcal{I}, \quad \deg a_{kl} = -2(k + l - 1),$$

по «идеалу ассоциативности» $\mathcal{I}$*, порождённому коэффициентами ряда* $\mathcal{F}(\mathcal{F}(u, v), w) - \mathcal{F}(u, \mathcal{F}(v, w))$.

Более того, $\mathcal{F}$ *единственна: если* $\mathcal{F}'$ *— другая универсальная ф. г. над* A'*, то существует изоморфизм* $r\colon A \to A'$*, для которого* $\mathcal{F}' = r(\mathcal{F})$.

Обратим внимание, что определение формальной группы не подразумевает градуировки кольца коэффициентов. Однако, кольцо коэффициентов универсальной формальной группы оказывается естестенно градуированным.

Естественная градуировка: $\deg u = \deg v = 2$, $\deg a_{kl} = -2(k + l - 1)$; тогда всё выражение

$$\mathcal{F}(u, v) = u + v + \sum_{k\geqslant 1, l\geqslant 1} a_{kl} u^k v^l$$

становится однородным степени 2.

Теорема (Лазар)

Кольцо коэффициентов A универсальной формальной группы $\mathcal{F}$ изоморфно градуированному кольцу многочленов $\mathbb{Z}[a_1, a_2, \ldots]$ от бесконечного числа переменных, $\deg a_i = -2i$.

Конструкция (геометрические кобордизмы)

Для клеточного пространства X имеем $H^2(X) = [X, \mathbb{C}P^\infty]$. Так как $\mathbb{C}P^\infty = MU(1)$, каждый $x \in H^2(X)$ задаёт класс кобордизма $u_x \in U^2(X)$ — геометрический кобордизм. Поэтому $H^2(X) \subset U^2(X)$ (подмножество, не подгруппа!)

Если X — многообразие, то $u_x \in U^2(X)$ соотв. подмногообразию $M \subset X$ коразмерности 2 с комплексной структурой в норм. расслоении.

Действительно, $x \in H^2(X)$ задаёт гомотопич. класс $f_x \colon X \to \mathbb{C}P^\infty$. Сделаем $f_x(X)$ трансверсальным к гиперплоскости $H \subset \mathbb{C}P^N \subset \mathbb{C}P^\infty$. Тогда $M_x = f_x^{-1}(H)$ — подмногообразие коразмерности 2 в X. Гомотопия отображения f_x задаёт кобордизм вложения $M_x \to X$.

Обратно, для вложения $i \colon M \subset X$ композиция $X \to Th(\nu) \to MU(1) = \mathbb{C}P^\infty$ отображения Понтрягина–Тома и классифицирующего отображения нормального расслоения ν задаёт элемент $x_M \in H^2(X)$, т. е. геометрический кобордизм.

Класс $i_*\langle M\rangle \in H_*(X)$ двойствен по Пуанкаре к $x_M \in H^2(X)$ (X ориент.)

Кольцевые образующие для Ω^U

Характеристическое число s_n, соответствующее многочлену $t_1^n + \ldots + t_n^n$, обращается в нуль на разложимых кольца бордизмов Ω^U. Более того, это число распознаёт неразложимые элементы, которые можно выбрать в качестве образующих кольца многочленов:

Теорема

Класс бордизма $[M] \in \Omega^U_{2n}$ можно выбрать в качестве полиномиальной образующей a_n кольца кобордизмов $\Omega^U \cong \mathbb{Z}[a_1, a_2, \ldots]$ т. и т. т., когда

$$s_n[M] = \begin{cases} \pm 1, & \text{если } n \neq p^k - 1 \text{ для простого } p; \\ \pm p, & \text{если } n = p^k - 1 \text{ для простого } p. \end{cases}$$

Универсальное описание многообразий, задающих полиномиальные образующие $a_n \in \Omega^U$, *отсутствует*. Однако имеется следующее семейство многообразий, классы бордизма которых *мультипликатино порождают* кольцо Ω^U.

Конструкция (гиперповерхности Милнора)

Гиперповерхность Милнора в $\mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j$ $(0 \leqslant i \leqslant j)$

$H_{ij} = \{(z_0 : \dots : z_i) \times (w_0 : \dots : w_j) \in \mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j : z_0 w_0 + \dots + z_i w_i = 0\}$

Заметим, что $H_{0j} \cong \mathbb{C}P^{j-1}$.

H_{ij} является гиперплоским сечением вложения Сегре

$$\sigma\colon \mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j \to \mathbb{C}P^{(i+1)(j+1)-1},$$
$$(z_0 : \dots : z_i) \times (w_0 : \dots : w_j) \mapsto (z_0 w_0 : z_0 w_1 : \dots : z_k w_l : \dots : z_i w_j),$$

Также, H_{ij} отождествляется с множеством пар (ℓ, α), где ℓ — прямая в $\mathbb{C}^{i+1}$, а α — гиперплоскость в $\mathbb{C}^{j+1}$, содержащая ℓ.
В частности, $H_{22} = Fl(\mathbb{C}^3)$ — многообразие флагов в $\mathbb{C}^3$.
Проекция $H_{ij} \to \mathbb{C}P^i$, $(\ell, \alpha) \mapsto \ell$, есть расслоение со слоем $\mathbb{C}P^{j-1}$.

Пусть p_1 и p_2 — проекции $\mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j$ на сомножители. Тогда

$$H^*(\mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j) = \mathbb{Z}[x,y]/(x^{i+1} = 0,\ y^{j+1} = 0),$$

где $x = p_1^* c_1(\bar\eta)$, $y = p_2^* c_1(\bar\eta)$ и η — тавтологическое расслоение.

Предложение

H_{ij} представляет геометрический кобордизм $\mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j$, соотв. классу $x + y \in H^2(\mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j)$. В частности, образ фунд. класса $\langle H_{ij} \rangle$ в $H_{2(i+j-1)}(\mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j)$ двойствен по Пуанкаре к $x + y$.

Доказательство.

Имеем $x + y = c_1(p_1^*(\bar\eta) \otimes p_2^*(\bar\eta))$. Расслоение $p_1^*(\bar\eta) \otimes p_2^*(\bar\eta)$ классифицируется вложением Сегре $\sigma\colon \mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j \to \mathbb{C}P^{(i+1)(j+1)-1} \to \mathbb{C}P^\infty$. Подмногообразие коразмерности 2 в $\mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j$, соответствующее классу $x + y$ есть прообраз $\sigma^{-1}(H)$ гиперплоскости общего положения в $\mathbb{C}P^{(i+1)(j+1)-1}$. Гиперповерхность Милнора H_{ij} есть $\sigma^{-1}(H)$ для одной из таких гиперплоскостей H. $\square$

Лемма

$$s_{i+j-1}[H_{ij}] = \begin{cases} j & \textit{при} \quad i = 0; \\ -\binom{i+j}{i} & \textit{при} \quad i > 1. \end{cases}$$

Доказательство.

Стабильно комплексная струкура на $H_{0j} = \mathbb{C}P^{j-1}$ происходит из $\mathcal{T}(\mathbb{C}P^{j-1}) \oplus \mathbb{C} \cong \bar\eta \oplus \dots \oplus \bar\eta$ (j слагаемых) и $x = c_1(\bar\eta)$, поэтому

$$s_{j-1}[\mathbb{C}P^{j-1}] = jx^{j-1}\langle \mathbb{C}P^{j-1}\rangle = j.$$

Пусть ν нормальное расслоение вложения $\iota\colon H_{ij} \hookrightarrow \mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j$. Тогда

$$\mathcal{T}(H_{ij}) \oplus \nu = \iota^*(\mathcal{T}(\mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j)).$$

Имеем $s_{i+j-1}(\nu) = \iota^*(x+y)^{i+j-1}$ и
$s_{i+j-1}(\mathcal{T}(\mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j)) = (i+1)x^{i+j-1} + (j+1)y^{i+j-1} = 0$ при $i > 1$, т. е.

$$\begin{aligned} s_{i+j-1}[H_{ij}] &= -s_{i+j-1}(\nu)\langle H_{ij}\rangle = -\iota^*(x+y)^{i+j-1}\langle H_{ij}\rangle \\ &= -(x+y)^{i+j}\langle \mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j\rangle = -\binom{i+j}{i}. \quad \square \end{aligned}$$

Теорема

Классы бордизма $\{[H_{ij}], 0 \leqslant i \leqslant j\}$ *порождают кольцо* Ω^U.

Доказательство.

$$\text{НОД}\left(\binom{n+1}{i},\ 1 \leqslant i \leqslant n\right) = \begin{cases} p & \text{при } n = p^k - 1, \\ 1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Из вычисления $s_{i+j-1}[H_{ij}]$ получаем, что для некоторой целочисленной линейной комбинации классов бордизма $[H_{ij}]$ с $i + j = n + 1$ число s_{i+j-1} равно p или 1, как требуется для полиномиальной обр. a_n. □

Пример

- $\Omega_2^U = \mathbb{Z}$, образующая $[\mathbb{C}P^1]$, так как $1 = 2^1 - 1$ и $s_1[\mathbb{C}P^1] = 2$;
- $\Omega_4^U = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, образующие $[\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1]$ и $[\mathbb{C}P^2]$, так как $2 = 3^1 - 1$ и $s_2[\mathbb{C}P^2] = 3$;
- $[\mathbb{C}P^3]$ *нельзя* взять в качестве образующей $a_3 \in \Omega_6^U$, так как $s_3[\mathbb{C}P^3] = 4$, а $s_3(a_3) = \pm 2$. На самом деле $a_3 = [H_{22}] + [\mathbb{C}P^3]$.

Формальная группа геометрических кобордизмов

Приложения формальных групп в теории кобордизмов основаны на следующей фундаментальной конструкции С. П. Новикова.

X — клеточное пространство и $u, v \in U^2(X)$ — геометрические кобордизм, соответствующие классам $x, y \in H^2(X)$. Обозначим $u +_H v$ — геометрический кобордизм, соответствующий классу когомологий $x + y$.

Предложение

В $U^2(X)$ имеет место соотношение

$$u +_H v = F_U(u, v) = u + v + \sum_{k\geqslant 1,\, l\geqslant 1} \alpha_{kl}\, u^k v^l,$$

где $\alpha_{kl} \in \Omega_U^{-2(k+l-1)}$ не зависят от X. Ряд $F_U(u, v)$ является формальной группой над кольцом комплексных кобордизмов Ω_U.

Доказательство.

Вычислим на универсальном примере $X = \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty$. Тогда

$$U^*(\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty) = \Omega_U[[\underline{u}, \underline{v}]],$$

где $\underline{u}, \underline{v}$ — канонические геометрические кобордизмы, задаваемые проекциями $\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty$ на сомножители.
Имеем соотношение в $U^2(\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty)$:

$$\underline{u} +_H \underline{v} = \sum_{k,l \geqslant 0} \alpha_{kl}\, \underline{u}^k \underline{v}^l,$$

где $\alpha_{kl} \in \Omega_U^{-2(k+l-1)}$.

Теперь пусть геометрические кобордизмы $u, v \in U^2(X)$ задаются отображениями $f_u, f_v \colon X \to \mathbb{C}P^\infty$. Тогда $u = (f_u \times f_v)^*(\underline{u})$, $v = (f_u \times f_v)^*(\underline{v})$ и $u +_H v = (f_u \times f_v)^*(\underline{u} +_H \underline{v})$, где $f_u \times f_v \colon X \to \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty$. Применяя $(f_u \times f_v)^*$ (гомоморфизм Ω_U-модулей) к соотношению выше, получим требуемое. □

Ряд $u +_H v = F_U(u, v)$ называется формальной группой геометрических кобордизмов или формальной группой в комплексных кобордизмах.

По определению, геометрический кобордизм $u \in U^2(X)$ есть первый класс Коннера-Флойда-Чженя $c_1^U(\xi)$ комплексного одномерного расслоения ξ над X, индуцированного из тавтологического отображением $f_u \colon X \to \mathbb{C}P^\infty$.

Таким образом, формальная группа геометрических кобордизмов даёт выражение $c_1^U(\xi \otimes \eta) \in U^2(X)$ в терминах классов $u = c_1^U(\xi)$ и $v = c_1^U(\eta)$ сомножителей:

$$c_1^U(\xi \otimes \eta) = F_U(u, v).$$

Теорема (Бухштабер)

$$F_U(u,v)=\frac{\sum_{i,j\geqslant 0}[H_{ij}]u^iv^j}{\left(\sum_{r\geqslant 0}[\mathbb{C}P^r]u^r\right)\left(\sum_{s\geqslant 0}[\mathbb{C}P^s]v^s\right)},$$

где H_{ij} $(0\leqslant i\leqslant j)$ *— гиперповерхности Милнора и* $H_{ji}=H_{ij}$.

Доказательство.

Рассмотрим отображение двойственности Пуанкаре–Атья $D\colon U^2(\mathbb{C}P^i\times\mathbb{C}P^j)\to U_{2(i+j)-2}(\mathbb{C}P^i\times\mathbb{C}P^j)$ и аугментацию $\varepsilon\colon U_*(\mathbb{C}P^i\times\mathbb{C}P^j)\to U_*(pt)=\Omega^U$.
Композиция $\varepsilon D\colon U^2(\mathbb{C}P^i\times\mathbb{C}P^j)\to\Omega^U_{2(i+j)-2}$ переводит геометр. кобордизмы в классы бордизма соответствующих подмногообразий.
В частности, $\varepsilon D(u+_Hv)=[H_{ij}]$, $\varepsilon D(u^kv^l)=[\mathbb{C}P^{i-k}][\mathbb{C}P^{j-l}]$. Применяя εD к $u+_Hv=F_U(u,v)$, получим $[H_{ij}]=\sum_{k,\,l}\alpha_{kl}[\mathbb{C}P^{i-k}][\mathbb{C}P^{j-l}]$.Тогда

$$\sum_{i,j}[H_{ij}]u^iv^j=\Bigl(\sum_{k,\,l}\alpha_{kl}u^kv^l\Bigr)\Bigl(\sum_{i\geqslant k}[\mathbb{C}P^{i-k}]u^{i-k}\Bigr)\Bigl(\sum_{j\geqslant l}[\mathbb{C}P^{j-l}]v^{j-l}\Bigr).\quad\square$$

Следствие

Коэффициенты формальной группы F_U геометрических кобордизмов порождают кольцо комплексных кобордизмов Ω_U.

Теорема (Мищенко)

Логарифм формальной группы F_U задаётся рядом

$$g_U(u) = u + \sum_{k\geqslant 1} [\mathbb{C}P^k]\frac{u^{k+1}}{k+1} \in \Omega_U \otimes \mathbb{Q}[[u]].$$

Доказательство.

$$\frac{dg_U(u)}{du} = \frac{1}{\left.\frac{\partial F_U(u,v)}{\partial v}\right|_{v=0}} = \frac{1+\sum_{k>0}[\mathbb{C}P^k]u^k}{1+\sum_{i>0}([H_{i1}]-[\mathbb{C}P^1][\mathbb{C}P^{i-1}])u^i}.$$

Имеем $[H_{i1}] = [\mathbb{C}P^1][\mathbb{C}P^{i-1}]$ (из вычисления чисел Чженя), что даёт $\frac{dg_U(u)}{du} = 1 + \sum_{k>0}[\mathbb{C}P^k]u^k$. $\square$

Теорема (Квиллен)

Формальная группа F_U геометрических кобордизмов универсальна.

Доказательство.

Пусть $\mathcal{F}$ — универсальная формальная группа над кольцом A. Тогда имеем гомоморфизм $r\colon A \to \Omega_U$, переводящий $\mathcal{F}$ в F_U.

Ряд $\mathcal{F}$, рассматриваемый как ф. г. над кольцом $A \otimes \mathbb{Q}$, обладает свойством универсальности для ф. г. над $\mathbb{Q}$-алгебрами. Записывая логарифм $\mathcal{F}$ как $\sum b_k \frac{u^{k+1}}{k+1}$, получаем $A \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}[b_1, b_2, \ldots]$.

По формуле Мищенко для логарифма, $r(b_k) = [\mathbb{C}P^k] \in \Omega_U$. Так как $\Omega_U \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}[[\mathbb{C}P^1], [\mathbb{C}P^2], \ldots]$, получаем, что $r \otimes \mathbb{Q}$ — изоморфизм.

По теореме Лазара кольцо A не имеет кручения, т. е. r инъективно.

С другой стороны, из формулы Бухштабера для $F_U(u, v)$ получаем, что $r(A)$ содержит классы бордизма $[H_{ij}] \in \Omega_U$, $0 \leqslant i \leqslant j$. Они порождают всё кольцо Ω_U, т. е. r сюръективно. $\square$

Роды Хирцебруха (комплексные)

Гомоморфизм $\varphi\colon \Omega^U \to R$ из кольца комплексных кобордизмов в коммутативное кольцо R с единицей даёт мультипликативный инвариант классов бордизма. Такой гомомофизм называется (комплексным) R-родом.

Пусть R не имеет аддитивного кручения. Тогда каждый R-род φ полностью определяется соответствующим гомоморфизмом $\Omega^U \otimes \mathbb{Q} \to R \otimes \mathbb{Q}$, который мы будем продолжать обозначать φ.

Конструкция Хирцебруха описывает гомоморфизмы $\varphi\colon \Omega^U \otimes \mathbb{Q} \to R \otimes \mathbb{Q}$ в терминах R-значных характеристических классов специального вида.

Рассмотрим гомоморфизм вычисления $e\colon \Omega^U \to H_*(BU)$ касательных характеристических чисел. Тогда e инъективен, а $e \otimes \mathbb{Q}\colon \Omega^U \otimes \mathbb{Q} \to H_*(BU;\mathbb{Q})$ — изоморфизм.

Таким образом, любой гоморфизм $\varphi\colon \Omega^U \otimes \mathbb{Q} \to R \otimes \mathbb{Q}$ задаётся элементом из $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(H_*(BU;\mathbb{Q}), R\otimes\mathbb{Q}) = H^*(BU;\mathbb{Q}) \otimes R$, или последовательностью многочленов $\{K_i(c_1,\ldots,c_i),\ i \geqslant 0\}$, $\deg K_i = 2i$.

Тот факт, что φ является кольцевым гомоморфизмом, накладывает ограничения на последовательность $\{K_i\}$. А именно, тождество

$$1 + c_1 + c_2 + \cdots = (1 + c_1' + c_2' + \cdots)\cdot(1 + c_1'' + c_2'' + \cdots)$$

влечёт тождество

$$\sum_{n\geqslant 0} K_n(c_1,\ldots,c_n) = \sum_{i\geqslant 0} K_i(c_1',\ldots,c_i')\cdot\sum_{j\geqslant 0} K_j(c_1'',\ldots,c_j'').$$

Такая последовательность $\mathcal{K} = \{K_i(c_1,\ldots,c_i), i \geqslant 0\}$ с $K_0 = 1$ называется мультипликативной последовательностью Хирцебруха.

Предложение

Мультипликативная последовательность $\mathcal{K}$ полностью задаётся рядом

$$Q(x) = 1 + q_1 x + q_2 x^2 + \cdots \in R \otimes \mathbb{Q}[[x]],$$

где $x = c_1$ и $q_i = K_i(1, 0, \ldots, 0)$. Кроме того, любой такой ряд $Q(x)$ задаёт мультпликативную последовательность.

Доказательство.

Из тождества

$$1 + c_1 + \cdots + c_n = (1 + x_1) \cdots (1 + x_n)$$

и свойства мультпликативности вытекает, что

$$Q(x_1) \cdots Q(x_n) = 1 + K_1(c_1) + K_2(c_1, c_2) + \cdots \\ + K_n(c_1, \ldots, c_n) + K_{n+1}(c_1, \ldots, c_n, 0) + \cdots . \qquad \square$$

Наряду с $Q(x)$ удобно рассматривать ряд $f(x) \in R \otimes \mathbb{Q}[[x]] = x + \cdots$, где $Q(x) = \frac{x}{f(x)}$.

Для рода $\varphi\colon \Omega^U \otimes \mathbb{Q} \to R \otimes \mathbb{Q}$ соответствующая мультипликативная последовательность Хирцебруха задаётся как

$$K_n(c_1, \ldots, c_n) = \text{часть степени } 2n \text{ от } \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{f(x_i)} \in R \otimes \mathbb{Q}[[c_1, \ldots, c_n]].$$

Рассматриваем $\prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{f(x_i)}$ как универсальный характеристический класс комплексных n-мерных расслоений. Тогда значение рода φ на $2n$-мерном стабильно комплексном многообразии M есть

$$\varphi[M] = \Bigl(\prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{f(x_i)}(\mathcal{T}M)\Bigr)\langle M\rangle.$$

Род Хирцебруха, соответствующий ряду $f(x) = x + \cdots \in R \otimes \mathbb{Q}[[x]]$, есть гомоморфизм $\varphi\colon \Omega^U \to R \otimes \mathbb{Q}$, заданный формулой выше.

Теорема

Для любого рода $\varphi\colon \Omega^U \to R$ *экспонента формальной группы* $\varphi(F_U)$ *есть ряд* $f(x) \in R \otimes \mathbb{Q}[[x]]$, *соответствующий роду* φ.

Это можно доказать непосредственно, используя конструкцию геометрических кобордизмов, либо вычисляя значения рода φ на проективных пространствах и сравнивая с формулой для логарифма формальной группы.

Пример

Универсальный род отображает стабильно комплексное многообразие M в его класс бордизма $[M] \in \Omega^U$, т. е. соответствует тождественному гомоморфизму $\varphi_U = \mathrm{id}\colon \Omega^U \to \Omega^U$.

Его соответствующий ряд $f_U(x)$ есть экспонента универсальной формальной группы геометрических кобордизмов.

Пример

Положим $R = \mathbb{Z}$ в этих примерах.

1. Старший класс Чженя есть род $c[M] = c_n[M]$ для $[M] \in \Omega^U_{2n}$. Здесь $Q(x) = 1 + x$ и $f(x) = \frac{x}{1+x}$. Для *почти* комплексного многообразия $c[M]$ равно эйлеровой характеристике.

2. L-род $L[M]$ соответствует ряду $f(x) = \tanh(x)$. L-род совпадает с сигнатурой $\mathrm{sign}(M)$ многообразия согласно классической теореме Хирцебруха. Это следует из соотношений $\mathrm{sign}(\mathbb{C}P^{2k}) = 1$ и $\mathrm{sign}(\mathbb{C}P^{2k+1}) = 0$ и вычисления функционально обратного ряда $g(u)$ (логарифма рода).

3. Род Тодда $\mathrm{td}[M]$ соответствует ряду $f(x) = 1 - e^{-x}$. Соответствующая формальная группа есть $F(u, v) = u + v - uv$, так что род Тодда принимает целые значения на классах бордизмов. Логарифм есть $-\ln(1 - u) = \sum_{k\geqslant 1} \frac{u^k}{k}$, что означает $\mathrm{td}[\mathbb{C}P^k] = 1$ для любого k. Соответствующий Q-ряд есть

$$Q(x) = \frac{x}{1-e^{-x}} = \sum_{k\geqslant 0}(-1)^k \frac{B_k}{k!} x^k.$$

Пример

4. χ_y-род Хирцебруха соответствует ряду

$$f(x) = \frac{1 - e^{-x(1+y)}}{1 + ye^{-x(1+y)}},$$

где y — параметр. Полагая $y = -1$, $y = 0$ и $y = 1$, получаем $c_n[M]$, род Тодда $\mathrm{td}[M]$ и L-род $L[M] = \mathrm{sign}(M)$, соответственно.

При работе с градуированными кольцами полезно рассмотреть 2-параметрический род, соответствующий ряду

$$f(x) = \frac{e^{ax} - e^{bx}}{ae^{bx} - be^{ax}}, \quad \deg a = \deg b = -2.$$

Он называется $\chi_{a,b}$-родом.
Исходный χ_y-род получается при $a = y$, $b = -1$.