Лекция 3. Эквивариантные роды Хирцебруха, жёсткость и послойная мультипликативность

Т. Е. Панов

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
МГУ, НИУ ВШЭ

Торическая топология, гиперболическая геометрия и комбинаторная теория групп
Школа для молодых исследователей
Сириус, Сочи, 17–21 мая 2026 г.

Эквивариантные роды

Конструкция эквивариантных родов возникла в работе Атьи и Хирцебруха 1970 г., где было установлено свойство жёсткости для χ_y-рода и $\widehat{A}$-рода на S^1-многообразиях. Эти понятия восходят к формуле Атьи–Ботта для неподвижных точек, которая послужила катализатором развития эквивариантной теории индекса. Важнейшим результатом здесь является теорема Ботта и Таубса о жёсткости эллиптического рода Ошанина на спинорных S^1-многообразиях.

Мы опишем подход к эквивариантным родам и жёсткости целиком в рамках теории комплексных кобордизмов. Он позволяет определить понятия эквивариантного рода и жёсткости для произвольного рода Хирцебруха. В случае, когда род выражается в виде индекса эллиптического оператора или комплекса, наше определение жёсткости согласуется с классическим.

Определение эквивариантного рода использует следующее универсальное преобразование теорий когомологий, введённое В. М. Бухштабером в 1970 г.

Конструкция (характер Чженя–Дольда)

Мультипликативное преобразование теорий когомологий

$$h\colon U^*(X) \to H^*(X; \Omega_U \otimes \mathbb{Q}).$$

однозначно задаётся рядом $h(u) \in H^2(\mathbb{C}P^\infty; \Omega_U \otimes \mathbb{Q}) = \Omega_U \otimes \mathbb{Q}[[x]]$, где $u = c_1^U(\bar\eta) \in U^2(\mathbb{C}P^\infty)$ и $x = c_1^H(\bar\eta) \in H^2(\mathbb{C}P^\infty)$.

Характер Чженя–Дольда — это единственное мультипликативное преобразование

$$\mathrm{ch}_U\colon U^*(X) \to H^*(X; \Omega_U \otimes \mathbb{Q}),$$

которое при $X = pt$ превращается в каноническое вложение $\Omega_U \to \Omega_U \otimes \mathbb{Q}$.

Предложение

Для характера Чженя–Дольда имеем

$$\mathrm{ch}_U(u) = f_U(x),$$

где $f_U(x)$ — экспонента формальной группы F_U в кобордизмах.

Доказательство. Так как ch_U тождествен на Ω_U получаем

$$\mathrm{ch}_U F_U(v_1, v_2) = F_U(\mathrm{ch}_U(v_1), \mathrm{ch}_U(v_2)) \tag{1}$$

для $v_1, v_2 \in U^2(\mathbb{C}P^\infty)$. Положим $f(x) := \mathrm{ch}_U(u) \in \Omega_U \otimes \mathbb{Q}[[x]]$. Пусть $v_i = c_1^U(\xi_i)$ и $x_i = c_1^H(\xi_i)$ для одномерных расслоений ξ_i, $i = 1, 2$. Тогда

$$\mathrm{ch}_U F_U(v_1, v_2) = \mathrm{ch}_U\big(c_1^U(\xi_1 \otimes \xi_2)\big) = f\big(c_1^H(\xi_1 \otimes \xi_2)\big) = f(x_1 + x_2),$$
$$\mathrm{ch}_U(v_1) = f(x_1), \quad \mathrm{ch}_U(v_2) = f(x_2).$$

Подставляя это в (1), получаем $f(x_1 + x_2) = F_U(f(x_1), f(x_2))$, что означает, что $f(x)$ есть экспонента формальной группы F_U. $\square$

Пусть $\varphi\colon \Omega_U \to R$ род и R без кручения. Такой φ определяется рядом $f(x) = x + \cdots \in R \otimes \mathbb{Q}[[x]]$ в силу соответствия Хирцебруха.

Определим мультипликативное преобразование

$$h_\varphi\colon U^*(X) \xrightarrow{\mathrm{ch}_U} H^*(X; \Omega_U \otimes \mathbb{Q}) \xrightarrow{\varphi} H^*(X; R \otimes \mathbb{Q})$$

где второй гомоморфизм действует только на коэффициенты родом φ. Для $X = BT^k$ получаем гомоморфизм

$$h_\varphi\colon \Omega_U[[u_1, \ldots, u_k]] \to R \otimes \mathbb{Q}[[x_1, \ldots, x_k]]$$

который действует на коэффициенты как φ и переводит u_i в $f(x_i)$.

Конструкция (эквивариантный род)

T^k-эквивариантное расширение рода φ — это гомоморфизм

$$\varphi^T = h_\varphi \cdot \Phi\colon \Omega_{U:T^k} \to R \otimes \mathbb{Q}[[x_1, \ldots, x_k]]$$

— композиция h_φ с универсальным торическим родом Φ.

Жёсткость

Мы имеем разложение в ряд

$$\varphi^T(M) = \varphi(M) + \sum_{|\omega|>0} \varphi(g_\omega(M))\, f(x)^\omega.$$

В частности, T^k-эквивариантное расширение универсального рода $\mathrm{id}\colon \Omega_*^U \to \Omega_*^U$ есть Φ.
Это объясняет название «универсальный торический род».

Definition

Род $\varphi\colon \Omega_U \to R$ называется T^k-жёстким на стабильно комплексном T^k-многообразии M, если для эквивариантого рода $\varphi^T\colon \Omega_{U:T^k} \to R \otimes \mathbb{Q}[[u_1, \ldots, u_k]]$ имеем $\varphi^T(M) = \varphi(M)$.

Другие определения жёсткости:

Атья–Хирцебрух: Пусть $\varphi(M) = \mathrm{ind}(\mathcal{E})$ — индекс эллиптического комплекса $\mathcal{E}$ векторных расслоений над M.
Для T^k-многообразий M определён T^k-эквивариантный индекс $\mathrm{ind}^T(\mathcal{E})$ — элемент кольца представлений $R_U(T^k)$.
Род φ жёсткий, если φ^T лежит в $\mathbb{Z} \subset R_U(T^k)$ (трив. представление).

Кричевер: Эквивариантное расширение рода $\varphi\colon \varOmega_U \to \mathbb{Q}$ есть $\varphi^K\colon \varOmega_{U:T^k} \to K^0(BT^k) \otimes \mathbb{Q}$, где $K^0(BT^k) = \widehat{R_U(T^k)}$ (пополнение).
Тогда φ жёсткий, если φ^K принимает значения в $\mathbb{Q} \subset K^0(BT^k) \otimes \mathbb{Q}$.

Эквивариантный род Кричевера $\varphi^K\colon \varOmega_{U:T^k} \to K^0(BT^k) \otimes \mathbb{Q}$ связан с $\varphi^T\colon \varOmega_{U:T^k} \to H^{even}(BT^k;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[[x_1,\ldots,x_k]]$ через характер Чженя $\mathrm{ch}\colon K^0(X) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\cong} H^{even}(X;\mathbb{Q})$. Таким образом, рациональный род T^k-жёсткий т. и т. т., когда он жёсткий в смысле Кричевера (а значит и в классическом смысле Атьи–Хирцебруха, если φ есть индекс).

Послойная мультипликативность

Рассмотрим расслоение $M \to E \times_G M \xrightarrow{\pi} B$,
где M и B связны и стабильно комплексны,

G — компактная группа Ли положительного ранга, действующая на M с сохранением стабильно комплексной структуры,

$E \to B$ — главное G-расслоение.

Тогда $N := E \times_G M$ наследует стабильно комплексную структуру.

Определение

Род $\varphi\colon \Omega_U \to R$ называется послойно мультипликативным по отношению к стабильно комплексному многообразию M, если $\varphi(N) = \varphi(M)\,\varphi(B)$ для любого расслоения π со слоем M как выше.

Теорема (Бухштабер–П–Рэй)

Если род φ является T^k-жёстким на M, то он послойно мультипликативен по отношению к M для расслоений со структурной группой G, для которой $U^*(BG)$ не имеет кручения.

Если род φ послойно мультипликативен по отношению к M, то он T^k-жёсткий на M.

Доказательство. Пусть φ послойно мультипликативен. Рассмотим $G_\omega(M) = (S^3)^\omega \times_{T^\omega} M$. Применим φ к расслоению $M \to G_\omega(M) \to B_\omega$. Так как B_ω бордантно нулю при $|\omega| > 0$, получаем $\varphi(G_\omega(M)) = 0$. Значит φ является жёстким.

Обратное утверждение доказывается рассмотрением диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} E \times_G M & \xrightarrow{f'} & EG \times_G M & \xleftarrow{i'} & ET^k \times_{T^k} M \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & {\scriptstyle\pi^G}\downarrow & & {\scriptstyle\pi^{T^k}}\downarrow \\ B & \xrightarrow{f} & BG & \xleftarrow{i} & BT^k \end{array}$$

с использованием свойств гомоморфизма Гизина. $\square$

Пример

Сигнатура (L-род) послойно мультипликативна относительно любой односвязной базы [Чжень–Хирцебрух–Серр] и поэтому является жёстким родом.

Изолированные неподвижные точки

Пусть M — T^k-многообразие размерности $2n$ с T^k-инвариантной стабильной касательной комплексной структурой

$$c_{\mathcal{T}}\colon \mathcal{T}M \oplus \underline{\mathbb{R}}^{2(l-n)} \to \xi.$$

Предположим, что все неподвижные точки *изолированы*, т. е. множество неподвижных точек M^T конечно.

$p \in M^T$ неподвижая точка. Имеем представление $\mathfrak{r}_p\colon T^k \to GL(l,\mathbb{C})$ в слое ξ_p. Тогда $\xi_p = \mathfrak{r}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{r}_n \oplus V$, где каждое $\mathfrak{r}_i$ — нетривиальное 1-мерное комплексное T^k-представление, а V тривиально.
В подходящих координатах $(z_1,\ldots,z_n,v)$ элемент $\boldsymbol{t} = (e^{2\pi i\varphi_1},\ldots,e^{2\pi i\varphi_k}) \in T^k$ действует как

$$\boldsymbol{t}\cdot(z_1,\ldots,z_n,v) = (e^{2\pi i\langle \boldsymbol{w}_1,\varphi\rangle}z_1,\ldots,e^{2\pi i\langle \boldsymbol{w}_n,\varphi\rangle}z_n,v),$$

где $\varphi = (\varphi_1,\ldots,\varphi_k) \in \mathbb{R}^k$ и $\boldsymbol{w}_j \in \mathrm{Hom}(T^k,S^1) \cong \mathbb{Z}^k$, $1 \leqslant j \leqslant n$, — веса представления $\mathfrak{r}_p$.

Изоморфизм $c_{\mathcal{T},p}\colon \mathcal{T}_pM \oplus \underline{\mathbb{R}}^{2(l-n)} \to \xi_p$ индуцирует ориентацию касательного пространства $\mathcal{T}_pM$, так как $\underline{\mathbb{R}}^{2(l-n)}$ и $\xi_p \cong \mathbb{C}^l$ канонически ориентированы.

Определение

Знак $\sigma(p)$ неподвижной точки $p \in M^T$ есть $+1$, если изоморфизм

$$\mathcal{T}_pM \xrightarrow{\mathrm{id}\oplus 0} \mathcal{T}_pM \oplus \mathbb{R}^{2(l-n)} \xrightarrow{c_{\mathcal{T},x}} \xi_p = \mathfrak{r}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{r}_n \oplus V \xrightarrow{\mathrm{pr}} \mathfrak{r}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{r}_n$$

сохраняет канонические ориентации, и -1 в противном случае.

Если M — *почти* комплексное T^k-многообразие (т. е. $l = n$), то $\mathcal{T}_pM = \mathfrak{r}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{r}_n$ и $\sigma(p) = 1$ для любой неподвижной точки p.

Имеем данные неподвижных точек для $(M, c_{\mathcal{T}})$:

$$\{\boldsymbol{w}_j(p),\ \sigma(p)\colon \quad p \in M^T,\ 1 \leqslant j \leqslant n\}.$$

Целочисленный вектор $\boldsymbol{n} = (n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{Z}^k$ задаёт одномерное расслоение

$$\bar{\eta}^{\boldsymbol{n}} := \bar{\eta}_1^{n_1} \otimes \cdots \otimes \bar{\eta}_k^{n_k}$$

над $BT^k = (\mathbb{C}P^\infty)^k$, где η_j — тавтологическое расслоение над j-м сомножителем. Его первый класс Чженя в кобордизмах

$$[\boldsymbol{n}](\boldsymbol{u}) := c_1^U(\bar{\eta}^{\boldsymbol{n}})$$

задаётся рядом

$$[\boldsymbol{n}](\boldsymbol{u}) = F_U(\underbrace{u_1, \ldots, u_1}_{n_1}, \ldots, \underbrace{u_k, \ldots, u_k}_{n_k}) \in U^2(BT^k),$$

где $F_U(u_1, \ldots, u_k) = F_U(\cdots F_U(F_U(u_1, u_2), u_3), \ldots, u_k)$ — итерированная подстановка в формальной группе. Имеем

$$[\boldsymbol{n}](\boldsymbol{u}) \;\equiv\; \langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{u} \rangle = n_1 u_1 + \cdots + n_k u_k \qquad \text{по модулю разложимых.}$$

Формула локализации

$(M, c_\mathcal{T})$ с данными неподв. точек $\{\boldsymbol{w}_j(p),\ \sigma(p)\colon p \in M^T,\ 1 \leqslant j \leqslant n\}$.

Универс. торический род $\varPhi\colon \varOmega_{U:T^k} \longrightarrow U^*(BT^k) = \varOmega_U[[u_1, \ldots, u_k]]$.

Теорема (Бухштабер-П-Рэй)

Для стабильно комплексного $2n$-мерного T^k-многообразия M с изолированными неподвижными точками M^T имеем соотношение

$$\varPhi(M) \;=\; \sum_{p \in M^T} \sigma(p) \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{[\boldsymbol{w}_j(p)](\boldsymbol{u})}$$

в $U^{-2n}(BT^k)$.

Слагаемые в правой части формально лежат в локализованном кольце $S^{-1}U^*(BT^k)$, где S — набор эквивариантных классов Эйлера нетривиальных представлений тора T^k.

$\varphi\colon \Omega_U \to R$ — род, задаваемый рядом $f(x) = x + \ldots \in R \otimes \mathbb{Q}[[x]]$. Универсальная формула локализации даёт следующее выражение эквивариантного рода $\varphi^T(M)$ в терминах данных неподвижных точек:

Теорема

Пусть $\varphi\colon \Omega_U \to R$ — род, R без кручения, M — стабильно комплексное $2n$-мерное T^k-многообразие и изолированными неподвижными точками M^T. Тогда эквивариантный род задаётся формулой

$$\varphi^T(M) \; = \; \sum_{p \in M^T} \sigma(p) \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{f\bigl(\langle \boldsymbol{w}_j(p), \boldsymbol{x}\rangle\bigr)},$$

где $\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}\rangle = w_1 x_1 + \ldots + w_k x_k$ для $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_k)$.

Доказательство. По определению, $\varphi^T = h_\varphi \cdot \Phi$ где $h_\varphi(u_i) = f(x_i)$.
Здесь $f(x)$ — экспонента ф. г. φF_U, т. е.
$\varphi F_U(u_1, u_2) = f(f^{-1}(u_1) + f^{-1}(u_2))$ и $h_\varphi F_U(u_1, u_2) = f(x_1 + x_2)$.
Отсюда получаем $h_\varphi\bigl([\boldsymbol{w}_j(p)](\boldsymbol{u})\bigr) = f(\langle \boldsymbol{w}_j(p), \boldsymbol{x}\rangle)$. □

Пример

Аугментационный род $\varepsilon\colon \Omega_U \to \mathbb{Z}$ соответствует ряду $f(x) = x$. Он обращается в нуль на M^{2n} с $n > 0$. Формула локализации даёт

$$\sum_{p \in M^T} \sigma(p) \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\langle \boldsymbol{w}_j(p), \boldsymbol{x} \rangle} = 0.$$

Пусть $M = \mathbb{C}P^n$ с покоординатным действием T^{n+1}. Имеется $n+1$ неподвижных точек $p_0, \ldots, p_n$, каждая с единственной ненулевой координатой. Веса $\boldsymbol{w}_j(p_k) = \boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{e}_k$ при $0 \leqslant j \leqslant n$, $j \neq k$, и каждый знак $\sigma(p_k)$ положителен. Получаем классическое тождество

$$\sum_{k=0}^{n} \prod_{j \neq k} \frac{1}{x_j - x_k} = 0\,.$$

Пример

Универсальный торический род на $\mathbb{C}P^1$ (со стандартным S^1-действием) есть

$$\Phi(\mathbb{C}P^1) = \frac{1}{u} + \frac{1}{\bar{u}}$$

в $U^{-2}(\mathbb{C}P^\infty)$, где $\bar{u} = [-1](u)$ — обратный ряд в ф. г. в кобордизмах.

Род $\varphi\colon \Omega_U \to R$ жёсткий на $\mathbb{C}P^1$, если его ряд $f(x)$ удовлетворяет

$$\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(-x)} = c$$

в $R \otimes \mathbb{Q}[[x]]$. Общее решение имеет вид

$$f(x) = \frac{x}{b(x^2) + cx/2}, \qquad \text{где} \quad b(0) = 1.$$

В частности, род Тодда td, соответствующий $f(x) = 1 - e^{-x}$, удовлетворяет этому уравнению с $c = 1$. Значит td жёсткий на $\mathbb{C}P^1$. Хирцебрухом доказано, что td послойно мультипликативен относительно $\mathbb{C}P^1$.

Пример

Можно рассмотреть S^1-действие на $M = \mathbb{C}P^1$ с тривиальной стабильно комплексной структурой.
Здесь две неподвижные точки со знаками 1 и -1, а веса суть 1. Тогда

$$\varPhi(M) = \frac{1}{u} - \frac{1}{u} = 0,$$

что выражает тот факт, что M эквивариантно бордантно нулю.

Ещё одно классическое приложение формулы локализации — формула Атьи–Хирцебруха, выражающая χ_y-род комплексного S^1-многообразия через данные неподвижных точек.

Кричевером получено обобщение этой формулы. Рассмотрим $\chi_{a,b}$-род, заданный рядом

$$f(x) = \frac{e^{ax} - e^{bx}}{ae^{bx} - be^{ax}} \in \mathbb{Q}[a, b].$$

Частными случаями являются

- старший класс Чженя $c_n[M]$ $(a = b = -1)$;
- сигнатура $L[M] = \mathrm{sign}(M)$ $(a = 1,\ b = -1)$;
- род Тодда $\mathrm{td}(M)$ $(a = 0,\ b = -1)$.

Для T^k-многообразия M выберем подгруппу-окружность в T^k, заданную примитивным вектором $\nu \in \mathbb{Z}^k$:

$$S(\nu) = \{(e^{2\pi i\nu_1\varphi}, \ldots, e^{2\pi i\nu_k\varphi}) \in T^k \colon \varphi \in \mathbb{R}\}.$$

Тогда для $S(\nu)$ общего положения имеем $M^{S(\nu)} = M^T$. Веса касательных представлений $S(\nu)$ в неподвижных точках p суть $\langle \boldsymbol{w}_j(p), \nu\rangle$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Если неподвижные точки M^T изолированы и $M^{S(\nu)} = M^T$, то

$$\langle \boldsymbol{w}_j(p), \nu\rangle \neq 0 \qquad \text{при } 1 \leqslant j \leqslant n \text{ для всех } p \in M^T.$$

Определим индекс $\operatorname{ind}_\nu p$ как число отрицательных весов в точке p:

$$\operatorname{ind}_\nu p = \#\{j \colon \langle \boldsymbol{w}_j(p), \nu\rangle < 0\}.$$

Теорема (обобщённая формула Атьи–Хирцебруха)

$\chi_{a,b}$-род является T^k-жёстким на любом M.
Если M^T конечно, то значение $\chi_{a,b}$-рода задаётся формулой

$$\chi_{a,b}(M) = \sum_{p \in M^T} \sigma(p)(-a)^{\mathrm{ind}_\nu p}(-b)^{n-\mathrm{ind}_\nu p}$$

для любого $\nu \subset \mathbb{Z}^k$, удовлетворяющего $M^{S(\nu)} = M^T$.

Доказательство. Из формулы локализации получаем

$$\chi_{a,b}^{S^1}(M) = \sum_{p \in M^T} \sigma(p) \prod_{j=1}^{n} \frac{a e^{b\langle \mathbf{w}_j(p),\nu\rangle x} - b e^{a\langle \mathbf{w}_j(p),\nu\rangle x}}{e^{a\langle \mathbf{w}_j(p),\nu\rangle x} - e^{b\langle \mathbf{w}_j(p),\nu\rangle x}}.$$

Это выражение лежит в $\mathbb{Z}[a,b][[x]]$ (т. е. неособо в нуле), а постоянный член равен $\chi_{a,b}(M)$.

Продолжение доказательства. Обозначим $\omega_j = \langle \boldsymbol{w}_j(p), \nu \rangle$ и $e^{(a-b)x} = q$; тогда предыдущая формула принимает вид

$$\chi_{a,b}^{S^1}(M) = \sum_{p \in M^T} \sigma(p) \prod_{j=1}^{n} \frac{a - b\, q^{\omega_j}}{q^{\omega_j} - 1}.$$

Пусть $q \to \infty$. Тода каждый множитель стремится к $-b$, если $\omega_j > 0$, и к $-a$, если $\omega_j < 0$. Следовательно,

$$\lim_{q \to \infty} \chi_{a,b}^{S^1}(M) = \sum_{p \in M^T} \sigma(p) (-a)^{\mathrm{ind}_\nu p} (-b)^{n - \mathrm{ind}_\nu p}.$$

Аналогично, при $q \to 0$ получаем

$$\lim_{q \to 0} \chi_{a,b}^{S^1}(M) = \sum_{p \in M^T} \sigma(p) (-a)^{n - \mathrm{ind}_\nu p} (-b)^{\mathrm{ind}_\nu p}.$$

Для завершения доказательства необходимо показать, что $\chi_{a,b}^{S^1}(M)$ постоянна как функция от q; тогда она совпадает с каждым из пределов выше. Для этого устанавливается, что $\chi_{a,b}^{S^1}(M)$ не имеет полюсов как мероморфная функция от $q \in \mathbb{C}$. $\square$

Квазиторические многообразия

$2n$-мерные многообразия M с действием тора T^n и условиями

- действие тора T^n локально стандартно, т. е. локально устроено как стандартное представление T^n в $\mathbb{C}^n$;
- пространство орбит есть простой многогранник P; имеется проекция $\pi\colon M \to P$, слои которой — орбиты тора T^n.

Примеры включают гладкие проективные торические многообразия и компактные симплектические $2n$-многообразия M с гамильтоновым действием тора T^n.

Квазиторические многообразия дают обширный класс примеров стабильно комплексных T^n-многообразий с изолированными неподвижными точками, для которых роды Хирцебруха вычисляются явно в терминах данных неподвижных точек на основе локализационных формул.

Квазиторическое многообразие M задаётся характеристической парой (P,Λ), где
P — простой n-мерный многогранник с m гипергранями $F_1,\ldots,F_m$,
Λ — целочисленная $n\times m$-матрица.

Столбцы λ_i матрицы Λ задают 1-мерные подгруппы в T^n, которые являются стабилизаторами характеристических подмногообразий $\pi^{-1}(F_i)\subset M$, $i=1,\ldots,m$.

Для неподвижной точки $p=F_{j_1}\cap\ldots\cap F_{j_n}$ обозначим через $\boldsymbol{a}_{j_1},\ldots,\boldsymbol{a}_{j_n}$ внутренние нормали к гиперграням $F_{j_1},\ldots,F_{j_n}$, $\boldsymbol{w}_{j_1}(p),\ldots,\boldsymbol{w}_{j_n}(p)$ двойственный базис к $\lambda_{j_1},\ldots,\lambda_{j_n}$.

Предложение

- $\sigma(p)=\operatorname{sign}(\det(\boldsymbol{a}_{j_1},\ldots,\boldsymbol{a}_{j_n})\det(\lambda_{j_1},\ldots,\lambda_{j_n}))$
- *веса в точке p суть $\boldsymbol{w}_{j_1}(p),\ldots,\boldsymbol{w}_{j_n}(p)$.*

Следующий результат можно доказать применяя локализационную формулу к квазиторическим многообразиям:

Теорема (Мусин)

2-параметрический род $\chi_{a,b}$ является универсальным T^k-жёстким родом.
В частности, любой T^k-жёсткий рациональный род есть $\chi_{a,b}$ для некоторых рациональных параметров a, b.

Доказательство. Род $\chi_{a,b}$ жёсткий согласно формуле Атьи–Хирцебруха. Чтобы доказать, что любой T^k-жёсткий род есть $\chi_{a,b}$, будем решать функциональное уравнение, возникающее из формулы локализации для одного конкретного T^k-многообразий. Его общее решение даст требуемый вид ряда $f(x)$.

Продолжение доказательства. Рассмотрим квазиторическое многообразие $M = \mathbb{C}P^2$ с нестандартной стабильно комплексной структурой, задаваемой характеристической матрицей

$$\varLambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Имеем три неподвижные точки v_1, v_2, v_3 со знаками $\sigma(v_1) = -1$, $\sigma(v_2) = 1$, $\sigma(v_3) = 1$ и весами $\{(1,0),(1,1)\}$, $\{(0,-1),(1,1)\}$, $\{(0,1),(1,0)\}$.

Подставляя эти данные в формулу локализации, получаем, что род φ является жёстким на M тогда и только тогда, когда соответствующий ряд $f(x)$ удовлетворяет уравнению

$$-\frac{1}{f(x_1)f(x_1+x_2)} + \frac{1}{f(-x_2)f(x_1+x_2)} + \frac{1}{f(x_1)f(x_2)} \;=\; c.$$

Переставляя x_1 и x_2, получаем

$$-\frac{1}{f(x_2)f(x_1+x_2)} + \frac{1}{f(-x_1)f(x_1+x_2)} + \frac{1}{f(x_2)f(x_1)} \;=\; c\,,$$

Продолжение доказательства. Вычитая, получаем

$$\left(\frac{1}{f(x_1)}+\frac{1}{f(-x_1)}\right)\frac{1}{f(x_1+x_2)} \;=\; \left(\frac{1}{f(x_2)}+\frac{1}{f(-x_2)}\right)\frac{1}{f(x_1+x_2)}\,.$$

Отсюда

$$\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{f(-x)} \;=\; c' \quad \text{и} \quad \frac{1}{f(-x)} \;=\; c'-\frac{1}{f(x)}$$

для некоторой константы c'. Подставляем в исходное уравнение:

$$\left(\frac{1}{f(x_1)}+\frac{1}{f(x_2)}-c'\right)\frac{1}{f(x_1+x_2)} \;=\; \frac{1}{f(x_1)f(x_2)}-c\,,$$

преобразуем

$$f(x_1+x_2) \;=\; \frac{f(x_1)+f(x_2)-c'f(x_1)f(x_2)}{1-cf(x_1)f(x_2)}\,.$$

Следовательно, f есть экспонента формальной группы $F_{a,b}(u,v)$ соответствующей роду $\chi_{a,b}$ с $c'=-a-b$ и $c=ab$. □

Для стабильно комплексного T^k-многообразия (M, c_T) с данными неподвижных точек $\{\boldsymbol{w}_j(p),\ \sigma(p)\colon p \in M^T,\ 1 \leqslant j \leqslant n\}$ уравнение

$$\sum_{p \in M^T} \sigma(p) \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{f\big(\langle \boldsymbol{w}_j(p), \boldsymbol{x} \rangle\big)} = c$$

называется уравнением жёсткости для M.

Его решения $f(x)$ дают роды Хирцебруха, которые являются жёсткими (или послойно мультипликативными) для данного T^k-многообразия M.

Например, уравнение жёсткости для нестандартного $\mathbb{C}P^2$, описанного выше, есть

$$-\frac{1}{f(x_1)f(x_1+x_2)}+\frac{1}{f(-x_2)f(x_1+x_2)}+\frac{1}{f(x_1)f(x_2)} \;=\; c.$$

Его общее решение $f(x)=\frac{e^{ax}-e^{bx}}{ae^{bx}-be^{ax}}$ соответствует $\chi_{a,b}$-роду.

С другой стороны, уравнение жёсткости для стандартного $\mathbb{C}P^2$ есть

$$\frac{1}{f(x_1)f(x_1+x_2)}+\frac{1}{f(-x_1-x_2)f(-x_2)}+\frac{1}{f(-x_1)f(x_2)}=c.$$

Наряду с $f(x)=\frac{e^{ax}-e^{bx}}{ae^{bx}-be^{ax}}$, оно имеет другие аналитические решения, описанные в работе Бухштабера и Буньковой.

Другой класс конкретных примеров многообразий с действиями тора и изолированными неподвижными точками дают однородные пространства компактных групп. Они часто допускают инвариантные почти комплексные структуры, в том числе интегрируемые, которые можно классифицировать с помощью методов теории представлений. В топологии важную роль играют комплексные и кватернионные проективные пространства, плоскость Кэли, многообразия Грассмана и флагов.

Пример

$S^6 = G_2/SU(3)$ допускает G_2-инвариантную почти комплексную структуру.

Действие максимального тора T^2 имеет 2 неподвижные точки с весами $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, -\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2)$ и $(-\boldsymbol{e}_1, -\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2)$.
Соответствующее уравнение жёсткости есть

$$\frac{1}{f(x_1)f(x_2)f(-x_1-x_2)} + \frac{1}{f(-x_1)f(-x_2)f(x_1+x_2)} = c.$$

Род Кричевера

Теорема

При $c \neq 0$ *общее решение уравнения жёсткости*

$$\frac{1}{f(x_1)f(x_2)f(-x_1-x_2)} + \frac{1}{f(-x_1)f(-x_2)f(x_1+x_2)} = c$$

задаётся функцией $f(x) = \frac{e^{\alpha x}}{\Phi(x,z)}$*, где* $\Phi(x,z) = \frac{\sigma(z-x)}{\sigma(z)\sigma(x)} e^{\zeta(z)x}$ *— функция Бейкера–Ахиезера эллиптической кривой* $y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$*,* $\sigma(z)$ *функция Вейерштрасса,* $\zeta(z) = (\ln\sigma(z))'$*,* $\wp(z) = -(\ln\sigma(z))''$*.*

Род Кричевера — это род Хирцебруха, соответствующий $f(x) = \frac{e^{\alpha x}}{\Phi(x,z)}$.

Универсальный род Кричевера φ_{K} зависит от 4 параметров $\alpha, \wp(z), \wp'(z), g_2$, рассматриваемых как формальные переменные.

Универс. эллипт. род φ_{ell} получается подстановкой $\alpha = \wp'(z) = 0$ в φ_{K}. Другим частным случаем является $\chi_{a,b}$-род.

Жёсткость на SU-многообразиях

SU-многообразие это стабильно комплексное многообразие M с $c_1(M) = 0$. Например, S^6 с почти комплексной структурой выше.

Теорема Кричевера: род φ_{K} является жёстким на SU-многообразиях. Теорема Ботта–Таубса: эллиптический род является жёстким на спинорных многообразиях.

Теорема (Бухштабер–П–Рэй, Черных)

Род Кричевера φ_{K} является универсальным родом, жёстким на SU-многообразиях.

Доказательство. Пусть φ — род, жёсткий на SU-многообразиях. Если $\varphi(S^6) = c \neq 0$, то утверждение следует из теоремы выше.
Если $\varphi(S^6) = 0$, то необходимо решить уравнение жёсткости для квазиторического 10-мерного SU-многообразия $L(2,3)$.