Лекция 2. Эквивариантные кобордизмы и универсальный торический род

Т. Е. Панов

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
МГУ, НИУ ВШЭ

Торическая топология, гиперболическая геометрия и комбинаторная теория групп
Школа для молодых исследователей
Сириус, Сочи, 17–21 мая 2026 г.

Комплексно ориентированные теории

Мультипликативная обобщённая теория когомологий $X \mapsto h^*(X)$ комплексно ориентирована, если в ней имеется класс Эйлера для любого комплексного векторного расслоения.
Такой класс задаётся выбором элемента $c_1^h \in \widetilde{h}^2(\mathbb{C}P^\infty)$, который переходит в 1 при композиции

$$\widetilde{h}^2(\mathbb{C}P^\infty) \to \widetilde{h}^2(\mathbb{C}P^1) \cong h^0(pt).$$

c_1^h называется универсальным первым классом Чженя в теории h^*.
Для комплексного одномерного ξ над X, классифицируемого отображением $f\colon X \to BU(1)$, первый класс Чженя определяется как $c_1^h(\xi) = f^*(c_1^h) \in \widetilde{h}^2(X)$.

Примерами комплексно ориентированных теорий являются обычные когомологии, комплексная K-теория и комплексные кобордизмы.

Для одномерных расслоений ξ, η над X с $u = c_1^U(\xi)$ и $v = c_1^U(\eta)$

$$F_h(u, v) = c_1^h(\xi \otimes \eta)$$

— формальная группа над $h^*(pt)$, как и для комплексных кобордизмов. Ф. г. F_h классифицируется гомоморфизмом $\Omega_U = U^*(pt) \to h^*(pt)$ (родом), который продолжается до преобразования $U^*(X) \to h^*(X)$.

Таким образом, комплексно ориентированная теория h^* задаёт ф. г. F_h и соответствующий род $\Omega_U \to h^*(pt)$.

С другой стороны, задав род $\varphi\colon \Omega_U \to R$, можно попытаться определить теорию когомологий, положивк $h_\varphi^*(X) = U^*(X) \otimes_{\Omega_U} R$.

Функтор $X \mapsto h_\varphi^*(X)$ гомотопически инвариантен и обладает свойством вырезания. Однако тензорное умножение на R может не сохранять точность последовательностей пар. Имеется следующий критерий, когда $h_\varphi^*(X)$ является теорией когомологий.

Определим n-ю степень в ф. г. F_U как $[n](u) = F_U([n-1](u), u)$ и $[0](u) = 0$. Для каждого простого p, запишем

$$[p](u) = pu + \cdots + t_1 u^p + \cdots + t_n u^{p^n} + \cdots ,$$

где $t_n \in \Omega_U^{-2(p^n-1)}$.

Теорема (теорема Ландвебера о точном функторе)

$U_*(X) \otimes_{\Omega_U} R$ является теорией гомологий, если для каждого p последовательность $p, t_1, \ldots, t_n, \ldots$ элементов кольца Ω_U является R-регулярной. Это означает, что отображения умножения на p в R и на t_n в $R/(pR + \cdots + t_{n-1}R)$ инъективны при $n \geqslant 1$.

Если это условие выполнено для гомоморфизма $\Omega^U \to h_*(pt)$ комплексно ориентированной теории h_*, то теория h_* называется точной по Ландвеберу. В этом случае каноническое преобразование

$$U_*(X) \otimes_{\Omega_U} h_*(pt) \longrightarrow h_*(X)$$

является эквивалентностью теорий.

Example

1. Гомоморфизм Тома $U^* \to H^*$ задаёт аугментационный род $\varepsilon\colon \Omega_U \to \mathbb{Z}$, переводящий каждый класс положительной градуировки в Ω_U в нуль. Он соответствует ряду $f(x) = x$.
Обычная теория когомологий H^* не является точной по Ландвеберу, так как $\varepsilon(t_1) = 0$, а значит умножение на t_1 нулевое на $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
Соотношение $U_*(X) \otimes_{\Omega_U} \mathbb{Z} = H_*(X)$, вообще говоря, не имеет места.

С другой стороны, рациональная теория $H^*(X;\mathbb{Q})$ точна по Ландвеберу и $U_*(X) \otimes_{\Omega_U} \mathbb{Q} = H_*(X;\mathbb{Q})$. Здесь $\mathbb{Q}/p\mathbb{Q} = 0$.

2. Род Тодда $\mathrm{td}\colon \Omega_U \to \mathbb{Z}$ задаёт структуру Ω_U-модуля на $\mathbb{Z}$, обозначим её $\mathbb{Z}_{\mathrm{td}}$.
p-я степень в соответствующей формальной группе есть

$$[p]_{\mathrm{td}}(u) = 1 - (1-u)^p = pu + \cdots + u^p,$$

так что t_1 действует тождественно на $\mathbb{Z}_{\mathrm{td}}/p\mathbb{Z}_{\mathrm{td}}$. Теорема Ландвебера применима и даёт теорию когомологий $U^*(X) \otimes_{\Omega_U} \mathbb{Z}_{\mathrm{td}}$.

Пример

В комплексной K-теории для одномерного ξ над X имеем

$$c_1^K(\xi) = 1 - \xi \in \widetilde{K}(X),$$

а формальная группа

$$F_K(u,v) = c_1^K(\xi \otimes \eta) = 1 - \xi\eta = (1-\xi)+(1-\eta)-(1-\xi)(1-\eta) = u+v-uv$$

соответствует роду Тодда. Получаем

Теорема (Коннер–Флойд)

Род Тодда $\mathrm{td}\colon \Omega_U \to \mathbb{Z}$ *задаёт преобразование теорий когомологий*

$$\mu_c\colon U^*(X) \to K^*(X),$$

для которого

$$\widetilde{\mu}_c\colon U^*(X) \otimes_{\Omega_U} \mathbb{Z}_{\mathrm{td}} \to K^*(X)$$

есть эквивалентность теорий когомологий.

Таким образом, комплексная K-теория получается вырождением теории комплексных кобордизмов.

Пример

$\mathbb{Z}$-градуированная K-теория получается аналогичной процедурой.

Мы имеем $K^*(pt) = \mathbb{Z}[\beta, \beta^{-1}]$ где $\beta = 1 - \bar{\eta}$ — элемент Ботта в $\widetilde{K}^0(\mathbb{C}P^1) = K^{-2}(pt)$, $\deg \beta = -2$.

Кольцо $\mathbb{Z}[\beta, \beta^{-1}]$ является градуированным Ω_U-модулем: $[M^{2n}] \mapsto \mathrm{td}[M^{2n}]\beta^n$. В соответствующей формальной группе p-я степень есть

$$[p]_\beta(u) = pu + \cdots + \beta^{p-1}u^p.$$

Теорема Ландвебера применима, так как умножение на β^{p-1} есть изоморфизм $\mathbb{Z}_p[\beta, \beta^{-1}] \to \mathbb{Z}_p[\beta, \beta^{-1}]$, а $\mathbb{Z}_p[\beta, \beta^{-1}]/(\beta^{p-1}) = 0$. Получаем эквивалентность теорий

$$U^*(X) \otimes_{\Omega_U} \mathbb{Z}[\beta, \beta^{-1}] \xrightarrow{\cong} K^*(X).$$

Таким образом, $\mathbb{Z}_2$- и $\mathbb{Z}$-градуированные версии K-теории являются точными по Ландвеберу.

Теория комплексных (ко)бордизов

η_k — тавтологическое расслоение над $BU(k) = G_k(\mathbb{C}^\infty)$.

$MU(k) = Th(\eta_k)$ пространство Тома.

Гомотопическое определение: группы бордизмов

$$U_n(Y) = \lim_{k\to\infty} \pi_{2k+n}\bigl((Y_+) \wedge MU(k)\bigr).$$

Группы кобордизмов

$$U^n(X) = \lim_{k\to\infty} [\Sigma^{2k-n}(X_+), MU(k)].$$

Гладкое отображение $M \to X$ многообразий комплексно ориентировано, если оно раскладывается как

$$M \hookrightarrow X \times \mathbb{R}^{2k-n} \longrightarrow X,$$

где первое отображение — вложение, в нормальном расслоении которого фиксирована структура комплексного k-мерного расслоения.

$$U_n(X) = \{\text{классы бордизма отображений } M \to X, \\ \text{где } M \text{ — касательно стабильно комплексное размерности } n\},$$

$$U^n(X) = \{\text{классы кобордизма комплексно ориентиров. } M \to X \\ \text{коразмерности } n\},$$

Если $y \in U^n(Y)$ задан комплексно ориентированным $M \to Y$ и $f\colon X \to Y$ — трансверсальное отображение, то класс $f^*(y) \in U^n(X)$ задаётся отображением $X \times_Y M \to X$ с индуцированной комплексной ориентацией.

Спаривания и произведения

Классифицирующее отображение $BU(k) \times BU(l) \to BU(k+l)$ суммы Уитни расслоений даёт отображение пространств Тома $MU(k) \wedge MU(l) \to MU(k+l)$.

Спаривание Кронекера

$$\langle\ ,\ \rangle\colon U^m(X) \otimes U_n(X) \to \Omega^U_{n-m},$$

$\frown$-произведение

$$\frown\colon U^m(X) \otimes U_n(X) \to U_{n-m}(X)$$

и $\smile$-произведение (просто произведение)

$$\smile\colon U^m(X) \otimes U^n(X) \to U^{m+n}(X).$$

Далее приведём их гомотопические и геометрические определения.

Пусть $x \in U^m(X)$ представлен отображением $\Sigma^{2l-m}X_+ \to MU(l)$ и $\alpha \in U_n(X)$ представлен отображением $S^{2k+n} \to X_+ \wedge MU(k)$. Тогда $\langle x, \alpha\rangle \in \Omega^U_{n-m}$ представлен композицией

$$S^{2k+2l+n-m} \xrightarrow{\Sigma^{2l-m}\alpha} \Sigma^{2l-m}X_+ \wedge MU(k) \xrightarrow{x\wedge \mathrm{id}} MU(l)\wedge MU(k) \to MU(l+k)$$

Если $\Delta\colon X_+ \to (X\times X)_+ = X_+ \wedge X_+$ — диагональное отображение, то $x \frown \alpha \in U_{n-m}(X)$ представлен композицией

$$S^{2k+2l+n-m} \xrightarrow{\Sigma^{2l-m}\alpha} \Sigma^{2l-m}X_+ \wedge MU(k) \xrightarrow{\Sigma^{2l-m}\Delta\wedge \mathrm{id}} X_+ \wedge \Sigma^{2l-m}X_+ \wedge MU(k)$$
$$\xrightarrow{\mathrm{id}\wedge x \wedge \mathrm{id}} X_+ \wedge MU(l)\wedge MU(k) \to X_+ \wedge MU(l+k)$$

Аналогично определяется $\smile$-произведение. Оно превращает $U^*(X) = \prod_{n\in\mathbb{Z}} U^n(X)$ в градуированное кольцо, кольцо комплексных кобордизмов пространства X.

Геометрически, пусть $x \in U^m(X)$ задан вложением $M^{k-m} \hookrightarrow X = X^k$ с комплексной структурой в нормальном расслоении, а $\alpha \in U_n(X)$ задан вложением $N^n \hookrightarrow X^k$ стабильно касательного многообразия N. Предположим, что M и N пересекаются в X трансверсально, т. е. $\dim M \cap N = n - m$. Тогда $\langle x, \alpha \rangle$ есть класс бордизма пересечения $M \cap N$, а $x \frown \alpha$ есть класс бордизма вложения $M \cap N \to X$ с индуцированной касательной комплексной структурой.

Аналогично, если $x \in U^{-d}(X)$ задан гладким расслоением $E^{k+d} \to X^k$, а $\alpha \in U_n(X)$ задан гладким отображением $N \to X$, то $\langle x, \alpha \rangle \in \Omega^U_{n+d}$ есть класс бордизма пространства индуцированного расслоения E', а $x \frown \alpha \in U_{n+d}(X)$ есть класс бордизма композиции $E' \to X$ в диаграмме

$$\begin{array}{ccc} E' & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ N & \longrightarrow & X \end{array}$$

Конструкция (двойственность Пуанкаре–Атьи)

X гладкое многообразие размерности d.
Вложение $pt \subset X$ задаёт класс бордизма $1 \in U_0(X)$ и класс кобордизма в $U^d(X)$. (Нормальное расслоение точки $pt \subset X$ или $pt \subset X \times \mathbb{R}$ имеет комплексную структуру.)

Тождественное отображение $X \to X$ задаёт класс кобордизма $1 \in U^0(X)$. Оно задаёт фундаментальный класс бордизма X в $U_d(X)$ только если X стабильно комплексно.

Пусть X — стабильно комплексное многообразие с фундаментальным классом $[X] \in U_d(X)$. Имеем изоморфизм

$$D = \cdot \frown [X] \colon U^k(X) \to U_{d-k}(X), \quad x \mapsto x \frown [X],$$

называемый изоморфизмом двойственности Пуанкаре–Атьи.

Конструкция (гомоморфизм Гизина)

Пусть $f\colon X^k \to Y^{k+d}$ — комплексно ориентированное отображение коразмерности d между многообразиями (возможно, некомпактными, тогда f предполагается собственным). Оно индуцирует ковариантное отображение

$$f_!\colon U^n(X) \to U^{n+d}(Y),$$

называемое гомоморфизмом Гизина и определяемое следующим образом.

Пусть $x \in U^n(X)$ представлен комплексно ориентированным отображением $g\colon M^{k-n} \to X^k$. Тогда $f_!(x)$ представлен композицией fg.

Предложение

$f_!\colon U^*(X)\to U^{*+d}(Y)$ является гомоморфизмом Ω_U-модулей, зависит только от класса собственной гомотопии f и удовлетворяет

а) $f_!(x\cdot f^*(y)) = f_!(x)\cdot y$ *для любых* $x\in U^n(X)$, $y\in U^m(Y)$;

б) *для декартова квадрата*

$$\begin{tikzcd} X\times_Y Z \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

где g трансверсально f, имеем $g^*f_! = f'_!\,g'^*\colon U^*(X)\to U^{*+d}(Z)$.

Доказательство.

Выберем $Z\to X$ и $W\to Y$, представляющие x и y, и рассмотрим

$$\begin{array}{ccccc} Z\times_Y W & \longrightarrow & X\times_Y W & \longrightarrow & W\\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\ Z & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Обе части в а) представлены композициями $Z\times_Y W\to Y$. □

Опишем теорию комплексных бордизмов и родов в эквивариантной постановке.

Рассматриваем стабильно комплексные многообразия с согласованным действием тора T^k. (Можно обобщить на действия компактных связных групп Ли.)

Центральным понятием является универсальный торический род $\varPhi$, определённый на стабильно комплексных T^k-многообразиях и принимающий значения в $U^*(BT^k)$.

$\varPhi$ есть эквивариантный аналог универсального рода $\mathrm{id}\colon \varOmega_U \to \varOmega_U$.

Конструкция основана на преобразованиях эквивариантных теорий

$$\varPhi_X\colon U^*_{T^k}(X) \xrightarrow{\nu} MU^*_{T^k}(X) \xrightarrow{\alpha} U^*(ET^k \times_{T^k} X).$$

Здесь $U^*_{T^k}(X)$ — геометрические, а $MU^*_{T^k}(X))$ — гомотопические T^k-эквивариантные кобордизмы T^k-многообразия X, а $ET^k \times_{T^k} X$ — конструкция Бореля.

Геометрическая и гомотопическая версия эквивариантных кобордизмов отличаются ввиду отсутствия эквивариантной трансверсальности.

Ограничивая $\varPhi_X$ на $X = pt$, получаем гомоморфизм

$$\varPhi\colon \varOmega_{U:T^k} \to \varOmega_U[[u_1, \ldots, u_k]]$$

из кольца геометрических T^k-кобордизмов $\varOmega^*_{U:T^k} := U^*_{T^k}(pt)$ в кольцо $U^*(BT^k) = \varOmega_U[[u_1, \ldots, u_k]]$ — универсальный торический род.

Он переводитт класс бордизма $[M, c_{\mathcal T}] \in \varOmega^{U:T^k}_{2n}$ стабильно комплексного T^k-многообразия M в 'класс кобордизма' отображения $ET^k \times_{T^k} M \to BT^k$.

Гомотопические эквивариантные кобордизмы

T^k-спектр Тома MU_{T^k} параметризуется комплексными представлениями V тора T^k (комплексной размерности $|V|$).

$MU_{T^k}(V)$ есть T^k-пространство Тома универсального $|V|$-мерного комплексного T^k-эквивариантного векторного расслоения
$\gamma_V\colon EU_{T^k}(V) \to BU_{T^k}(V)$,
а связывающие отображения спектра
$\Sigma^{2(|W|-|V|)} MU_{T^k}(V) \to MU_{T^k}(W)$ индуцированы вложениями $V \subset W$ T^k-подмодулей.

Группа гомотопических T^k-эквивариантнх комплексных кобордизмов $MU^n_{T^k}(X)$ для T^k-пространства X получается стабилизацией классов гомотопии T^k-отображений с отмеченными точками:

$$MU^n_{T^k}(X) = \varinjlim \bigl[\Sigma^{2|V|-n}(X_+), MU_{T^k}(V)\bigr]_{T^k}.$$

Применяя конструкцию Бореля к $\gamma_V\colon EU_{T^k}(V) \to BU_{T^k}(V)$ получаем $|V|$-мерное расслоение $ET^k \times_{T^k} \gamma_V$ над $ET^k \times_{T^k} BU_{T^k}(V)$ с пространством Тома $ET^k_+ \wedge_{T^k} MU_{T^k}(V)$.
Классифицирующее отображение для $ET^k \times_{T^k} \gamma_V$ индуцирует отображение пространств Тома $ET^k_+ \wedge_{T^k} MU_{T^k}(V) \to MU(|V|)$.

Рассмотрим T^k-отображение $\Sigma^{2|V|-n}(X_+) \to MU_{T^k}(V)$, представляющее класс в $MU^n_{T^k}(X)$. Применим конструкцию Бореля:

$$\Sigma^{2|V|-n}(ET^k \times_{T^k} X)_+ \longrightarrow ET^k_+ \wedge_{T^k} MU_{T^k}(V) \to MU(|V|).$$

Это конструкция гомотопически инвариантна и даёт отображение

$$\bigl[\Sigma^{2|V|-n}(X_+), MU_{T^k}(V)\bigr]_{T^k} \longrightarrow \bigl[\Sigma^{2|V|-n}(ET^k \times_{T^k} X)_+, MU(|V|)\bigr],$$

а значит мультипликативное преобразование теорий когомологий

$$\alpha\colon MU^*_{T^k}(X) \longrightarrow U^*(ET^k \times_{T^k} X).$$

Преобразование α также получается из гомоморфизмов

$$MU^*_{T^k}(X) \to MU^*_{T^k}(ET^k \times X),$$

индуцированных T^k-проекциями $ET^k \times X \to X$; так как T^k действует свободно на $ET^k \times X$, правую часть можно заменить на $U^*(ET^k \times_{T^k} X)$.

Если X компактно и T^k действует свободно, то $\alpha\colon MU^*_{T^k}(X) \longrightarrow U^*(ET^k \times_{T^k} X)$ — изоморфизм.

Замечание

Согласно результату Лёффлера, преобразование α есть гомоморфизм пополнения по аугментационному идеалу в $MU^*_{T^k}(X)$.

Геометрические эквивариантные кобордизмы

Есть эквивариантная версия геометрического подхода Квиллена к кобордизмам через комплексно ориентированные отображения.

Этот подход основан на нормальных структурах, хотя в геометрических примерах эквивариантная структура задана в касательном расслоении. Эквивариантную касательную структуру можно преобразовать в нормальную, но эта процедура, вообще говоря, *не обратима*.

Элементы группы $U^{-d}(X)$ представляются стабильно касательно комплексными расслоениями $\pi\colon E \to X$ с d-мерным слоем F, т. е. в касательном расслоении $\mathcal{T}_F(E)$ вдоль слоёв фиксируется стабильно комплексная структура $c_\mathcal{T}(\pi)$.

Если $\pi\colon E \to X$ — T^k-эквивариантное расслоение, то стабильно комплексная структура $c_\mathcal{T}(\pi)$ предполагается T^k-эквивариантной.

Группа геометрических T^k-эквивариантных комплексных кобордизмов $U^{-d}_{T^k}(X)$ состоит из классов эквивариантных кобордизмов d-мерных стабильно касательно комплексных T^k-расслоений над X.

Если $X = pt$, то $\Omega^{-d}_{U:T^k} := U^{-d}_{T^k}(pt)$ состоит из классов кобордизма стабильно касательно комплексных d-мерных T^k-многообразий M. $\Omega_{U:T^k} = \bigoplus_d \Omega^{-d}_{U:T^k}$ — кольцо геометрических T^k-эквивариантных кобордизмов и $U^*_{T^k}(X)$ — градуированный $\Omega_{U:T^k}$-модуль. $U^*_{T^k}(\,\cdot\,)$ функториально относительно гладких T^k-отображений $Y \to X$.

Для T^k-многообразия X имеется канонический гомоморфизм

$$\nu\colon U^{-d}_{T^k}(X) \to MU^{-d}_{T^k}(X), \quad d \geqslant 0.$$

Его конструкция основана на преобразовании касательной структуры, используемой в определении геометрических кобордизмов, в нормальную структуру, используемую в отображении Понтрягина–Тома при гомотопическом подходе.

Универсальный торический род

Для гладкого компактного T^k-многообразия X определим гом-физм

$$\varPhi_X\colon U^*_{T^k}(X) \xrightarrow{\nu} MU^*_{T^k}(X) \xrightarrow{\alpha} U^*(ET^k \times_{T^k} X).$$

Для $X = pt$ получаем

$$\varPhi\colon \varOmega_{U:T^k} \longrightarrow U^*(BT^k) = \varOmega_U[[u_1, \ldots, u_k]]$$

универсальный торический род.

Это мультипликативный инвариант кобордизма стабильно комплексных T^k-многообразий.

В силу результатов Ханке и Лёффлера, при $X = pt$ оба гомоморфизма ν и α инъективны, поэтому $\varPhi$ инъективен.

Геометрически, универсальный торический род $\varPhi$ переводит геометрический класс кобордизма $[M, c_{\mathcal{T}}] \in \varOmega_{U:T^k}^{-d}$ стабильно касательного T^k-многообразия M в «класс кобордизма» отображения $ET^k \times_{T^k} M \to BT^k$.
Так как $ET^k \times_{T^k} M$ и BT^k бесконечномерны, для введения стабильно комплексной структуры в определении $\varPhi(M)$ необходимо использовать конечномерные аппроксимации. Другой способ:

Предложение

Пусть $[M] \in \varOmega_{U:T^k}$ геометрический класс кобордизма, представленный d-мерным T^k-многообразием M. Тогда

$$\varPhi(M) = (\mathrm{id} \times_{T^k} \pi)_! 1,$$

где

$$(\mathrm{id} \times_{T^k} \pi)_! \colon U^*(ET^k \times_{T^k} M) \longrightarrow U^{*-d}(ET^k \times_{T^k} pt) = U^{*-d}(BT^k)$$

— гомоморфизм Гизина, индуцированный проекцией $\pi \colon M \to pt$.

Для универсального торического рода

$$\Phi\colon \Omega_{U:T^k} \longrightarrow U^*(BT^k) = \Omega_U[[u_1, \ldots, u_k]]$$

имеем разложение в ряд

$$\Phi(M) = \sum_{\omega} g_\omega(M) u^\omega,$$

где $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_k) \in \mathbb{N}^k$, $u^\omega = u_1^{\omega_1} \cdots u_k^{\omega_k}$, $g_\omega(M) \in \Omega_U^{-2(|\omega|+n)}$.

Мы имеем $g_0(M) = [M] \in \Omega_U^{-2n}$.
Как выразить остальные коэффициенты $g_\omega(M)$?

Многообразия ограниченных флагов

Ограниченный флаг в $\mathbb{C}^{n+1}$ — это полный флаг

$$\mathcal{U} = \{U_1 \subset U_2 \subset \cdots \subset U_{n+1} = \mathbb{C}^{n+1}, \quad \dim U_i = i\},$$

где U_k содержит подпространство $\mathbb{C}^{k-1} = \langle \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{k-1} \rangle$, $2 \leqslant k \leqslant n$.
BF_n — множество всех ограниченных флагов в $\mathbb{C}^{n+1}$.

BF_n — проективное торическое многообразие.
Также, это пример башни Ботта, т. е. тотальное пространство n-кратного итерированного $\mathbb{C}P^1$-расслоения над $BF_0 = pt$.

Фактор-конструкция описывает BF_n как факторпространство

$$(S^3)^n = \{(z_1,\ldots,z_{2n}) \in \mathbb{C}^{2n}\colon |z_k|^2 + |z_{k+n}|^2 = 1,\ 1 \leqslant k \leqslant n\}$$

по свободному действию тора $T^n = \{(t_1,\ldots,t_n)\}$, заданному как

$$(z_1,\ldots,z_{2n}) \mapsto (t_1 z_1,\ t_1^{-1} t_2 z_2,\ \ldots,\ t_{n-1}^{-1} t_n z_n,\ t_1 z_{n+1},\ t_2 z_{n+2},\ \ldots,\ t_n z_{2n})$$

Для $1 \leqslant i \leqslant n$ имеем комплексные одномерные расслоения

$$\xi_i\colon (S^3)^n \times_{T^n} \mathbb{C} \longrightarrow BF_n$$

где действие тора на $\mathbb{C}$ задано как $(t_1,\ldots,t_n)\cdot z = t_i^{-1} z$ для $z \in \mathbb{C}$.

Касательное расслоение к BF_n раскладывается в сумму одномерных:

$$\mathcal{T}(BF_n) \oplus \underline{\mathbb{C}}^n \cong \bar{\xi}_1 \oplus \xi_1\bar{\xi}_2 \oplus \cdots \oplus \xi_{n-1}\bar{\xi}_n \oplus \bar{\xi}_1 \oplus \bar{\xi}_2 \oplus \cdots \oplus \bar{\xi}_n.$$

При $n=1$ получаем стандартный изоморфизм $\mathcal{T}\mathbb{C}P^1 \oplus \underline{\mathbb{C}} \cong \bar{\eta} \oplus \bar{\eta}$, где $\xi_1 = \eta$ — тавтологическое одномерное расслоение.

Заменим стабильно комплексную структуру на BF_n так, что получаемы класс бордизма в Ω^U_{2n} будет нулевым. Геометрически, рассматриваем BF_n как пространство *сферического расслоения* над BF_{n-1}. Если стабильно комплексная структура $c_\mathcal{T}$ на BF_n ограничивается на тривиальную структуру на каждом слое S^2, то $c_\mathcal{T}$ продолжается на ассоциированное расслоение 3-дисков, а значит бордантна нулю.

Представим $(S^3)^n$ как $(S^3)^{n-1}\times S^3$ и T^n как $T^{n-1}\times T^1$; тогда T^1 действует тривиально на $(S^3)^{n-1}$, и мы получаем

$$BF_n=(S^3)^n/T^n=\bigl((S^3)^{n-1}\times(S^3/T^1)\bigr)/T^{n-1}=BF_{n-1}\times_{T^{n-1}}S^2.$$

Здесь T^1 действует на S^3 диагонально, так что стабильно комплексная структура на S^2 есть стандартная структура на $\mathbb{C}P^1$.

Теперь изменим действие тора на

$$(S^3)^n = \{(z_1, \dots, z_{2n}) \in \mathbb{C}^{2n} \colon |z_k|^2 + |z_{k+n}|^2 = 1,\ 1 \leqslant k \leqslant n\}$$

на следующее:

$$(z_1, \dots, z_{2n}) \mapsto (t_1 z_1, t_1^{-1} t_2 z_2, \dots, t_{n-1}^{-1} t_n z_n, t_1^{-1} z_{n+1}, t_2^{-1} z_{n+2}, \dots, t_n^{-1} z_{2n}).$$

Тогда каждый T^1 действует на S^3 антидиагонально, так что стабильно комплексная структура на S^2 тривиальна, как требуется. Итоговая стабильно комплексная структура на BF_n задаётся изоморфизмом

$$\mathcal{T}(BF_n) \oplus \underline{\mathbb{R}}^{2n} \cong \bar{\xi}_1 \oplus \xi_1 \bar{\xi}_2 \oplus \dots \oplus \xi_{n-1} \bar{\xi}_n \oplus \xi_1 \oplus \xi_2 \oplus \dots \oplus \xi_n,$$

и её класс бордизма в $\varOmega_{2n}^U$ равен нулю.

Обозначим через B_n многообразие BF_n с новой стабильно комплексной структурой, бордантной нулю.

«Тавтологическое» расслоение ξ_n классифицируется отображением $B_n \to \mathbb{C}P^\infty$ и задаёт класс бордизма $\beta_n \in U_{2n}(\mathbb{C}P^\infty)$. Положим $\beta_0 = 1$.

$\{\beta_n\colon n \geqslant 0\}$ — базис Рэя в $\varOmega_U$-модуле $U_*(\mathbb{C}P^\infty)$.

Предложение (Рэй, 1986)

Классы $\{\beta_n\colon n \geqslant 0\}$ образуют базис свободного $\varOmega_U$-модуля $U_*(\mathbb{C}P^\infty)$, двойственный к базису $\{u^k\colon k \geqslant 0\}$ в $U^*(\mathbb{C}P^\infty) = \varOmega_U[[u]]$. Здесь $u = c_1^U(\bar\eta)$ (представлен гиперплоскостью $\mathbb{C}P^{\infty-1} \subset \mathbb{C}P^\infty$).

Доказательство. Так как $[B_n] = 0$ в $\varOmega_U$, имеем $\beta_n \in \widetilde{U}_{2n}(\mathbb{C}P^\infty)$ при $n > 0$. Чтобы показать, что $\{\beta_n\colon n \geqslant 0\}$ и $\{u^k\colon k \geqslant 0\}$ — двойственные базисы, надо проверить, что $u \frown \beta_n = \beta_{n-1}$. Класс $u \frown \beta_n$ получается взятием трансверсального пересечения $B_n \hookrightarrow \mathbb{C}P^\infty$ с гиперплоскостью $\mathbb{C}P^{\infty-1}$ в $\mathbb{C}P^\infty = MU(1)$ или, эквивалентно, ограничением $B_n \to \mathbb{C}P^\infty$ на нули трансверсального сечения расслоения ξ_n. Это даёт в точности B_{n-1}. $\square$

Для мультииндекса $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_k)$ определим многообразие $B_\omega = B_{\omega_1} \times \cdots \times B_{\omega_k}$ и соответствующий класс бордизма $\beta_\omega \in U_{2|\omega|}(BT^k)$.

Следствие

$\{\beta_\omega\}$ — базис свободного Ω_U-модуля $U_*(BT^k)$;
это базис двойствен к базису $\{u^\omega\}$ модуля $U^*(BT^k) = \Omega_U[[u_1, \ldots, u_k]]$.

Пусть M — касательно стабильно комплексное T^k-многообразие M. $(S^3)^\omega = (S^3)^{\omega_1} \times \cdots \times (S^3)^{\omega_k}$ с покоординатным действием тора $T^\omega = T^{\omega_1} \times \cdots \times T^{\omega_k}$ и факторпространством B_ω. Определим

$$G_\omega(M) = (S^3)^\omega \times_{T^\omega} M,$$

где T^ω действует на M через представление

$$(t_{1,1}, \ldots, t_{1,\omega_1}; \ \ldots \ ; t_{k,1}, \ldots, t_{k,\omega_k}) \longmapsto (t_{1,\omega_1}, \ldots, t_{k,\omega_k}).$$

Теорема (Бухштабер-П-Рэй)

Многообразие $G_\omega(M)$ задаёт класс бордизма коэффициента $g_\omega(M) \in \Omega_U^{-2(|\omega|+n)}$ в разложении универсального торического рода $\Phi(M) = \sum_\omega g_\omega(M) u^\omega$.

Доказательство. Имеем $g_\omega(M) = \langle \Phi(M), \beta_\omega \rangle$. Это произведение Кронекера задаётся замыканием декартова квадрата

$$B_\omega \longrightarrow BT^k \longleftarrow ET^k \times_{T^k} M,$$

что есть в точности $G_\omega(M)$. □